LEHRBUCH DER ANALYSIS

VON

RUDOLF LIPSCHITZ

ERSTER BAND

GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

BONN

VERLAG VON MAX COHEN & SOHN (FR. COHEN)

1877

GRUNDLAGEN DER ANALYSIS

VON

RUDOLF LIPSCHITZ

BONN
VERLAG VON MAX COHEN & SOHN (FR. COHEN)
1877

Vorrede.

Die Erfahrung älterer und neuerer Zeit hat gelehrt, wie leicht sich mit der steigenden Vervollkommnung von einzelnen mathematischen Methoden die Gefahr verbindet, dass über der Form der Operationen ihr Inhalt, über den Hülfsmitteln das Ziel in Vergessenheit gerathe. Aus dem Gefühl der Verpflichtung, dieser Gefahr nach meiner Kraft entgegenzuwirken, ist der Entschluss hervorgegangen, das System der Analysis von den Grundbegriffen an in stetigem Zusammenhange neu darzustellen. Das so entstandene Buch, dessen erster Band gegenwärtig erscheint und dessen zweiter Band Differential- und Integralrechnung behandeln wird, wendet sich an solche Leser, die mit dem Gebrauche der einfachen Rechnungsoperationen und mit der Euklidischen Geometrie bekannt sind. Den Ausgangspunkt der Darstellung bildet die Lehre von den ganzen Zahlen, während alle Beweise nur auf die Principien der Rechnung und die in dem Vortrage selbst mitgetheilten Sätze gegründet sind. Die geometrische Betrachtung habe ich nicht zu der Beweisführung, sondern nur zu dem Zwecke benutzt, die gefundenen Ergebnisse anschaulich zu machen. Durch die strenge Trennung der Rechnung von der Geometrie wird der Studirende veranlasst, stets gegenwärtig zu haben, dass sich die Rechnung in letzter Stelle immer auf wirkliche Zahlenwerthe bezieht, und die Gedankenarbeit, ohne die auf dem eingeschlagenen Wege kein neuer Schritt

gewonnen werden kann, sichert meines Erachtens am nachdrücklichsten gegen die im Eingange angedeutete Verirrung.

Bei meinem Vorhaben musste ich auch den grossen Kreis von Personen ins Auge fassen, welche der Mathematik um ihrer verschiedenen Anwendungen willen bedürfen. Man wird nun zugeben, dass die Fragen, auf welche sich in den letzten Zeiten das Hauptinteresse der mathematischen Forscher gerichtet hat, von den Theilen der Mathematik, die in dem Bereiche der Anwendungen durchgehends benutzt werden, in grössere Entfernung gerückt sind. In dem Bewusstsein, wie schwierig die Aufgabe sei, habe ich versucht, zwischen jenen beiden Gebieten eine Brücke zu schlagen. Demnach ist der Inhalt der mathematischen Kenntnisse, welche das ganze Buch umfassen soll, so bemessen, dass derselbe zu der theoretischen Mechanik, der Grundwissenschaft unter den Anwendungen der Mathematik, eine entsprechende Vorbereitung gewährt. Es würde mich freuen, wenn meine Arbeit dazu beitrüge, die Gebiete der reinen Mathematik und ihrer Anwendungen einander zu nähern.

Bonn, im Juli 1877.

R. Lipschitz.

Inhaltsverzeichniss.

Abschnitt I.

Rechnung mit bestimmten Grössen.

Capitel I.

Elemente der Lehre von den ganzen Zahlen.

Capitel II.

Rechnung mit Brüchen.

Seite

Capitel III.

Rechnung mit Potenzen von ganzen und gebrochenen Exponenten. Rechnung mit rationalen und irrationalen Grössen.

Abschnitt II.

Elemente der Algebra.

Capitel I.

Definition der Algebra.

Seite

Capitel II.

Algebraische rationale ganze Functionen mit einer Variable und von einem beliebig hohen Grade. Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten und von einem beliebig hohen Grade.

Seite

Capitel III.

Algebraische rationale ganze Functionen von beliebig vielen Variabeln und beliebig hohen Graden.

Capitel IV.

Systeme von n ganzen homogenen Functionen des ersten Grades mit n Variabeln. Allgemeine Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten. Lehre der Determinanten.

Seite

Capitel V.

Ganze homogene Functionen eines beliebig hohen Grades mit zwei Variabeln.

Capitel VI.

Ganze homogene Functionen des zweiten Grades, oder quadratische Formen mit beliebig vielen Variabeln.

Abschnitt III.

Unbegrenzt fortgesetzte Division.

Capitel I.

Recurrente Reihen.

Abschnitt IV.

Exponentialfunctionen und Logarithmen, trigonometrische Functionen und inverse trigonometrische Functionen.

Capitel I.

Exponentialfunctionen und Logarithmen.

Capitel II.

Trigonometrische Functionen und inverse trigonometrische Functionen.

Abschnitt V.

Unendliche Summen und Producte.

Capitel I.

Allgemeine Eigenschaften von unendlichen Summen und Producten.

Capitel II.

Potenzreihen zur Entwickelung von fundamentalen Functionen der Analysis.

Abschnitt I.

Rechnung mit bestimmten Grössen.

Capitel I.

Elemente der Lehre von den ganzen Zahlen.

§ 1. Begriff der Zahl. Unabhängigkeit einer Summe gegebener Zahlen von der Anordnung der Summation.

Wenn man bei der Betrachtung getrennter Dinge von den Merkmalen absieht, durch welche sich die Dinge unterscheiden, so bleibt der Begriff der *Anzahl* der betrachteten Dinge zurück. Wer über gewisse gegebene Dinge einen Ueberblick gewinnen will, der wird mit einem bestimmten Dinge beginnen und immer ein neues Ding den früheren hinzufügen; ein anderer, der denselben Zweck verfolgt, kann mit demselben oder mit einem anderen bestimmten Dinge beginnen und sein Verfahren in anderer Weise fortsetzen. Die innere Anschauung giebt uns aber die Ueberzeugung, dass die beiden Beobachter, wofern sie zugleich anfangen und immer zugleich ein neues Ding dem früheren hinzufügen, ihre sämmtlichen Operationen auch zugleich vollenden müssen.

Das beschriebene Verfahren ist *das Verfahren des Zählens*, und aus dem angeführten Grunde bedeutet das Ergebniss dieses Verfahrens, oder die *Zahl* der in einem bestimmten Falle gegebenen Dinge, einen völlig bestimmten Begriff.

Man braucht den Vorgang der inneren Anschauung, aus dem der Begriff der Zahl so eben abgeleitet ist, nur zu wiederholen, um zu erkennen, dass die Zahl gegebener Dinge immer erhalten wird, wenn man die gegebenen Dinge *auf eine beliebige Weise* in Gruppen ordnet, die Zahl der in jeder Gruppe vorhandenen beliebig geordneten Dinge bestimmt, und diese sämmtlichen Zahlen zu einander fügt. Dies ist aber der Inhalt *des Fundamentalsatzes*

Die Summe gegebener Zahlen hat immer denselben Werth, wie auch die Summanden vertauscht oder in Gruppen zusammen gefasst werden.

Sind zwei Zahlen beliebig gegeben, so werden sie entweder einander gleich sein, oder die eine wird grösser sein als die andere. Dann kann man die kleinere Zahl von der grösseren *subtrahiren*, oder *die Differenz* der beiden Zahlen bestimmen. Auch kann man eine Zahl von einer ihr gleichen subtrahiren, und erhält dann als Differenz *die Null.* Ferner leuchtet es ein, dass, wenn éine Summe von Differenzen gebildet werden soll, es freisteht, zuerst die Summe aller Minuenden, dann die Summe aller Subtrahenden zu nehmen, und hierauf die erste Summe um die zweite Summe zu vermindern. Desgleichen darf man, wenn mehrere Additionen und mehrere Subtractionen auszuführen sind, die Reihenfolge der einzelnen Acte beliebig wählen, wofern nur immer das Abzuziehende nicht grösser ist als dasjenige, von dem es abgezogen werden soll.

§ 2. Producte, Quotienten und Reste.

Bevor ich fortfahre, scheint es angemessen zu erwähnen, dass meine Absicht darin besteht, im Folgenden *das System der Grössenlehre* auf *die Lehre von den Zahlen* oder auf *die Arithmetik* zu gründen. Hiemit betrete ich den Weg, welchen *Euklid* in den Elementen eingeschlagen hat, und wende mich daher zu einer Erörterung der zunächst hervortretenden Eigenschaften der Zahlen.

Eine Summe bilden, bei der die einzelnen Summanden gleich derselben Zahl a sind, und die Anzahl der Summanden gleich der Zahl b ist, heisst *die Zahl a mit der Zahl b multipliciren.* Das Resultat dieser Operation heisst *ein Vielfaches* der Zahl a und möge mit dem Zeichen

$$a\,b$$

bezeichnet werden, bei dem *der Multiplicandus a* die erste, *der Multiplicator b* die zweite Stelle einnimmt. Es leuchtet nun unmittelbar ein, dass, wenn nach einander die sämmtlichen Vielfachen der Einheit gebildet werden, die vollständige Reihe der Zahlen entsteht, dass dagegen, wenn nach einander die sämmtlichen Vielfachen irgend einer von der Einheit verschiedenen

Zahl, etwa der Zahl a, aufgestellt werden, *nicht* alle Zahlen hervorgehen. Wird also eine Zahl f beliebig gegeben, so erhebt sich die Frage, ob dieselbe ein Vielfaches der bestimmten Zahl a sei, oder nicht. Da die Vielfachen von a gleich a oder grösser als a sind, so kann die Zahl f nur dann ein Vielfaches von a sein, wenn sie nicht kleiner als a ist. Wofern aber f nicht kleiner als a ist, so wird man f der Reihe nach mit den Vielfachen der Zahl a vergleichen. Weil jedes neue Vielfache grösser ist als das vorhergehende, und weil die Reihe der Vielfachen *ohne Ende* fortgesetzt werden kann, so muss die gegebene Zahl f entweder einem Vielfachen von a gleich sein, oder zwischen zwei auf einander folgende Vielfache fallen, welche durch aq und $a(q+1)$ bezeichnet werden mögen. Es giebt also in dem zweiten Falle eine Zahl r, welche kleiner ist, als a, und die zu aq hinzuaddirt, die Zahl f hervorbringt, so dass die Gleichung

$$f = aq + r$$

entsteht. Um durch dieselbe Gleichung den ersten Fall mit zu umfassen, lässt man für die Zahl r auch den Werth *Null* zu. Dann erhält die Zahl r immer einen ganz bestimmten Werth aus der Reihe der a Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a-1.$$

In der so eben aufgestellten Gleichung wird die Zahl f *der Dividendus*, die Zahl a *der Divisor*, die Zahl q *der Quotient*, die Zahl r *der Rest* genannt. Ist die Zahl f ein Vielfaches der Zahl a, mithin der Rest r gleich Null, so sagt man, *dass f durch a theilbar sei oder aufgehe*, und wendet die Bezeichnung $q = \dfrac{f}{a}$ an.

§ 3. Unabhängigkeit eines Products gegebener Zahlen von der Anordnung der Multiplication.

Da jedes Vielfache einer Zahl wieder eine Zahl ist, so kann man von einem solchen Vielfachen ein neues Vielfache nehmen, und die Operation des Multiplicirens beliebig oft wiederholen. Hier gilt nun *der Satz*

Das Product gegebener Zahlen hat immer denselben Werth, wie auch die Factoren vertauscht oder in Gruppen zusammengefasst werden.

Dass dieser Satz für *zwei* Factoren und für *drei* Factoren richtig ist, folgt sogleich aus der inneren Anschauung, auf die

wir auch den Begriff der Zahl und den Fundamentalsatz des § 1 zurückgeführt haben. Um nach der in § 2 gegebenen Definition die Zahl a mit der Zahl b zu multipliciren, sind b Gruppen zusammen zu addiren, deren jede a Einheiten enthält. Statt dessen können wir aber aus *jeder* Gruppe *eine* Einheit nehmen, so dass die Zahl b entsteht, und dieses Verfahren a mal wiederholen, wodurch wir alle vorhandenen Einheiten erschöpfen; dann erhalten wir aber die Zahl b mit der Zahl a multiplicirt, und es entsteht der auf *zwei* Factoren bezügliche Satz

$$ab = ba.$$

Um für ein Product von *drei* Factoren deren *Vertauschbarkeit* zu beweisen, pflegt man sich der *räumlichen Anschauung* zu bedienen, und das Product abc, welches die Bedeutung haben soll, dass zuerst a mit b, und hierauf das entstandene Product mit c multiplicirt wird, als eine Summe darzustellen

$$\begin{array}{l} a + a + a + \ldots \\ a + a + a + \ldots \\ \vdots \quad\;\; \vdots \quad\;\; \vdots \end{array}$$

bei der jede Horizontalreihe die Zahl a b mal enthält, und c Horizontalreihen vorhanden sind. Weil nun in jeder Vertikalreihe die Zahl a c mal vorkommt, und b Vertikalreihen da sind, so wird die Gesammtsumme auch durch die Operation acb ausgedrückt, und der doppelte Ausdruck führt zu der Gleichung

$$abc = acb,$$

welche aussagt, dass bei einem Product von drei Factoren die beiden letzten Factoren mit einander vertauscht werden dürfen. Die gegenwärtige Schlussweise ist in ihrem Kern von der so eben bei zwei Factoren gebrauchten nicht verschieden und knüpft deshalb meines Erachtens nicht sowohl an unsere *räumliche Anschauung*, als an unsere *innere Anschauung* überhaupt an.

Da die in Rede stehende Eigenschaft für zwei Factoren bewiesen ist, so darf man erstens mit Rücksicht auf die vorgeschriebene Bildungsweise in abc die beiden ersten Factoren, und hierauf nach der obigen Bemerkung die beiden letzten Factoren mit einander vertauschen, so dass

$$abc = bac = bca$$

entsteht. Man darf ferner mit acb ebenso verfahren, und erhält dann die das gleiche Resultat darstellenden Anordnungen

$$acb = cab = cba.$$

Hiemit sind alle möglichen Vertauschungen der einzelnen drei Factoren erschöpft.

Das Ergebniss der Multiplication abc kann aber auch dadurch bestimmt werden, dass man sich fragt, *wie oft* hier die Zahl a vorkomme. Die Anzahl ist vermöge des obigen Schemas gleich bc und auch gleich cb; wird daher die Multiplication der Zahl a mit dem Product bc durch $a(bc)$ dargestellt, so gelten die Gleichungen

$$abc = a(bc) = a(cb).$$

Aus denselben folgt, dass es gestattet ist, bei jeder Anordnung der drei Factoren *die beiden letzten Factoren in ein Product zusammen zu fassen und den ersten Factor mit diesem Product zu multipliciren*, und daher ist der gewünschte Beweis für beide Behauptungen des zugehörigen Satzes, mithin auch für jede Bildungsweise eines Products von drei Factoren vollständig geleistet.

Der Beweis für die *allgemeine Gültigkeit* des betreffenden Satzes lässt sich dadurch führen, dass man zeigt, wie derselbe, wenn er für eine gewisse Zahl von Factoren richtig ist, auch für die um Eins grössere Zahl richtig sein muss. Der Satz sei schon für die Producte von fünf und weniger Factoren bewiesen, und soll nun für ein Product von sechs Factoren bewiesen werden. Es ist jetzt erstens zu zeigen, dass ein Product von sechs Factoren $abcdef$ ungeändert bleibt, wenn die Factoren ohne Aenderung ihrer Reihenfolge in Gruppen zusammengefasst werden, zum Beispiel, dass

$$a(bc)(def) = abcdef$$

ist. Da jeder neue Multiplicator zu der rechten Seite des Multiplicandus geschrieben wird, so ist

$$abcdef = (abcde)f.$$

Wegen des für fünf Factoren geltenden Satzes ist das Product $abcde$ gleich einem Product, bei welchem die mit einander zu multiplicirenden Gruppen von der ersten bis zu der vorletzten mit den Gruppen des Products $a(bc)(def)$ übereinstimmen, in der letzten Gruppe jedoch die letzte Zahl fehlt. Man hat also

$$abcde = a(bc)(de),$$

mithin

$$abcdef = a(bc)(de)f = (a(bc))(de)f,$$

ferner wegen des für drei Factoren bewiesenen Satzes

$$(a(bc))(de)f = (a(bc))((de)f),$$

und deshalb, wie behauptet worden

$$a(bc)(def) = abcdef.$$

Es ist zweitens zu zeigen, dass ein Product von sechs Factoren $abcdef$ bei einer beliebigen Vertauschung der Factoren ungeändert bleibt, zum Beispiel, dass

$$febdac = abcdef$$

ist. Man hat wieder

$$febdac = (febda)c.$$

Das Product $febda$ von fünf Factoren bleibt nach der Voraussetzung bei einer Vertauschung der Factoren ungeändert. Giebt man jetzt den Buchstaben desselben ihre regelmässige Folge, so kommt die Anordnung $abdef$, und diese zerfällt in zwei Gruppen ab und def, bei denen die Buchstaben regelmässig aufeinander folgen. Das Product $febda$ ist demnach gleich dem Product $abdef$ und dieses gleich dem Product $(ab)(def)$, folglich ist das Product $(febda)c$ gleich dem Product von drei Factoren $(ab)(def)c$. Drei Factoren dürfen vermöge des schon bewiesenen Satzes beliebig geordnet werden, daher kann die Zahl c die Stelle erhalten, welche die Lücke zwischen der Buchstabenfolge der beiden Gruppen ausfüllt, so dass $(ab)(def)c = (ab)c(def)$ wird. Weil aber nach dem vorhin Bewiesenen der Werth eines Products von sechs Factoren, wenn die Factoren ohne Aenderung der Reihenfolge in Gruppen getheilt werden, ungeändert bleibt, so ist $(ab)c(def) = abcdef$, also auch $febdac = abcdef$, und damit der zweite Theil der Behauptung erwiesen. Es ist ersichtlich, dass durch das angewendete Beweisverfahren von einer beliebigen die zwei übertreffenden Zahl von Factoren zu der um Eins grösseren Zahl übergegangen werden kann, und deshalb ist der in der Rede stehende Satz in der That allgemein gültig.

Soll *eine Summe von Zahlen* mit *einer Zahl* multiplicirt werden, so kann man aus jedem Summanden des Multiplicandus und dem Multiplicator das Product bilden und alle diese Producte addiren. Für die Multiplication *einer Summe von Zahlen* mit *einer anderen Summe von Zahlen* ergiebt sich hienach die Regel, *dass jeder Summand des einen Factors mit jedem Summanden des zweiten Factors zu multipliciren, und von all diesen*

Producten die Summe zu nehmen ist. Desgleichen *wird das Product aus mehreren Summen gefunden, indem man aus jedem Factor je einen Summanden nimmt, von diesen Summanden das Product bildet, und die sämmtlichen auf diese Weise erhaltenen Producte zu einander addirt.*

§ 4. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

Jede Zahl ist gleich dem Product aus der Einheit in die Zahl selbst; darum hat jede Zahl sowohl die Einheit wie auch sich selbst zum Theiler. Eine Zahl, welche ausser diesen keine anderen Theiler besitzt, wird *eine einfache Zahl* oder *Primzahl* genannt; eine Zahl, welche ausser der Einheit und sich selbst noch andere Theiler hat, heisst *eine zusammengesetzte Zahl.* Ob eine gegebene Zahl eine Primzahl sei oder nicht, lässt sich entscheiden, indem ermittelt wird, ob eine der Zahlen, welche kleiner sind als die gegebene Zahl, in dieselbe aufgehe. Auf diese Weise erhält man die Reihe der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w. Auch darf man sagen, dass eine Zahl, welche durch keine *Primzahl* aufgeht, die kleiner ist als sie selbst, nothwendig eine Primzahl sein muss; denn eine Zahl, welche durch keine kleinere Primzahl theilbar ist, kann auch durch keine zusammengesetzte Zahl theilbar sein, und daher nur sich selbst und die Einheit zu Theilern haben. Die in dem vorigen § bewiesene Unabhängigkeit eines Products von der Anordnung der Multiplication erlaubt nämlich die Folgerung, *dass eine Zahl, welche durch eine zusammengesetzte Zahl theilbar ist, auch durch jeden Theiler dieser zusammengesetzten Zahl theilbar sein muss.* Schon *Euklid* hat bewiesen, dass die Reihe der Primzahlen niemals abbrechen kann, und zwar giebt er den folgenden Beweis. Gesetzt, das Gegentheil wäre der Fall, und eine Primzahl p wäre die grösseste, die existirt, so bilde man das Product der sämmtlichen vorhandenen Primzahlen und addire zu demselben die Einheit. Die so entstehende Zahl

$$2.3.5\ldots.p+1$$

kann nun durch keine der nach der Annahme vorhandenen Primzahlen aufgehen, weil bei der Division mit jeder derselben der Rest Eins erscheint; diese Zahl muss also entweder überhaupt durch keine Primzahl theilbar sein, und dann wäre sie selbst eine

Primzahl, oder sie muss eine Primzahl zum Theiler haben, welche in der vollständigen Reihe der Primzahlen von 2 bis p nicht vorkommt, mithin grösser ist als p. In beiden Fällen ergiebt sich ein Widerspruch gegen die getroffene Annahme, dass p die grösseste vorhandene Primzahl sei, und darum ist der aufgestellte Satz richtig.

§ 5. Aufsuchung des grössesten gemeinsamen Theilers zweier Zahlen.

Zwei beliebig gegebene Zahlen haben entweder nur die Einheit zu ihrem gemeinsamen Theiler oder auch andere Zahlen zu gemeinsamen Theilern. In dem ersten Falle gebraucht man den Ausdruck, dass *die beiden Zahlen ohne gemeinsamen Theiler*, oder auch *dass sie relative Primzahlen sind.* Der *grösseste gemeinsame Theiler* zweier Zahlen a und b kann durch das folgende Verfahren gefunden werden, welches sich auf den aus dem Schlusse von § 3 und dem Schlusse von § 1 folgenden Satz stützt, *dass sowohl die Summe wie auch die Differenz der Vielfachen einer bestimmten Zahl selbst ein Vielfaches dieser Zahl ist.*

Von den beiden Zahlen a und b sei a die grössere, dann bestimme man für die Division der Zahl a durch die Zahl b nach § 2 den Quotienten q und den Rest r, der nothwendig kleiner als b ist. Wofern nun der Rest r nicht gleich Null ist, werde für die Division der Zahl b durch die Zahl r der Quotient q_1 und der Rest r_1 bestimmt. Dieses Verfahren werde fortgesetzt, bis eine der betreffenden Divisionen aufgeht, so dass die Folge von Gleichungen entsteht

$$\begin{aligned} a &= b\,q + r \\ b &= r\,q_1 + r_1 \\ r &= r_1\,q_2 + r_2 \\ &\;\vdots \\ r_{\mu-1} &= r_\mu\,q_{\mu+1} + r_{\mu+1} \\ r_\mu &= r_{\mu+1}\,q_{\mu+2}. \end{aligned}$$

Das Verfahren muss nämlich sein Ende erreichen, weil von den Zahlen a, b, r, r_1, r_2, .. eine jede grösser ist, als die ihr nachfolgende, und weil es nur eine beschränkte Anzahl von Zah-

len giebt, die unter einer bestimmten Zahl a liegen. Nun ist der letzte von Null verschiedene Rest $r_{\mu+1}$ der grösseste gemeinsame Theiler der Zahlen a und b. Denn schreibt man die aufgestellten Gleichungen in der Form

$$\begin{gathered} a - bq = r \\ b - rq_1 = r_1 \\ r - r_1 q_2 = r_2 \\ \vdots \\ r_{\mu-1} - r_\mu q_{\mu+1} = r_{\mu+1} \end{gathered}$$

so folgt mit Hülfe des angeführten Satzes aus der ersten, dass jeder gemeinsame Theiler t von a und b auch die Differenz $a - bq = r$ theilen muss, ebenso aus der zweiten, dass derselbe gemeinsame Theiler t die Differenz $b - rq_1 = r_1$ theilen muss, und durch successive Anwendungen aller Gleichungen, dass derselbe Theiler t mit Nothwendigkeit auch die Zahl $r_{\mu+1}$ theilt. Das Bewiesene gilt von jedem einzelnen gemeinsamen Theiler der Zahlen a und b, und somit auch von *dem grössesten ihrer gemeinsamen Theiler*. Dagegen lehrt die letzte der ursprünglich aufgestellten Gleichungen, dass r_μ durch $r_{\mu+1}$ aufgeht, die vorletzte mit Hülfe des angeführten Satzes, dass die Summe $r_\mu q_{\mu+1} + r_{\mu+1}$ und also auch $r_{\mu-1}$ durch $r_{\mu+1}$ aufgeht, und so ergiebt die successive Anwendung der sämmtlichen Gleichungen, dass sowohl b wie auch a durch $r_{\mu+1}$ aufgeht. Demnach ist $r_{\mu+1}$ ein gemeinsamer Theiler von a und b, und zwar ein solcher gemeinsamer Theiler, dass alle einzelnen gemeinsamen Theiler dieser Zahlen in denselben aufgehen. Weil aber niemals eine grössere Zahl in eine kleinere aufgehen kann, so darf $r_{\mu+1}$ nicht kleiner sein, als irgend ein gemeinsamer Theiler von a und b. Daher muss $r_{\mu+1}$ selbst *der grösseste gemeinsame Theiler von a und b* sein, und das war behauptet worden.

§ 6. Relative Primzahlen.

Sobald der Rest $r_{\mu+1}$ gleich der Einheit wird, so ist nach dem so eben bewiesenen Satze die Einheit der grösseste gemeinsame Theiler der Zahlen a und b. *Hierin besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Zahlen a*

und b ohne gemeinsamen Theiler oder relative Primzahlen sind. Wir können demnach die Voraussetzung, dass zwei Zahlen a und b relative Primzahlen sind, dadurch ausdrücken, dass wir die Reihe von Gleichungen aufstellen

$$\begin{gathered} a = bq + r \\ b = rq_1 + r_1 \\ r = r_1 q_2 + r_2 \\ \vdots \\ r_{\mu-1} = r_\mu q_{\mu+1} + 1, \end{gathered}$$

und gelangen zu einem Beweise des folgenden Satzes, auf dem die Lehre von der Zusammensetzung der Zahlen durch Multiplication beruht:

(1) *Wenn a und b relative Primzahlen sind, und k eine beliebige Zahl bedeutet, so geht jeder gemeinsame Theiler der Zahlen ak und b in die Zahl k auf.*

Multiplicirt man beide Seiten der sämmtlichen aufgestellten Gleichungen mit der Zahl k und giebt ihnen die Gestalt

$$\begin{gathered} ak - bqk = rk \\ bk - rq_1 k = r_1 k \\ rk - r_1 q_2 k = r_2 k \\ \cdots \\ r_{\mu-1} k - r_\mu q_{\mu+1} k = k, \end{gathered}$$

so muss jeder Theiler von ak und b nach dem im vorigen § angewendeten Hülfssatze in Folge der ersten Gleichung ein Theiler von rk, in Folge der zweiten Gleichung ein Theiler von $r_1 k$ sein, mithin auch, indem von jeder Gleichung nach der nächst vorhergehenden Gebrauch gemacht wird, auf Grund der letzten Gleichung ein Theiler der Zahl k; was bewiesen werden sollte.

Hieraus folgt sogleich das *Corollar zu dem Satze* (1), *dass, wofern a und b relative Primzahlen sind und das Product ak durch die Zahl b aufgeht, die Zahl k durch b aufgehen muss.* Sobald die Zahl k ebenfalls eine relative Primzahl zu der Zahl b ist, so können ak und b keinen gemeinsamen Theiler haben, als die Einheit; denn wenn sie einen anderen hätten, so müsste derselbe wegen des bewiesenen Satzes sowohl in b als in k aufgehen, und diese Zahlen haben nach der Voraussetzung keinen von der Einheit verschiedenen gemeinsamen Theiler. So entsteht der Satz

(2) *Wenn a und b relative Primzahlen, zugleich aber k und b relative Primzahlen sind, so sind auch ak und b relative Primzahlen.*

Man kann diesen Satz erweitern, indem man denselben wiederholt anwendet. Es sei eine Zahl l sowohl zu a relativ prim wie auch zu k relativ prim, so ist in Folge des letzten Satzes die Zahl l auch zu ak relativ prim. Weil aber auch b zu ak relativ prim war, so ist aus demselben Grunde bl zu ak relativ prim. Die gleiche Betrachtung hält Stich, indem nach einander zu dem ersten Product ak und zu dem zweiten Product bl immer neue Factoren hinzugefügt werden, und liefert das Resultat

(3) *Wenn jede einzelne von den Zahlen $a, k, k_1, \ldots$ zu jeder einzelnen von den Zahlen $b, l, l_1, \ldots$ relativ prim ist, so ist auch das Product aus den Zahlen der ersten Gruppe $akk_1 \ldots$ zu dem Product aus den Zahlen der zweiten Gruppe $bll_1 \ldots$ relativ prim.*

Dieser Satz erlaubt auf den Fall eine Anwendung, dass die erste Gruppe aus lauter gleichen Factoren besteht, die gleich a sein mögen, und die zweite Gruppe ebenfalls aus lauter gleichen Factoren besteht, die gleich b sein mögen. Für die spätere Betrachtung ist namentlich die Voraussetzung von eingreifender Bedeutung, dass jede der beiden Gruppen die gleiche Anzahl n von Zahlen enthält oder *eine Potenz von demselben Exponenten n* bildet, so dass das erste Product *zu der $n$ten Potenz der Zahl a,* das zweite Product *zu der $n$ten Potenz der Zahl b* wird. Dann entsteht der Satz

(4) *Wenn die Zahlen a und b relative Primzahlen zu einander sind, so sind auch die Potenzen a^n und b^n relative Primzahlen zu einander.*

§ 7. Zerlegung einer zusammengesetzten Zahl in ein Product von Primzahlen.

Eine Zahl a kann mit einer Primzahl p, von der Einheit abgesehen, nur p zum gemeinsamen Theiler haben, und geht, sobald dies der Fall ist, durch p auf. Wenn man daher in dem Corollar zu dem Satze (1) des § 6 die Zahl b durch eine Primzahl p ersetzt, die nicht in a aufgeht, so leuchtet ein, dass, damit das Product ak durch die Primzahl p aufgehe, der Factor

k durch die Primzahl p aufgehen muss, und man bekommt den Satz

(1) *Wenn ein Product von zwei Zahlen durch eine Primzahl aufgeht, so muss einer der beiden Factoren durch diese Primzahl aufgehen.*

Auf gleiche Weise folgt, dass, wenn ein Product von mehreren Zahlen durch eine Primzahl aufgeht, *wenigstens einer* der Factoren durch diese Primzahl aufgehen muss. Mit diesem Hülfsmittel lässt sich beweisen,

(2) *dass jede Zahl nur auf eine einzige Weise als ein Product von Primzahlen dargestellt werden kann.*

Nach der gegebenen Definition ist eine zusammengesetzte Zahl m als ein Product von zwei Factoren darstellbar, von denen keiner gleich Eins ist. Prüft man jeden der beiden bezeichneten Factoren, ob er eine zusammengesetzte Zahl ist oder nicht, und wiederholt die Zerlegung, sofern sie möglich ist, so muss schliesslich m in ein Product von Primzahlen aufgelöst erscheinen, deren Anzahl eine beschränkte ist; denn keine Primzahl ist kleiner als die Zwei, und selbst ein Product aus lauter Factoren gleich der Zwei, oder eine Potenz von Zwei, würde die gegebene Zahl m überschreiten, wenn die Anzahl der gleichen Factoren über jedes Mass hinaus zunähme. Es wäre nun denkbar, dass, wenn die Zerlegung einer Zahl m in Primfactoren auf verschiedene Arten vorgenommen wird, auch das Ergebniss ein verschiedenes wäre, und daher setzen wir voraus, dass zwei verschiedene Zerlegungen der Zahl in Primfactoren vorliegen,

$$m = abc \ldots ghk$$

und

$$m = a_1 b_1 c_1 \ldots g_1 h_1 k_1 .$$

In Folge der ersten Zerlegung geht m durch die Primzahl a auf. Weil nun nach der zweiten Zerlegung das Product $a_1 b_1 \ldots h_1 k_1$ durch die Primzahl a aufgehen muss, so muss wenigstens einer dieser Factoren durch a theilbar sein, und da auf die Anordnung der Factoren bei einem Product nach § 3 nichts ankommt, so dürfen wir annehmen, dass a_1 der durch a aufgehende Factor ist. Weil aber a_1 selbst eine Primzahl ist, so muss alsdann $a_1 = a$ sein. Wir betrachten jetzt den Quotienten $\frac{m}{a} = \frac{m}{a_1}$, für welchen die beiden Darstellungen

$$b\,c \ldots g\,h\,k \text{ und } b_1 c_1 \ldots g_1 h_1 k_1$$

vorhanden sind, und zeigen in genau derselben Weise, dass der Primfactor b gleich einem bestimmten Primfactor der zweiten Darstellung sein muss; als dieser gelte b_1. So können wir fortfahren, bis nach einander alle Primfactoren der ersten Darstellung erschöpft und einzeln in der zweiten Darstellung nachgewiesen sind. Alsdann müssen aber auch die sämmtlichen Primfactoren der zweiten Darstellung erschöpft sein; denn andernfalls müsste der Quotient von m durch sich selbst oder die Einheit durch eine übrig bleibende Primzahl theilbar sein. Also stimmen die beiden vorausgesetzten Darstellungen der Zahl m als Product von Primfactoren, abgesehen von der Anordnung der Primfactoren, nothwendig überein.

§ 8. Divisoren einer Zahl.

Der vorige § gewährt die Sicherheit, dass jede Zahl auf eine eindeutig bestimmte Weise aus Primzahlen zusammengesetzt ist. Kennt man für eine bestimmte Zahl diese Zerlegung, so können die unter einander gleichen Factoren zu *Potenzen* zusammengefasst werden. Ein Product von α Factoren, die sämmtlich gleich a sind, wird wie in § 6 erwähnt, die αte Potenz von a genannt und mit a^α bezeichnet. Hier ist *a die Basis, α der Exponent der Potenz*; die Potenz a^α heisst ausserdem auch *eine Potenz des αten Grades.* Auf diese Weise erscheint jede gegebene Zahl *m als die Potenz einer Primzahl oder als das Product von Potenzen unter einander verschiedener Primzahlen a, b, c,..*

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

Als Beispiel der betreffenden Darstellung mögen die ersten Zahlen genommen werden:

$$\begin{aligned}
2 &= 2^1\\
3 &= 3^1\\
4 &= 2^2\\
5 &= 5^1\\
6 &= 2^1 . 3^1\\
7 &= 7^1\\
8 &= 2^3\\
9 &= 3^2\\
10 &= 2^1 . 5^1.
\end{aligned}$$

Diese Darstellung der Zahlen ist allgemein geläufig und erweckt dadurch den Schein, als ob der Satz (2) des vorigen Artikels keines Beweises bedürfe. Es liegt aber nicht nur bei diesem Satze, sondern bei allen bisherigen Erörterungen die Schwierigkeit für den Anfänger gerade darin, sich zu überzeugen, dass derartige Erörterungen unentbehrlich sind, wofern das Gebäude der Grössenlehre solide errichtet werden soll.

Welchen Werth die Zerlegbarkeit der Zahlen in einfache Factoren habe, tritt deutlich hervor, sobald man gewisse Aufgaben zuerst ohne dieses Hülfsmittel und dann mit diesem Hülfsmittel in Angriff nimmt. Hierher gehört die in § 5 behandelte Aufgabe, von zwei Zahlen m und m_1 den grössesten gemeinsamen Theiler aufzusuchen. Wir können dieselbe sogleich dahin ausdehnen, *für mehrere Zahlen $m, m_1, m_2, \ldots$ den grössesten gemeinschaftlichen Theiler zu finden.* Ist für die Zahl m die obige Zerlegung in Primfactoren, und sind für die Zahlen m_1, $m_2, \ldots$ die Zerlegungen

$$m_1 = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} \ldots, \quad m_2 = a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} c_2^{\gamma_2}, \ldots$$

bekannt, so ergiebt sich offenbar der grösseste gemeinsame Theiler, indem nur diejenigen Primzahlen genommen werden, *welche in allen Zahlen $m, m_1, m_2, \ldots$ zugleich vorkommen,* indem jede Primzahl auf *den niedrigsten Exponenten* erhoben wird, mit dem sie in irgend einer der Zahlen auftritt, und indem *aus diesen sämmtlichen Potenzen das Product* gebildet wird.

Desgleichen erhält man die kleinste ganze Zahl, in welche mehrere gegebene Zahlen $m, m_1, m_2, \ldots$ aufgehen, oder *das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $m, m_1, m_2, \ldots$,* indem man von allen Primzahlen, *die in irgend einer Zahl vorkommen, die höchsten auftretenden Potenzen* nimmt und *aus allen diesen Potenzen das Product* bildet.

Die Aufgabe, *die sämmtlichen Divisoren einer gegebenen Zahl m aufzustellen,* lässt sich, ohne die Zerlegung der Zahl in ihre einfachen Factoren m als bekannt vorauszusetzen, dadurch auflösen, dass man die Zahl nach einander durch alle Zahlen dividirt, welche kleiner als m sind, und diejenigen, bei welchen die Division aufgeht, heraushebt. Wofern aber die Zerlegung der Zahl m in ihre einfachen Factoren vorliegt, so kann man über-

sichtlicher verfahren. Damit eine Zahl ein Divisor von m sei, darf sie keine anderen Primfactoren enthalten, als die in m vorkommenden Primfactoren, und kein solcher Primfactor darf mit einem höheren Exponenten auftreten, als den derselbe Primfactor in m trägt. Ein Divisor hat daher, wenn wie oben $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ ist, die Gestalt

$$a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots\ldots$$

wo α' nicht grösser als α, β' nicht grösser als β sein darf, u. s. f. Setzt man, wie üblich, fest, dass $a^0 = 1$ sei, so sind bei α', β', γ', .. die Werthe Null zugelassen. Um *die sämmtlichen Divisoren* zu erhalten, dient dasselbe Verfahren, nach welchem in dem Schema

$$\begin{gathered} 1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha \\ 1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta \\ 1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

das Product sämmtlicher Summen gebildet wird; nach dem gegen Ende des § 3 angegebenen Bildungsgesetze für ein aus mehreren Summen von Zahlen zu bildendes Product enthält das vorliegende Product durch lauter Additionszeichen verbunden alle Divisoren der Zahl m, und zwar jeden nur Ein Mal. Auch kann hiernach die Anzahl der sämmtlichen Divisoren gefunden werden. Da die erste Reihe $(\alpha + 1)$ Glieder, die zweite Reihe $(\beta + 1)$ Glieder, die dritte Reihe $(\gamma + 1)$ Glieder enthält, u. s. f., und da bei der Bildung des ganzen Products die sämmtlichen in den einzelnen Multiplicationen auftretenden Producte erhalten bleiben, so *ist die Anzahl der Divisoren der Zahl m gleich dem Product der Anzahlen* $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$ Als Beispiel diene die Zahl $84 = 2^2 . 3 . 7$. Ihre sämmtlichen Divisoren sind die Zahlen

$$1,\ 2,\ 4,\quad 3,\ 6,\ 12,\quad 7,\ 14,\ 28,\quad 21,\ 42,\ 84,$$

die Anzahl derselben beträgt $(2 + 1)\ (1 + 1)\ (1 + 1) = 12$.

§ 9. Anzahl der relativen Primzahlen zu einer Zahl m, die nicht grösser sind als m.

In § 2 ist erwähnt worden, dass bei der Division mit einer gegebenen Zahl, welche m heissen möge, jede Zahl, welche

in der Reihe 0, 1, 2, .. $(m-2)$, $(m-1)$ enthalten ist, einen *Rest* darstellen kann. Diese Zahlen verdienen eine besondere Aufmerksamkeit. Die Frage, wie viele unter denselben relative Primzahlen zu m sind, kann in jedem einzelnen Falle durch die directe Betrachtung entschieden werden; aber auch hier lässt sich eine allgemein gültige Antwort aussprechen, wofern, wie in dem vorigen §, die Zerlegung der Zahl m in ihre einfachen Factoren als bekannt vorausgesetzt wird. Zugleich möge die Frage den modificirten Ausdruck erhalten:

Wie viel relative Primzahlen zu m befinden sich in der Reihe der Zahlen

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ m-1,\ m.$$

Insofern die Zahl m gleich dem Product der verschiedenen Primzahlpotenzen $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$ ist, muss jede der in Rede stehenden Zahlen, welche weder durch a, noch durch b, noch durch irgend eine der in m enthaltenen Primzahlen aufgeht, eine relative Primzahl zu m sein. Wir wollen daher aus der vorgelegten Reihe zuerst die Vielfachen der Primzahl a ausscheiden. Dies sind die Zahlen

$$1.a,\ 2.a, \ldots . \frac{m}{a}a,$$

deren Anzahl gleich $\frac{m}{a}$, dem Quotienten von m durch a ist. Es bleiben demnach $m-\frac{m}{a}$ oder $\frac{m}{a}(a-1)$ Zahlen übrig. Ist noch eine zweite Primzahl b in der Zahl m enthalten, so entfernen wir die Vielfachen von dieser, welche noch vorhanden sind. In der ursprünglichen Reihe befanden sich die Vielfachen von b

$$1.b,\ 2.b, \ldots \frac{m}{b}b;$$

in Folge der ersten ausgeführten Exclusion fehlen unter denselben diejenigen, welche zugleich durch a aufgehen. Nun kann aber ein Vielfaches von b, etwa kb, nur dann durch a aufgehen, wofern k durch a aufgeht. Daher giebt es jetzt nur solche Vielfache von b, bei denen der erste Factor relative Primzahl zu a ist. Die Anzahl der relativen Primzahlen zu a in der Reihe der Zahlen 1, 2, .. $\frac{m}{b}$ beträgt aber vermöge der angestellten Betrach-

tung $\frac{m}{ab}(a-1)$. Folglich ist dies auch die Anzahl der in der vorgelegten Zahlenreihe noch vorhandenen Vielfachen von b; entfernt man diese ebenfalls, so bleiben $\frac{m}{a}(a-1) - \frac{m}{ab}(a-1)$ oder $\frac{m}{ab}(a-1)(b-1)$ Zahlen zurück, welche weder durch a noch b aufgehen.

Dieser Ausdruck enthält die vollständige Antwort für die aufgeworfene Frage, sobald die Zahl m nur die beiden verschiedenen Primzahlen a und b enthält. Ist m durch noch eine dritte Primzahl c theilbar, so scheidet man die Vielfachen von c aus, die in der vorgelegten Zahlenreihe nach der Ausführung der zwei Exclusionen noch übrig sind, und behält durch Wiederholung aller Schlüsse die Anzahl

$$\frac{m}{ab}(a-1)(b-1) - \frac{m}{abc}(a-1)(b-1)$$

oder

$$\frac{m}{abc}(a-1)(b-1)(c-1).$$

In der gleichen Weise ist dann fortzufahren, bis die sämmtlichen in der Zahl m auftretenden verschiedenen Primzahlen erschöpft sind, und es entsteht für die gesuchte *Anzahl* $\varphi(m)$ *der relativen Primzahlen zu* m *in der Reihe der Zahlen* $1, 2, \ldots m$ der Ausdruck

$$\varphi(m) = \frac{m}{abc..}(a-1)(b-1)(c-1)..$$

Wenn m gleich einer einzigen Primzahl a ist, so sind alle Zahlen $1, 2, \ldots a-1$ relative Primzahlen zu a, und man hat

$$\varphi(a) = a - 1.$$

Wenn m gleich der Potenz einer einzigen Primzahl a^α ist, so kommt

$$\varphi(a^\alpha) = a^{\alpha-1}(a-1).$$

Der allgemeine Ausdruck einer Zahl m als Product der Potenzen verschiedener Primzahlen $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ führt zu der Gleichung

$$\varphi(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots$$

Das Beispiel $m = 84 = 2^2.3.7$ liefert für $\varphi(m)$ den Werth

$$\varphi(84) = 2(2-1)(3-1)(7-1) = 24.$$

Eine merkwürdige Eigenschaft des Ausdrucks $\varphi(m)$ ist die, *dass, wenn man eine Zahl m in zwei Factoren r und s zerlegt, die zu einander relativ prim sind, das Product $\varphi(r)\varphi(s)$ gleich dem Ausdrucke $\varphi(m)$ selbst wird.* Zwei Factoren r und s, welche zu einander relativ prim sind, müssen aus verschiedenen Primzahlen bestehen, daher kann jede einzelne in m enthaltene Primzahlpotenz entweder nur in r oder in s vorkommen. Ist nun zum Beispiel $r = a^\alpha b^\beta$, $s = c^\gamma \ldots$, so folgt aus der allgemeinen Regel

$$\varphi(r) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} (a-1)(b-1),$$
$$\varphi(s) = c^{\gamma-1} \ldots (c-1) \ldots,$$

und daher, wie behauptet worden,

$$\varphi(r)\varphi(s) = \varphi(m).$$

Die gleiche Schlussweise findet auf jede Zerlegung der vorgeschriebenen Art Anwendung. Da die Einheit zu jeder Zahl relativ prim ist, so gehört auch die Zerlegung einer Zahl m in die Einheit und sich selbst hierher. Man setzt nun fest, dass

$$\varphi(1) = 1$$

sei, alsdann gilt der aufgestellte Satz auch für diese Zerlegung der Zahl m.

§ 10. Addition, Subtraction und Multiplication von positiven und negativen ganzen Zahlen.

Bei der gegenwärtig mitgetheilten Entwickelung der fundamentalen Eigenschaften der Zahlen sind *die Operationen des Addirens, des Subtrahirens und des Multiplicirens* angewendet worden; das Addiren hat aber vor dem Subtrahiren den Vorzug behauptet, dass zwar irgend welche zwei Zahlen immer addirt werden konnten, dass sich dagegen nur eine solche Zahl von einer anderen subtrahiren liess, welche nicht grösser ist als die andere. Auch sind die Regeln für das Rechnen mit Summen bisher in einem viel erheblicheren Umfange erörtert worden, als die Regeln für das Rechnen mit Differenzen, und es besteht die nächste Aufgabe darin, das Rechnen mit Differenzen dem Rechnen mit Summen consequent gegenüber zu stellen.

Die Regeln für die *Addition* von Summen und Differenzen sind am Schluss von § 1 erwähnt, und diese Regeln liefern für

die *Multiplication* einer Summe $a+b$ mit einer Zahl c, wie auch für die *Multiplication* einer Differenz $a-b$ mit einer Zahl c die im Eingange von § 5 angeführten Sätze, welche sich in den Gleichungen darstellen

(1) . . . . $(a+b)c = ac + bc$,

(2) . . . . $(a-b)c = ac - bc$.

Soll *eine Differenz $g-h$ von einer Zahl a subtrahirt* werden, so leuchtet es ein, dass die Zahl a um den Subtrahendus h der Differenz zu vermehren und hierauf die Summe $a+h$ um den Minuendus g der Differenz zu vermindern ist, und zwar kann g nicht grösser als $a+h$ sein, wenn nach der geltenden Voraussetzung die Zahl $g-h$ nicht grösser ist, als die Zahl a, von welcher die erstere zu subtrahiren war.

Wir wenden uns jetzt dazu, *die Multiplication zweier Summen* und *die Multiplication zweier Differenzen* zu vergleichen. Nach der am Schlusse des § 3 angeführten Regel gilt für *die Multiplication zweier Summen* $(a+b)$ und $(c+d)$ die Gleichung

(3) . . . . $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$.

Für die Multiplication von Differenzen ergiebt sich nun vermöge der in § 2 aufgestellten Definition der Multiplication, dass die *Null*, mit einer Zahl c multiplicirt, das Resultat *Null* liefern muss. Indem wir aber zulassen, dass die *Null* als Multiplicator einer Zahl auftrete, setzen wir ausdrücklich fest, *dass auch in diesem Falle Multiplicator und Multiplicandus vertauscht werden dürfen, und dass das zugehörige Product gleich der Null sei.* Es werde jetzt eine Differenz $a-b$, wo b nicht grösser ist als a, mit einer Differenz $c-d$ multiplicirt, wo d nicht grösser ist als c. Dann folgt aus der obigen Gleichung (2) zunächst die Gleichung

$$(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d).$$

Löst man auf der rechten Seite den Minuend $a(c-d)$ in die Differenz $ac-ad$, und den Subtrahend in die Differenz $bc-bd$ auf, und wendet die vorhin angeführte Regel für *die Subtraction einer Differenz von einer Zahl* an, so kommt die Gleichung

(4) . . . . $(a-b)(c-d) = ac - ad + bd - bc$,

oder, indem man zuerst die Addition und dann die beiden Subtractionen ausführt, die Gleichung

(4*) . . . . $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$.

Die Gleichung (3), welche das Product der Summe $(a+b)$

mit der Summe $(c+d)$ darstellt, zeigt dieselben aus den Elementen a, b, c, d gebildeten Producte ac, bd, ad, bc, welche hier auftreten; in (3) sind die sämmtlichen 4 Producte zu addiren, dagegen erscheinen in (4*) die beiden Producte ac und bd als *additiv*, die beiden Producte ad und bd als *subtractiv*.

Zwischen den Regeln für die Rechnung mit Summen und den Regeln für die Rechnung mit Differenzen tritt demnach eine unverkennbare Analogie hervor, und auf diese Analogie stützt sich *die Einführung der positiven und negativen Grössen.*

Eine Differenz $a-b$ entsteht dadurch, dass von a vorhandenen Einheiten b Einheiten weggenommen werden. Statt dessen kann die Auffassung eintreten, *dass der Werth $a-b$ aus a vorhandenen Einheiten und b wegzunehmenden Einheiten bestehe, oder dass $a-b$ die Summe der positiven Zahl a und der negativen Zahl $-b$ sei.* Bei der positiven Zahl a heisst a, bei der negativen Zahl $-b$ heisst b *der Zahlenwerth. Das Zeichen der positiven Einheit ist* $+1$, *das Zeichen der negativen Einheit* -1. *Die Null erscheint als die Summe einer positiven und negativen Zahl, deren Zahlenwerthe dieselben sind.* Beispiele für *einander entgegengesetzte Einheiten* liefert die Erfahrung in mannigfacher Weise; Gewinn und Verlust werden nach solchen entgegengesetzten Einheiten gemessen.

Die gegebene Definition der positiven und negativen Zahlen genügt, um zu erkennen, *dass bei der Addition der Werthe $a-b$ und $c-d$ die positiven Zahlen a und c zu der positiven Zahl $(a+c)$, die negativen Zahlen $-b$ und $-d$ zu der negativen Zahl $-(b+d)$ zu vereinigen sind, und dass hierauf die Summe*

$$a+c-(b+d)$$

zu nehmen ist. Auf gleiche Weise leuchtet ein, *dass, wenn der Werth $c-d$ von dem Werthe $a-b$ subtrahirt werden soll, die einzelnen Bestandtheile des Subtrahendus in die entgegengesetzten Bestandtheile zu verwandeln und hierauf mit den Bestandtheilen des Minuendus zu vereinigen sind, wodurch der Werth*

$$(a+d)-(b+c)$$

entsteht. Bei beiden Operationen halten wir die Vorstellung fest, dass b nicht grösser als a, und dass d nicht grösser als c sei,

und fügen bei der zweiten Operation auch noch die Voraussetzung hinzu, dass $c-d$ nicht grösser als $a-b$ sei. Die angegebenen Regeln lassen sich durch die angedeuteten Beispiele von entgegengesetzten Einheiten leicht veranschaulichen.

Dieses Hülfsmittel ist aber nicht anwendbar, wenn es darauf ankommt, *die Multiplication der genannten Werthe* $(a-b)$ und $(c-d)$ *auf die Multiplication ihrer Bestandtheile zurückzuführen.* Dass eine solche Zurückführung überhaupt *möglich* ist, entnehmen wir erst aus der vorhin angestellten Vergleichung der Gleichung (3) und der Gleichung (4*).

Da auf der rechten Seite von (4*) nach dem so eben eingeführten Sprachgebrauche die positiven Werthe ac und bd, und die negativen Werthe $-ad$ und $-bc$ vorkommen, so kann man sich des Ausdruckes bedienen, dass der positive Werth ac aus der Multiplication der positiven Zahlen $+a$ und $+c$, der positive Werth bd aus der Multiplication der negativen Zahlen $-b$ und $-d$, der negative Werth $-ad$ aus der Multiplication der positiven Zahl $+a$ und der negativen Zahl $-d$,. der negative Werth $-bc$ aus der Multiplication der negativen Zahl $-b$ und der positiven Zahl $+c$ entstanden sei. *Wenn man also den Werth $a-b$ als die Summe der positiven Zahl $+a$ und der negativen Zahl $-b$, den Werth $c-d$ als die Summe der positiven Zahl $+c$ und der negativen Zahl $-d$ betrachtet, so ergiebt sich das Product der beiden Werthe $a-b$ und $c-d$, indem jeder Bestandtheil der einen Summe mit jedem Bestandtheil der andern multiplicirt wird, und die sämmtlichen Producte addirt werden; die Multiplication der positiven und negativen Zahlen geschieht aber nach der Regel, dass der Zahlenwerth des Products gleich dem Product der Zahlenwerthe der Factoren genommen wird, dass ferner das Product von zwei gleichnamigen Zahlen das positive Vorzeichen, das Product von zwei ungleichnamigen Zahlen das negative Vorzeichen erhält.* Auf diese Weise haben wir für die Multiplication der Werthe $a-b$ und $c-d$ eine Vorschrift erhalten, welche mit der für die Multiplication der Werthe $a+b$ und $c+d$ geltenden, in der Gleichung (3) enthaltenen Vorschrift vollkommen gleich lautet.

Ein neuer Schritt für die Addition einer positiven und einer negativen Zahl wird nothwendig, wenn man den bis jetzt

ausgeschlossenen Fall mitumfassen will, dass bei einer solchen Addition der Zahlenwerth der negativen Zahl grösser sei, als der Zahlenwerth der positiven Zahl. *Wenn von zwei Zahlen g und h die Zahl h die grössere ist, so sagen wir, dass $g-h$ gleich dem negativ genommenen Ueberschuss $h-g$ sei.* Erinnern wir uns nun, dass die Addition einer negativen Zahl auf eine Verminderung der positiven Einheiten, die Subtraction einer negativen Zahl auf eine Vermehrung der positiven Einheiten hinauskommt, so erkennen wir leicht, dass bei den für die Addition und die Subtraction aufgestellten Vorschriften es erlaubt sein muss, statt einer negativen Zahl eine Summe von zwei Zahlen anzuwenden, welche nach der vorstehenden Definition dieser negativen Zahl gleich ist. Das Resultat der Addition von beliebig vielen positiven oder negativen Zahlen wird auch *das Aggregat dieser Zahlen* genannt, und es erweitert sich jetzt der am Schlusse von § 1 ausgesprochene Satz dahin, *dass ein Aggregat von beliebig vielen positiven oder negativen Zahlen immer den gleichen Werth erhält, in welcher Reihenfolge die verschiedenen Additionen vorgenommen werden.* Weder die Addition noch die Subtraction solcher Aggregate ist gegenwärtig irgend einer Einschränkung unterworfen.

Nachdem sich aus der Multiplication von Differenzen, deren Werth positiv oder gleich Null ist, *die Zeichenregel für die Multiplication der positiven und negativen Zahlen* ergeben hat, nachdem ferner Aggregate eingeführt worden sind, deren Werth gleich einer positiven oder negativen Zahl ist, so entsteht auch die Frage nach *der Multiplication solcher Aggregate.* Nun überzeugt man sich zunächst davon, dass die für die Multiplication der Differenzen $(a-b)$ und $(c-d)$ aufgestellte Vorschrift auch dann ein richtiges mit der Zeichenregel übereinstimmendes Resultat liefert, wenn eine dieser Differenzen gleich einer negativen Zahl ist, oder wenn beide Differenzen gleich negativen Zahlen sind. Hieraus folgt aber das Ergebniss, *dass das Gesetz für die Multiplication einer Summe von Zahlen mit einer Zahl, für die Multiplication einer Summe von Zahlen mit einer zweiten Summe von Zahlen, und für die Multiplication mehrerer Summen von Zahlen mit einander, welches gegen Ende des § 3 ausgesprochen ist, seine volle Gültigkeit behält, wofern statt des dort zu Grunde*

liegenden Begriffes der Zahl der Begriff der positiven oder negativen Zahl zugelassen wird.

Nach den gegenwärtigen Erörterungen können *die Grundoperationen des Addirens, des Subtrahirens und des Multiplicirens* auf beliebige *positive und negative Zahlen ohne Einschränkung* angewendet werden, und bringen immer wieder eine positive oder negative Zahl mit Einschluss der Null hervor. Insofern bilden diese Zahlen ein in sich abgeschlossenes Gebiet. Hier gelten die folgenden aus dem Vorstehenden leicht zu begründenden Sätze, *dass ein Product von der Anordnung der Multiplication seiner Factoren unabhängig ist, dass ein Product, unter dessen Factoren sich die Null befindet, nothwendig gleich der Null ist, und dass ein Product von Factoren, von denen keiner gleich Null ist, auch nicht den Werth Null haben kann.*

Capitel II.

Rechnung mit Brüchen.

§ 11. Definition des Theilens oder der Division.

In § 2 ist die Frage besprochen worden, welche sich darauf bezieht, ob eine gegebene (positive) Zahl f ein Vielfaches einer bestimmten Zahl a sei. Es zeigte sich, dass, wenn die Zahl f nicht kleiner ist als die Zahl a ist, die Zahl f als das Aggregat eines Vielfachen von a und einer anderen Zahl dargestellt werden kann, die kleiner ist als a; auf diese Weise entstand die Gleichung

$$f = aq + r,$$

bei der die Zahl f *der Dividendus*, a *der Divisor*, q *der Quotient*, r *der Rest* heisst. Diese Darstellung der Zahl f wird im einzelnen Beispiel durch *das Zahlenverfahren der Division* erhalten; für den Fall, dass der Rest r gleich Null oder f durch a theilbar ist, ist in § 2 der Quotient q durch *das Zeichen der Division*

$$q = \frac{f}{a}$$

ausgedrückt. Mit Rücksicht auf § 3 dürfen wir die berührte Frage auch durch die andere ersetzen, ob eine beliebig gegebene Zahl f gleich einer Summe von a unter einander gleichen Zahlen

sein könne. Wenn man aber die Zahl f gleich der *Einheit* nimmt, so leuchtet es ein, *dass diese niemals gleich der Summe von a gleichen Zahlen sein kann, sobald a nicht selbst gleich der Einheit ist.*

Da also *die Forderung*, die Einheit als eine Summe von a gleichen Zahlen darzustellen, sobald a eine von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet, *unerfüllbar ist*, so kann diese Ferderung nur dann zu einer erfüllbaren werden, wenn man ihre Bedeutung ändert. *Dies geschieht vermöge der Voraussetzung, dass die Einheit gleich der Summe von a einander gleichen neuen Einheiten gesetzt werden dürfe, und diese neue Einheit wird durch das Zeichen*

$$\frac{1}{a}$$

ausgedrückt. Mit Hülfe dieser neuen Einheit kann man dann *jede beliebige Zahl f* als eine Summe von a gleichen Zahlen darstellen; jede dieser Zahlen ist aber gleich der Summe aus f von den neuen Einheiten $\frac{1}{a}$, oder gleich *dem Bruche*

$$\frac{f}{a}.$$

Wenn die Zahl f *grösser ist als die Zahl a*, so nennt man $\frac{f}{a}$ einen *unechten Bruch*, wenn die Zahl f *kleiner ist als die Zahl a* einen *echten Bruch;* wenn $f = a$ ist, so hat der Bruch $\frac{f}{a}$ selbstverständlich den Werth der Einheit. Die so eben erläuterte Operation führt ebenfalls den Namen *der Division*, und zwar heisst bei derselben die Zahl f der *Dividendus* oder der *Zähler*, die Zahl a der *Divisor* oder der *Nenner*, und der Werth $\frac{f}{a}$ der *Quotient*. Der übliche Sprachgebrauch wendet also dieselben Bezeichnungen für zwei verschiedene Gattungen von Begriffen an.

Wenn es befremdlich scheint, dass in Bezug auf die Theilbarkeit der Einheit durch eine gegebene Zahl a eine besondere Voraussetzung in Anspruch genommen ist, so braucht man sich nur daran zu erinnern, dass, wie in § 1 hervorgehoben ist, bei der Operation des Zählens von der Beschaffenheit der gezählten

Dinge abgesehen wird. Wir können nun ebensowohl solche Dinge zählen, bei denen es unzulässig ist, das einzelne Ding als die Verbindung von zwei oder mehreren einander gleichen Dingen zu betrachten, als wir solche Dinge zählen können, bei denen eine Ersetzung der Einheit durch eine Anzahl von neuen Einheiten zulässig ist. Weil uns Beispiele der letzteren Art sehr geläufig sind, deshalb finden wir in der Voraussetzung, dass die Einheit theilbar sei, keine Schwierigkeit. Wer aber in den Fall kommt, einem Kinde die ersten Anfangsgründe des Rechnens mit Brüchen deutlich zu machen, der wird das Vorhandensein dieser Schwierigkeit gewahr werden.

§ 12. Addition, Subtraction, Multiplication und Division von positiven und negativen Brüchen.

Sobald die Anwendung einer bestimmten Zahl a als *Nenner* zugelassen ist, so gelten für die Addition und die Subtraction der Brüche mit diesem Nenner die für die Addition und die Subtraction der Zahlen bestehenden Gesetze. Ist die Zahl a *zusammengesetzt*, das heisst durch ein Product $g.h$ darstellbar, bei dem keine der beiden Zahlen g und h gleich der Einheit ist, so sind die Brüche, deren Nenner die Zahl g bildet, unter den Brüchen mit dem Nenner a enthalten, da $\frac{1}{g} = \frac{h}{gh} = \frac{h}{a}$, mithin auch für jede Zahl f der Bruch $\frac{f}{g} = \frac{fh}{gh} = \frac{fh}{a}$ ist. Offenbar kann hier die Zahl g *jedem Divisor* der Zahl a gleich werden. Die Addition und die Subtraction von zwei Brüchen *mit verschiedenen Nennern* $\frac{f}{m}$ und $\frac{f_1}{m_1}$ setzt voraus, dass es erlaubt sei, *das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen m und m_1*, dessen Aufsuchung in § 8 erwähnt ist, als Nenner anzuwenden. Es soll aber von nun an angenommen werden, dass *jede von der Null verschiedene Zahl* als Nenner gebraucht werden darf; dann lassen sich die gegebenen beiden Brüche $\frac{f}{m}$ und $\frac{f_1}{m_1}$ durch andere Brüche ersetzen, deren Nenner *das Product der beiden Nenner $m\,m_1$* ist und man kann *die Addition und Subtraction* unbeschränkt ausführen. Demgemäss gelten die Gleichungen

$$\frac{f}{m}+\frac{f_1}{m_1}=\frac{fm_1+f_1m}{mm_1},$$
$$\frac{f}{m}-\frac{f_1}{m_1}=\frac{fm_1-f_1m}{mm_1}.$$

Nach der ersten Gleichung *ist eine Summe von zwei Brüchen von der Anordnung der Summanden unabhängig, und gilt für eine Summe von mehreren Brüchen der entsprechende Satz.* Bei der zweiten Gleichung denken wir uns, dass der Bruch $\frac{f_1}{m_1}$ *nicht grösser* sei, als der Bruch $\frac{f}{m}$. Der Bruch $\frac{f}{m}$ ist *grösser* als der Bruch $\frac{f_1}{m_1}$, wenn die Zahl fm_1 grösser ist als die Zahl f_1m; die beiden Brüche sind einander *gleich* und die Differenz $\frac{f}{m}-\frac{f_1}{m_1}$ ist *gleich Null,* wenn $fm_1=f_1m$ ist. *Das Product eines Bruches* $\frac{f}{m}$ *mit einer Zahl* f_1 ist nach Anwendung der in § 2 gegebenen Definition die Summe von f_1 Brüchen, deren jeder gleich $\frac{f}{m}$ ist, folglich gleich dem Bruche $\frac{ff_1}{m}$. *Die Multiplication eines Bruches* $\frac{f}{m}$ *mit einem anderen Bruche* $\frac{f_1}{m_1}$ bedarf dagegen *einer neuen Definition.* Diese Definition muss aber die Bedingung erfüllen, dass sie, wofern der Bruch $\frac{f_1}{m_1}$ einer Zahl gleich wird, mit der auf diesen Fall bezüglichen Festsetzung in Einklange sei. Die allgemein eingeführte Definition, *bei welcher für keinen der beiden Brüche der Werth Null ausgeschlossen ist,* lautet

$$\frac{f}{m}\cdot\frac{f_1}{m_1}=\frac{ff_1}{mm_1},$$

und ergiebt vermöge der Ausführungen des § 3 die Consequenz, *dass ein Product von mehreren Brüchen von der Anordnung der Multiplication seiner Factoren unabhängig ist.*

Da ferner ein Bruch nur dann gleich Null ist, wenn sein Zähler gleich Null ist, so *wird ein Product von Brüchen dann und nur dann gleich Null, wenn einer der Factoren gleich Null ist.*

Aus der aufgestellten Definition für die Multiplication von

Brüchen, folgt eine Definition der Division. *Einen Bruch* $\frac{f}{m}$ *durch einen Bruch* $\frac{f_1}{m_1}$ *dividiren, heisst einen Bruch aufsuchen, der mit dem Bruche* $\frac{f_1}{m_1}$ *multiplicirt den Bruch* $\frac{f}{m}$ *ergiebt. Diese Aufgabe ist für jeden Werth des Bruches* $\frac{f}{m}$ *mit Einschluss des Werthes Null möglich, wofern nur der Bruch* $\frac{f_1}{m_1}$ *einen von Null verschiedenen Werth hat, und zwar wird diese Aufgabe durch den Bruch*

$$\frac{f m_1}{m f_1}$$

und nur durch diesen Bruch gelöst.

Dass es ausser diesem Bruche, der die Forderung offenbar erfüllt, keinen zweiten von demselben verschiedenen geben kann, folgt daraus, dass sonst die Differenz der betreffenden beiden Brüche, mit dem Bruche $\frac{f}{m}$ multiplicirt, gleich der Null sein müsste. Da nun nach der Voraussetzung $\frac{f}{m}$ nicht gleich Null ist, ein Product von zwei Brüchen jedoch, wie hervorgehoben ist, nicht gleich Null sein kann, wenn nicht einer der beiden Factoren gleich Null ist, so würde die Annahme von zwei verschiedenen die Forderung erfüllenden Brüchen einen Widerspruch nach sich ziehen.

Der Grund, weshalb für den Bruch $\frac{f_1}{m_1}$, der die Rolle des Divisors übernimmt, der Werth Null ausgeschlossen werden muss, ist hiemit schon angedeutet. Gesetzt, es wäre $\frac{f_1}{m_1}$ gleich Null. Wenn dann für den Bruch $\frac{f}{m}$, welcher den Dividendus darstellt, ein von Null verschiedener Werth gegeben ist, so kann kein Bruch existiren, der mit $\frac{f_1}{m_1}$ multiplicirt, gleich $\frac{f}{m}$ würde, weil nach dem Obigen jedes Product von Brüchen, bei dem einer der Factoren gleich Null ist, den Werth Null annehmen muss. Sobald aber für den Bruch $\frac{f}{m}$ ebenfalls der Werth Null gegeben

ist, so hat *jeder Bruch* die Eigenschaft, mit $\frac{f_1}{m_1}$ multiplicirt gleich $\frac{f}{m}$ zu werden. Die gestellte Forderung würde also im ersten Falle *gar keine Antwort*, im zweiten Falle *keine bestimmte Antwort* erlauben.

Nachdem die Definitionen entwickelt sind, auf denen das Addiren, Subtrahiren und Multipliciren der Brüche beruht, ist es leicht sich zu überzeugen, dass das Product aus zwei Summen von Brüchen, und das Product aus zwei Differenzen von Brüchen, bei denen immer der Subtrahendus nicht grösser ist als der Minuendus, nach den entsprechenden Regeln erfolgt. wie für die *ganzen Zahlen.* Ferner ruft die Rechnung mit Differenzen in derselben Weise, die wir bei den ganzen Zahlen erörtert haben, die Einführung von *positiven* und *negativen Brüchen* hervor, und wir gelangen zu der *Zeichenregel für die Multiplication solcher Brüche.* Dieser Erweiterung des Begriffes der Multiplication entspricht eine Erweiterung des Begriffes der Division. Der Quotient von zwei Brüchen, *bei denen der Divisorbruch von Null verschieden ist*, erhält hiebei *einen und nur einen völlig bestimmten Werth.* Somit wird es klar, dass man aus *positiven und negativen Brüchen* durch eine in beliebiger Weise wiederholte Anwendung der *vier Species, Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren* immer wieder positive oder negative Brüche erhält. Die Anwendung von den *drei ersten* dieser Rechnungsoperationen ist *ausnahmslos* gestattet, dagegen gilt für die Anwendung *der Division die nothwendige Bedingung, dass der Divisor nicht gleich Null sein darf.*

Capitel III.

Rechnung mit Potenzen von ganzen und gebrochenen Exponenten. Rechnung mit rationalen und irrationalen Grössen.

§ 13. Potenzen eines gegebenen Bruches.

Es ist schon bei Gelegenheit der positiven ganzen Zahlen von den Producten aus lauter gleichen Factoren oder den *Potenzen* gesprochen worden. Ein Product aus lauter gleichen Factoren heisst, abgesehen davon, dass die Basis eine ganze

Zahl ist, eine Potenz. Die Regeln für die Multiplication und die Division von Potenzen, deren Basis ein positiver oder negativer Bruch ist, und deren Exponenten beliebige positive ganze Zahlen sind, werden in § 19 zur Sprache kommen. Wir knüpfen hier an die Bemerkung an, dass eine positive Basis nur positive Werthe der Potenz hervorbringen kann. *Wenn daher ein positiver Bruch oder eine positive ganze Zahl gegeben ist, so lässt sich die Frage aufwerfen, ob es möglich sei, einen positiven Bruch zu finden, welcher, auf eine bestimmte Potenz erhoben, gleich dem gegebenen Werthe wird.*

Der gegebene Werth sei mit $\frac{G}{H}$ bezeichnet, und es darf angenommen werden, dass die ganzen Zahlen, welche den Zähler und den Nenner bilden, falls sie ursprünglich einen gemeinsamen Theiler haben sollten, durch das in § 5 auseinander gesetzte Verfahren von demselben befreit seien, so dass *die Zahlen G und H keinen gemeinsamen Theiler aufweisen.* Der Werth $\frac{G}{H}$ stellt alsdann für den Fall eine ganze Zahl dar, dass der Nenner H gleich der Einheit ist. Der vorgeschriebene *Potenzexponent* heisse n. Dass es nun keinenfalls möglich ist, auf die gestellte Frage *mehr als eine Antwort* zu geben, erkennt man leicht. Denn gesetzt, dass zwei *von einander verschiedene* positive Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p_1}{q_1}$ die Forderung erfüllten, so müsste einer derselben *grösser* sein, als der andere, und der grössere sei der Bruch $\frac{p_1}{q_1}$. Dann besteht die Gleichung

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p}{q} + \delta,$$

wo δ den positiven Werth $\frac{p_1 q - p q_1}{q_1 q}$ hat. Bildet man jetzt von den beiden Seiten der Gleichung successive die 2te Potenz, die 3te Potenz, und alle folgenden Potenzen bis zu der vorgeschriebenen $n$ten Potenz *nach den für die Multiplication einer Summe mit einer zweiten Summe geltenden Regeln,* so folgt, dass $\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2$ um eine Summe von positiven Gliedern grösser ist als $\left(\frac{p}{q}\right)^2$,

ebenso $\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^3$ grösser als $\left(\frac{p}{q}\right)^3$, und auch schliesslich $\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n$ grösser als $\left(\frac{p}{q}\right)^n$. Es kann daher unmöglich, wie angenommen worden, sowohl

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{G}{H},$$

wie auch

$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n = \frac{G}{H}$$

sein.

Falls ein Bruch $\frac{p}{q}$ existirt, welcher die gestellte Aufgabe löst, so kann von diesem ebenfalls vorausgesetzt werden, *dass sein Zähler p und sein Nenner q keinen gemeinsamen Theiler haben* oder, dass der Bruch auf seine *kleinste Benennung* gebracht ist. Hieraus ergiebt sich aber nach dem Satze (4) des § 6, *dass auch die Potenzen p^n und q^n keinen gemeinsamen Theiler haben können.* Die zu erfüllende Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{G}{H}$$

kann nun die Gestalt annehmen

$$p^n H = q^n G.$$

Vermöge dessen geht das Product $p^n H$ durch die Zahl G auf; weil jedoch G und H relative Primzahlen sind, so muss nach dem Corollar zu dem Satze (1) des § 6 der Factor p^n durch die Zahl G aufgehen. In gleicher Weise geht das Product $q^n G$ durch die Zahl p^n auf, und weil die Zahlen p^n und q^n relative Primzahlen sind, so muss aus dem gleichen Grunde der Factor G durch die Zahl q^n aufgehen. Da aber zwei Zahlen nicht wechselweise in einander aufgehen können, ohne einander gleich zu sein, so muss nothwendig

$$G = p^n$$

und daher auch gleichzeitig

$$H = q^n$$

sein. Auf diese Weise erhalten wir *die folgende Entscheidung über die Möglichkeit der aufgeworfenen Frage*

Ein positiver Bruch $\frac{G}{H}$, *dessen Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ist dann und nur dann gleich der nten Potenz eines positiven Bruches, wenn sowohl der Zähler* G *als auch der Nenner* H *gleich der nten Potenz einer ganzen Zahl ist.*

Für den Fall, dass die Zahl H gleich der Einheit ist, entsteht demnach der Satz

Eine positive ganze Zahl G *kann nur gleich der nten Potenz einer ganzen Zahl, und nie gleich der nten Potenz eines Bruches sein, der, auf seine kleinste Benennung gebracht, einen von der Einheit verschiedenen Nenner behält.*

Die Beurtheilung, ob ein numerisch gegebener Werth $\frac{G}{H}$ gleich der $n$ten Potenz eines Bruches sein könne, ist also darauf zurückgeführt, zu ermitteln, ob die Zahl G und die Zahl H $n$te Potenzen von ganzen Zahlen sind. Diese Hülfsaufgabe läuft aber darauf hinaus, die $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen der Reihe nach zu bilden, und soweit fortzusetzen, bis entweder die gesuchten Werthe G und H erschienen sind, oder bis man zu $n$ten Potenzen gekommen ist, welche beziehungsweise grösser sind als die betreffenden Werthe. In dem letzteren Falle ist die Unmöglichkeit der Lösung festgestellt. Die Hülfsaufgabe wird also durch die Ausführung einer beschränkten Anzahl von Versuchen erledigt und ist somit als gelöst anzusehen.

§ 14. Definition der positiven Wurzel des $n$ten Grades aus einem gegebenen positiven Bruche.

Die in dem vorigen Paragraphen erörterte Aufgabe entsteht aus der Aufgabe des *Erhebens auf die nte Potenz* durch Umkehrung, und heisst *das Ausziehen der Wurzel des nten Grades oder der nten Wurzel.* Es hat sich nun gezeigt, dass nach den bis jetzt aufgestellten Definitionen die Aufgabe, *einen gegebenen positiven Bruch* $\frac{p}{q}$ *auf die nte Potenz zu erheben*, immer möglich, dagegen *die umgekehrte Aufgabe*, zu einem gegebenen auf die kleinste Benennung gebrachten positiven Bruche $\frac{G}{H}$ eine *positive*

nte Wurzel, das ist einen positiven Bruch zu bestimmen, der auf die *n*te Potenz erhoben gleich $\frac{G}{H}$ wird, dann und nur dann möglich ist, wenn bei dem Bruche $\frac{G}{H}$ sowohl der Zähler wie der Nenner die *n*te Potenz einer ganzen Zahl ist. Diejenigen Brüche $\frac{G}{H}$, welche die bezeichnete Bedingung nicht erfüllen, bilden also für die Ausziehung der *n*ten Wurzel *Ausnahmen*. Das Streben, die vorhandenen Ausnahmen verschwinden zu lassen, hat dazu geführt, die gestellte Forderung durch eine andere zu ersetzen.

Es sei $\frac{G}{H}$ ein Bruch, der die bezeichnete Bedingung *nicht* erfüllt. Man wähle alsdann eine beliebige Zahl σ, bilde der Reihe nach alle diejenigen positiven Brüche, welche diese Zahl σ zum Nenner haben, und erhebe dieselben auf die *n*te Potenz. Wie schon im vorigen § bemerkt worden, liefert von zwei positiven echten Brüchen der grössere Bruch auch die grössere *n*te Potenz. Aus diesem Grunde wird in der bezeichneten Folge von Brüchen

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n, \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n, \left(\frac{3}{\sigma}\right)^n, \ldots$$

jeder Bruch von dem nachfolgenden übertroffen, und der Werth der Brüche überschreitet nach und nach jede gegebene Zahl. Wenn man jetzt die betreffenden Werthe mit dem gegebenen Bruche $\frac{G}{H}$ vergleicht, so kann nach der gemachten Annahme überhaupt keine *n*te Potenz eines Bruches demselben gleich werden, also auch keine der hier vorliegenden *n*ten Potenzen. Daher muss $\frac{G}{H}$ zwischen zwei bestimmten aufeinander folgenden *n*ten Potenzen enthalten sein, welche wir beziehungsweise mit $\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^n$ und $\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}\right)^n$ bezeichnen wollen. Sobald also die Forderung ausgesprochen wird, *aus der Folge der Brüche* $\frac{1}{\sigma}, \frac{2}{\sigma}, \frac{3}{\sigma}, \ldots$ *diejenigen zu bezeichnen, deren nte Potenzen dem Werthe* $\frac{G}{H}$ *am*

nächsten kommen, so wird dieselbe durch die beiden Brüche $\frac{\varrho}{\sigma}$ und $\frac{\varrho+1}{\sigma}$ erfüllt. Die hier benutzte Schlussweise stimmt übrigens vollständig mit derjenigen überein, auf welche wir in § 2 die Bestimmung des Divisionsrestes gegründet haben.

Man kann nun zu der Anwendung einer neuen Zahl σ' übergehen, welche grösser ist, als die Zahl σ, hierauf mit der Zahl σ' als Nenner alle Brüche aufstellen, welche zwischen den beiden Brüchen $\frac{\varrho}{\sigma}$ und $\frac{\varrho+1}{\sigma}$ gelegen sind, und von diesen die *n*ten Potenzen nehmen. Dann bilden die Potenzen

$$\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^n, \left(\frac{\lambda}{\sigma'}\right)^n, \left(\frac{\lambda+1}{\sigma'}\right)^n, \ldots \left(\frac{\mu}{\sigma'}\right)^n, \left(\frac{\varrho+1}{\sigma}\right)^n$$

eine wachsende Reihe von Werthen. Hier muss $\frac{G}{H}$ wieder zwischen zwei auf einander folgende Potenzen fallen; entweder zwischen die beiden ersten $\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^n$ und $\left(\frac{\lambda}{\sigma'}\right)^n$, wo $\frac{\varrho}{\sigma}$ grösser oder gleich $\frac{\lambda-1}{\sigma'}$ ist, oder zwischen zwei mittlere $\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)^n$ und $\left(\frac{\varrho'+1}{\sigma'}\right)^n$, oder zwischen die beiden letzten $\left(\frac{\mu}{\sigma'}\right)^n$ und $\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}\right)^n$, wo $\left(\frac{\mu+1}{\sigma'}\right)$ grösser oder gleich $\frac{\varrho+1}{\sigma}$ ist. Man erkennt leicht, dass dieses Verfahren eine unbeschränkte Wiederholung erlaubt, bei welcher nach und nach zu Nennern $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ von beliebig wachsender Grösse fortgeschritten werden kann. Die beiden Brüche $\frac{\varrho}{\sigma} = \alpha$ und $\frac{\varrho+1}{\sigma} = \beta$, durch deren *n*te Potenzen der Werth $\frac{G}{H}$ bei der ersten Operation eingeschlossen wird, haben den Unterschied $\frac{1}{\sigma}$. Die beiden Brüche, durch deren *n*te Potenzen der Werth $\frac{G}{H}$ bei der zweiten Operation eingeschlossen wird, von denen der kleinere α', der grössere β' genannt werden möge, haben einen Unterschied, der gleich oder kleiner ist als $\frac{1}{\sigma'}$, und man sieht, dass α' grösser oder mindestens gleich α, und dass β' kleiner oder

höchstens gleich β ist. Ueberhaupt möge vermittelst der $(p+1)$ten Operation der Werth $\frac{G}{H}$ durch $\left(\alpha^{(p)}\right)^n$ und $\left(\beta^{(p)}\right)^n$ eingeschlossen sein, wo $\beta^{(p)} - \alpha^{(p)}$ gleich oder kleiner als $\frac{1}{\sigma^{(p)}}$, ferner $\alpha^{(p)}$ grösser oder mindestens gleich $\alpha^{(p-1)}$ und $\beta^{(p)}$ kleiner oder höchstens gleich $\beta^{(p-1)}$ ist.

Schreibt man demnach die successive bestimmten beiden Reihen von Brüchen in der folgenden Weise hin

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(p-1)}, \alpha^{(p)}, \ldots$$
$$\beta, \beta', \beta'', \ldots \beta^{(p-1)}, \beta^{(p)}, \ldots,$$

so folgt in der ersten Reihe auf jeden Bruch ein anderer, der grösser als sein Vorgänger oder ihm gleich ist, und in der zweiten Reihe auf jeden Bruch ein anderer, der kleiner als sein Vorgänger oder demselben gleich ist, und zugleich wird bei zwei übereinander stehenden Brüchen der Ueberschuss des unteren über den oberen nach und nach beziehungsweise gleich oder kleiner als $\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma'}, \frac{1}{\sigma''}, \ldots$ Da man es nun in seiner Gewalt hat, die Zahlen $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ *beliebig gross* zu wählen, so kann man die Werthe $\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma'}, \frac{1}{\sigma''}, \ldots$ *beliebig klein* machen, und hiedurch bewirken, *dass jener Ueberschuss kleiner wird als ein beliebig kleiner gegebener Werth.*

Wegen der so ungemein weit ausgedehnten Anwendung der Begriffe, welche hier zum ersten Male auftreten, werde ich mich an einem Beispiele erklären. Es sei der gegebene Bruch $\frac{G}{H}$ gleich der Zahl 7, die Zahl n habe den Werth 2. Weil die Zahl 7 nicht gleich der zweiten Potenz einer ganzen Zahl ist, so wissen wir auf Grund des vorhergehenden §, dass es keinen Bruch gibt, dessen zweite Potenz der Zahl 7 gleich ist. Bei der ersten Anwendung des so eben beschriebenen Verfahrens sei die Zahl σ gleich der Einheit, dann fällt die bezügliche Reihe von Brüchen mit der Reihe der Zahlen zusammen, und die Zahlen, deren Quadrate der Zahl 7 am nächsten kommen, sind die Zahlen $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Bei der zweiten Anwendung desselben Verfahrens sei die Zahl $\sigma' = 10$; dann ergiebt sich

$$\alpha' = \frac{26}{10}, \quad \beta' = \frac{27}{10}.$$

Bei der dritten Anwendung sei $\sigma'' = 100$, bei der vierten $\sigma''' = 1000$; alsdann kommt

$$\alpha'' = \frac{264}{100}, \quad \beta'' = \frac{265}{100},$$

$$\alpha''' = \frac{2645}{1000}, \quad \beta''' = \frac{2646}{1000}.$$

Die Aufstellung der beiden Reihen von Brüchen wird somit die folgende

$$2, \frac{26}{10}, \frac{264}{100}, \frac{2645}{1000}, \ldots$$

$$3, \frac{27}{10}, \frac{265}{100}, \frac{2646}{1000}, \ldots$$

wo die oberen Brüche wachsend und die unteren Brüche abnehmend geordnet sind, und wo jeder untere Bruch den über ihm stehenden beziehungsweise um die Einheit, um $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ übertrifft. Für die Voraussetzung, dass die Zahlen $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ mit der Einheit beginnend die aufeinanderfolgenden Potenzen der Zahl 10 bedeuten, wird niemand bezweifeln, dass, wenn mir durch eine andere Person nach Willkür irgend ein noch so kleiner Werth gegeben wird, von meiner Seite immer eine hinreichend hohe Potenz der Zahl 10 gefunden werden kann, welche in die Einheit dividirt, unter den gegebenen kleinen Werth herabgeht.

Wie in dem ausgeführten Beispiel zeigen auch in der vorhergehenden allgemeinen Erörterung die beiden Folgen von Brüchen

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(p-1)}, \alpha^{(p)}, \ldots$$

und

$$\beta, \beta', \beta'', \ldots \beta^{(p-1)}, \beta^{(p)}, \ldots$$

ein solches Verhalten, dass die Individuen der einen Folge sich den Individuen der anderen Folge immer mehr nähern, und zwar in einer solchen Weise, dass der Unterschied $\beta^{(p)} - \alpha^{(p)}$ kleiner gemacht werden kann, als ein beliebig kleiner gegebener Werth. Gleichzeitig ist immer $\left(\alpha^{(p)}\right)^n$ kleiner, und $\left(\beta^{(p)}\right)^n$ grösser als der Werth $\left(\frac{G}{H}\right)$. *Dieses Sachverhältniss wird*

durch den Ausdruck bezeichnet, dass die in den beiden Folgen enthaltenen Brüche sich einer und derselben Grenze nähern, und dass diese Grenze eine positive nte Wurzel aus dem Bruche $\frac{G}{H}$ *sei.*

Offenbar sind die Brüche $\alpha, \alpha', \alpha'', ..$ des numerischen Beispiels diejenigen Werthe, welche das bekannte Verfahren für die Entwickelung der zweiten Wurzel aus der Zahl 7 in einen Decimalbruch ergiebt; dagegen entstehen die Brüche $\beta, \beta', \beta'', ...$ dadurch, dass die jedes Mal zuletzt bestimmte Decimalziffer um Eins vergrössert wird. Meistens wird nur von der ersten Folge von Brüchen gesprochen, und der Ausdruck gebraucht, *dass diese Brüche sich der zweiten Wurzel aus 7 immer mehr nähern.* Bei der allgemeinen Erörterung ist es ebenfalls zulässig, entweder die Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', ..$ für sich allein, oder die Reihe $\beta, \beta', \beta'', ..$ für sich allein zu betrachten. Versteht man unter p eine beliebig gewählte, unter $p+s$ irgend eine über p liegende Zahl, so folgt aus der Art, wie die Brüche der ersten Reihe wachsen und die Brüche der zweiten Reihe abnehmen, dass immer

$$\alpha^{(p+s)} - \alpha^{(p)} \text{ kleiner als } \beta^{(p)} - \alpha^{(p)},$$

und

$$\beta^{(p)} - \beta^{(p+s)} \text{ kleiner als } \beta^{(p)} - \alpha^{(p)}$$

bleiben muss. Weil nun die Differenz $\beta^{(p)} - \alpha^{(p)}$ nach dem Früheren kleiner gemacht werden kann, als ein beliebig kleiner gegebener Werth, so sehen wir, dass alsdann der Unterschied $\alpha^{(p+s)} - \alpha^{(p)}$ zwischen dem Bruche $\alpha^{(p)}$ und einem beliebig weit abstehenden Individuum $\alpha^{(p+s)}$ derselben ersten Reihe unter demselben kleinen Werthe bleibt, und dass ebenso der Unterschied $\beta^{(p)} - \beta^{(p+s)}$ zwischen dem Bruche $\beta^{(p)}$ und einem beliebig weit abstehenden Individuum $\beta^{(p+s)}$ derselben zweiten Reihe unter demselben kleinen Werthe bleibt. Mit Rücksicht hierauf sagt man, *dass die Brüche $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ der ersten Reihe sich einer Grenze nähern, dass auch die Brüche $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ der zweiten Reihe sich einer Grenze nähern, und dass die Grenze für beide Folgen dieselbe positive nte Wurzel aus dem Bruche* $\frac{G}{H}$ *sei.*

Die Betrachtung solcher Folgen von Brüchen die sich einer Grenze nähern, verdanken wir den *Griechen.* Sie haben

die einer solchen Folge von Brüchen zugehörige Grenze zu einem selbstständigen Begriff erhoben, und erkannt, wie die Operationen der *Addition*, *Subtraction*, *Multiplication* und *Division* auf diese Begriffe auszudehnen seien.

§ 15. Folge von Brüchen, die sich einem Grenzwerthe nähern.

Nachdem in dem vorigen § eine positive $n$te Wurzel aus einem gegebenen positiven Bruche als Grenzwerth einer Folge von Brüchen definirt worden ist, so kommt es darauf an, die Regeln für die Rechnung mit solchen Wurzeln aufzustellen. Da aber diese Rechnung und die Rechnung mit den Grenzwerthen von irgendwie gebildeten Folgen bestimmter Brüche auf denselben Principien beruht, so ist es zweckmässig, die betreffenden Principien sogleich in vollständiger Allgemeinheit zu entwickeln. Hiebei wird sich häufige Veranlassung bieten, positive und negative Werthe ihrer Grösse nach zu vergleichen, und zwar soll in Zukunft immer ein Bruch w grösser, gleich oder kleiner als ein Bruch w_1 genannt werden, je nachdem die Differenz $w - w_1$ einen positiven Werth, den Werth Null oder einen negativen Werth hat; wofern aber die Zahlenwerthe zu vergleichen sind, wird dies ausdrücklich erwähnt werden.

Es sei also eine Reihe von Brüchen

(1) $$\gamma', \gamma'', \gamma''', \cdots$$

gegeben, welche durch die Anwendung bestimmter Vorschriften unbeschränkt fortgesetzt werden kann, und so beschaffen ist, dass ihre Individuen einen bestimmten Werth numerisch niemals überschreiten und dass sich immer für einen beliebig gegebenen kleinen Zahlenwerth ω ein Bruch $\gamma^{(p)}$ bezeichnen lässt, dessen mit *irgend einem späteren Bruche der Reihe* $\gamma^{(p+s)}$ genommener Unterschied $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$ numerisch unter dem Werthe ω liegt. Alsdann ist der Unterschied zwischen irgend zwei späteren Brüchen numerisch kleiner als 2ω. Wie bei dem Beispiele des vorigen § kann man sich vortellen, dass eine bestimmte Person stets, sobald eine zweite Person den kleinen Zahlenwerth ω vorgeschrieben hat, den Zeiger p des Bruches $\gamma^{(p)}$ nennt, und, sobald die zweite Person einen kleineren Zahlenwerth ω' vorschreibt, einen entsprechenden, nöthigenfalls grösseren Zeiger p' angiebt.

Es sei neben der Reihe (1) eine zweite Reihe von Brüchen

(2) $$\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$$

gegeben, welche den gleichlautenden Forderungen genügt. Dann sagen wir, *dass die Brüche der ersten Reihe sich einem bestimmten Grenzwerthe nähern*, und *dass die Brüche der zweiten Reihe sich gleichfalls einem bestimmten Grenzwerthe nähern.* Auf diese beiden Grenzwerthe sollen die Grundoperationen der Rechnung angewendet werden.

Die Beschaffenheit der so eben characterisirten Reihen von Brüchen ist in mehrfacher Hinsicht allgemeiner, als die Beschaffenheit der im vorigen § besprochenen Reihen. Die einzelnen Brüche mussten dort positiv sein, dürfen dagegen hier positiv oder negativ sein. Ein anderer Umstand, welcher erwogen werden muss, ist der, *dass unter gewissen Verhältnissen die einzelnen Brüche einer solchen Reihe Werthe haben können, die nach und nach numerisch unter jeden noch so kleinen gegebenen Werth herabsinken.* Die im vorigen § erörterten Reihen, welche zu der Definition der positiven $n$ten Wurzel aus einem gegebenen positiven Bruche dienen, liefern hiefür kein Beispiel. Man erhält jedoch ein solches dadurch, dass man die Einheit durch die aufeinanderfolgenden Potenzen derselben positiv oder negativ genommenen über der Einheit liegenden Zahl k dividirt

(3) $$\pm\frac{1}{k}, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \pm\frac{1}{k^3}, \ldots$$

Denn da die Potenzen der Zahl k allmälig jeden noch so grossen gegebenen Werth überschreiten, so müssen diese Potenzen, in die Einheit dividirt, allmälig Brüche erzeugen, welche kleiner werden als jeder noch so kleine gegebene Werth. *Für eine Reihe von Brüchen, die nach und nach numerisch unter jeden noch so kleinen gegebenen Werth herabsinken, gilt nun die Aussage, dass sich ihre Brüche der Null als Grenzwerth nähern.* Bei der anzustellenden Betrachtung wird das Eintreten dieses Falles immer besonders zu berücksichtigen sein.

Wenn die einzelnen Brüche einer Reihe (1) die Eigenschaft haben, *bei unbeschränkter Fortsetzung numerisch unter einen gewissen von der Null verschiedenen Zahlenwerth N nicht herabzugehen,* so folgt aus der Voraussetzung, dass die Differenz

$\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$ für eine bestimmte Zahl p und eine beliebige Zahl s numerisch kleiner gemacht werden kann, als ein noch so kleiner Werth ω, mit Nothwendigkeit, dass die einzelnen Brüche der Reihe *von einer bestimmten Stelle ab* entweder *alle positiv*, oder *alle negativ* sein müssen. Denn wenn zwei Brüche $\gamma^{(p)}$ und $\gamma^{(p+s)}$ verschiedene Vorzeichen haben und beide numerisch nicht kleiner sind als ein Zahlenwerth N, so kann ihre Differenz $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$ numerisch nicht kleiner sein als der Zahlenwerth $2N$. Das muss aber geschehen, wofern der Werth ω, unter den die Differenz $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$ herabgedrückt worden ist, kleiner gewählt wird, als der Zahlenwerth $2N$. Also haben dann $\gamma^{(p)}$ und $\gamma^{(p+s)}$ für *jedes s* dasselbe Vorzeichen. Bei der ersten Voraussetzung, dass alle Brüche der Reihe von einer bestimmten Stelle ab *positiv* sind, sagt man, dass *ein positiver Grenzwerth*, bei der zweiten Voraussetzung, dass alle Brüche von einer bestimmten Stelle ab *negativ* sind, sagt man, dass *ein negativer Grenzwerth* vorhanden sei. In diesem Sinne ist auch der Ausdruck gebraucht worden, dass der Grenzwerth der Brüche, aus denen die Reihen des vorigen § bestehen, die *positive nte Wurzel aus dem Bruche* $\frac{G}{H}$ sei. Eine Reihe von Brüchen, die sich der *Null* als Grenzwerth nähern, kann dagegen, von einer bestimmten Stelle ab, entweder aus *lauter positiven Individuen*, oder aus *lauter negativen Individuen*, oder aus *positiven und negativen Individuen bestehen, die ohne Ende abwechseln.* Die Reihe (3) bietet ein Beispiel der ersten Art, wenn man k etwa gleich 2 setzt und positiv nimmt, nämlich

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots;$$

es entsteht ein Beispiel der zweiten Art, wenn man alle Brüche der vorstehenden Reihe negativ nimmt, nämlich

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots,$$

und endlich ein Beispiel der dritten Art, wenn man k in der Reihe (3) gleich 2 setzt und negativ nimmt, nämlich

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots.$$

§. 16. Ausdehnung der Addition, Subtraction, Multiplication und Division auf Grenzwerthe.

Die Anwendung der Rechnungsoperationen auf die Grenzwerthe, denen sich die Brüche der Reihen (1) und (2) des vorigen § nähern, ergiebt sich, indem man die Brüche, welche in beiden Reihen die gleiche Stelle einnehmen, durch die bezüglichen Rechnungsoperationen verbindet, und jede auf diese Weise entstehende neue Reihe von Brüchen untersucht. Die *Addition* der gleichstelligen Brüche erzeugt die Reihe

(1) $\gamma' + \varepsilon', \; \gamma'' + \varepsilon'', \ldots \gamma^{(p)} + \varepsilon^{(p)}, \ldots \gamma^{(p+s)} + \varepsilon^{(p+s)}, \ldots$

die *Subtraction* eines Bruches der zweiten Reihe von dem gleichstelligen Bruche der ersten Reihe erzeugt die Reihe

(2) $\gamma' - \varepsilon', \; \gamma'' - \varepsilon'', \ldots \gamma^{(p)} - \varepsilon^{(p)}, \ldots \gamma^{(p+s)} - \varepsilon^{(p+s)}, \ldots$

die *Multiplication* der gleichstelligen Brüche erzeugt die Reihe

(3) $\gamma' \varepsilon', \; \gamma'' \varepsilon'', \ldots \gamma^{(p)} \varepsilon^{(p)}, \ldots \gamma^{(p+s)} \varepsilon^{(p+s)}, \ldots$

die *Division* eines Bruches der ersten Reihe durch den gleichstelligen Bruch der zweiten Reihe erzeugt die Reihe

(4) $$\frac{\gamma'}{\varepsilon'}, \; \frac{\gamma''}{\varepsilon''}, \ldots \frac{\gamma^{(p)}}{\varepsilon^{(p)}}, \ldots \frac{\gamma^{(p+s)}}{\varepsilon^{(p+s)}}, \ldots$$

Aus den angeführten Voraussetzungen lässt sich schliessen, dass die Brüche von jeder der neuen Reihen (1), (2), (3) sich *unter allen Umständen* einem bestimmten Grenzwerthe nähern. Immer kann für einen beliebig kleinen gegebenen Werth ω die Zahl p so gross gewählt werden, dass bei jedem positiven Werthe der Zahl s sowohl die Differenz $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$ wie auch die Differenz $\varepsilon^{(p)} - \varepsilon^{(p+s)}$ numerisch unter ω bleibt; mithin hat die Differenz der entsprechenden Brüche aus der neuen Reihe (1), nämlich

(5) $$\gamma^{(p)} + \varepsilon^{(p)} - \left(\gamma^{(p+s)} + \varepsilon^{(p+s)}\right)$$

und die Differenz der entsprechenden Brüche aus der neuen Reihe (2), nämlich

(6) $$\gamma^{(p)} - \varepsilon^{(p)} - \left(\gamma^{(p+s)} - \varepsilon^{(p+s)}\right)$$

die Eigenschaft, numerisch unter dem Werthe 2ω zu bleiben. Was ferner die Differenz der entsprechenden Brüche aus der neuen Reihe (3) anlangt, so kann man derselben die Gestalt geben

$$(7)\qquad \gamma^{(p)}\varepsilon^{(p)} - \gamma^{(p+s)}\varepsilon^{(p+s)} = \gamma^{(p)}\left(\varepsilon^{(p)} - \varepsilon^{(p+s)}\right) + \varepsilon^{(p)}\left(\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}\right) - \left(\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}\right)\left(\varepsilon^{(p)} - \varepsilon^{(p+s)}\right).$$

Weil nun alle Brüche $\gamma^{(p)}$ einen bestimmten Werth Γ und desgleichen alle Brüche $\varepsilon^{(p)}$ einen bestimmten Werth E numerisch nicht übertreffen dürfen, weil die Differenz $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$ und auch die Differenz $\varepsilon^{(p)} - \varepsilon^{(p+s)}$ unter ω liegt, und weil man für ein Aggregat von Werthen verschiedenen Vorzeichens einen keinenfalls zu kleinen, möglicherweise aber zu grossen Werth erhält, indem man jeden Bestandtheil durch einen positiven nicht kleineren Werth ersetzt, so ist die rechte Seite der vorstehenden Gleichung und daher auch die Differenz (7) numerisch jedenfalls nicht grösser als der Werth $\Gamma\omega + E\omega + \omega^2$.

Offenbar wird aber für einen beliebig kleinen Werth ω sowohl der Werth 2ω, wie auch der Werth $\Gamma\omega + E\omega + \omega^2$ beliebig klein. Also steht es in unserer Gewalt, sowohl die Differenz (5), wie auch die Differenz (6), wie auch die Differenz (7) beliebig klein zu machen, und das ist der Inhalt der Aussage, *dass die Brüche von jeder der neuen Reihen* (1), (2) *und* (3) *sich stets einem bestimmten Grenzwerthe nähern.*

Die Brüche der neuen Reihe (4) zeigen nicht unbedingt dasselbe Verhalten. Zunächst ist die Voraussetzung erforderlich, dass unter den Brüchen, die als Nenner auftreten, die *Null* nicht vorkommen darf, weil nach § 12 die *Null* als Nenner überhaupt nicht verwendbar ist. Bildet man ferner für die Voraussetzung, dass die Null nicht als Nenner vorkomme, die Differenz des $p$ten und des $(p + s)$ten Bruches der Reihe (4), nämlich

$$(8)\qquad \frac{\gamma^{(p)}}{\varepsilon^{(p)}} - \frac{\gamma^{(p+s)}}{\varepsilon^{(p+s)}},$$

so sind die Bedingungen zu ermitteln, unter denen man sicher sein kann, dass dieselbe für eine bestimmt zu wählende Zahl p und eine beliebig grosse Zahl s beliebig klein bleibt. Man bringt diese Differenz leicht in die Gestalt

$$(9)\qquad \frac{\left(\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}\right)\varepsilon^{(p)} - \left(\varepsilon^{(p)} - \varepsilon^{(p+s)}\right)\gamma^{(p)}}{\varepsilon^{(p)}\varepsilon^{(p+s)}},$$

und bemerkt, dass nach den bestehenden Voraussetzungen und

der schon angewendeten Schlussweise der Werth des Zählers numerisch nicht grösser ist als der Werth

$$E\omega + \Gamma\omega,$$

welcher für ein beliebig kleines ω selbst beliebig klein wird. Wenn man also sicher ist, dass der Nenner des Bruches (9) nicht unter einen bestimmten von der Null verschiedenen Werth herabsinken kann, dann weiss man, dass auch der Werth des ganzen Bruches (9) beliebig klein wird. Der Nenner $\varepsilon^{(p)}\varepsilon^{(p+s)}$ hat aber die bezeichnete Eigenschaft dann und nur dann, wofern die einzelnen Brüche $\varepsilon^{(p)}$, $\varepsilon^{(p+1)}$, ... sämmtlich numerisch nicht kleiner werden, als ein bestimmter von der Null verschiedener Zahlenwerth. *Aus diesem Grunde nehmen wir an, dass die Brüche der Reihe* (2) *des vorigen § numerisch nicht unter einen bestimmten Zahlenwerth N herabgehen, und schliessen somit den Fall aus, dass diese Brüche sich der Null als Grenzwerth nähern. Unter dieser Einschränkung ist die Aussage berechtigt, dass die Brüche der neuen Reihe* (4) *sich einem bestimmten Grenzwerthe nähern.*

Man kann die gefundenen Resultate auch dahin zusammenfassen, *dass unter den bezeichneten Voraussetzungen die Summe $\gamma^{(p)} + \varepsilon^{(p)}$ von dem Bruche $\gamma^{(p+s)} + \varepsilon^{(p+s)}$ der Reihe* (1), *die Differenz $\gamma^{(p)} - \varepsilon^{(p)}$ von dem Bruche $\gamma^{(p+s)} - \varepsilon^{(p+s)}$ der Reihe* (2), *das Product $\gamma^{(p)}\varepsilon^{(p)}$ von dem Bruche $\gamma^{(p+s)}\varepsilon^{(p+s)}$ der Reihe* (3), *der Quotient $\frac{\gamma^{(p)}}{\varepsilon^{(p)}}$ von dem Bruche $\frac{\gamma^{(p+s)}}{\varepsilon^{(p+s)}}$ der Reihe* (4) *um beliebig wenig verschieden ist.* Man sagt, *dass ein Werth A von einem Werthe B beliebig wenig verschieden ist, sobald die Differenz $A - B$ numerisch beliebig klein gemacht werden kann.*

Da sich für die zur Bildung der neuen Reihen (1), (2), (3) angewendeten beiden Reihen keine Einschränkungen ergeben haben, und ebenso wenig für die zur Bildung der neuen Reihe (4) angewendete Reihe γ', γ'',.., so können an den bezeichneten Oertern auch solche Reihen erscheinen, deren Brüche sich dem Grenzwerthe *Null* nähern, und mit diesen Annahmen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Wenn die Brüche der Reihe ε', ε'',.. sich der *Null* als Grenzwerth nähern, so haben die Brüche der neuen Reihe (1)

und der neuen Reihe (2) die Eigenschaft, von den gleichstelligen und weit genug vorgerückten Brüchen der Reihe γ', γ'',.. um beliebig wenig zu differiren. Hiefür besteht der Ausdruck, *dass die zugeordneten Grenzwerthe einander gleich sind.* Wenn die Brüche der Reihe γ', γ'',... sich der *Null* als Grenzwerth nähern, so differiren die Brüche der neuen Reihe (1) beliebig wenig von den gleichstelligen und weit genug vorgerückten Brüchen der Reihe ε', ε'',.., dagegen die Brüche der neuen Reihe (2) beliebig wenig von den gleichstelligen und weit genug vorgerückten Brüchen der Reihe

$$-\varepsilon', \; -\varepsilon'', \ldots$$

Nun ist in dem vorigen § bewiesen worden, dass bei solchen Reihen, deren Brüche niemals numerisch unter einen gewissen von Null verschiedenen Zahlenwerth herabsinken, von einer bestimmten Stelle ab alle Brüche entweder *positiv* oder *negativ* bleiben müssen. Wenn also die Brüche ε', ε'',.. sich *nicht* der *Null* als Grenzwerth nähern, und daher von einer bestimmten Stelle ab entweder *positiv* oder *negativ* sein müssen, so gilt von den Brüchen

$$-\varepsilon', \; -\varepsilon'', \ldots,$$

dass sie von der entsprechenden Stelle ab sämmtlich das *entgegengesetzte* Vorzeichen haben müssen. Wofern sich also die Brüche ε', ε'',.. nach der in dem vorigen § eingeführten Bezeichnung einem *positiven* Grenzwerthe nähern, so gilt der Ausdruck, dass *sich die Brüche*

$$-\varepsilon', \; -\varepsilon'', \ldots$$

dem entsprechenden negativen Grenzwerthe nähern, und umgekehrt.

Sobald die Brüche der Reihe γ', γ'',... sich der *Null* als Grenzwerth nähern, so sinken sowohl die Brüche der neuen Reihe (3), wie auch die Brüche der neuen Reihe (4) numerisch unter jeden gegebenen Werth herab. Denn von den beiden Factoren des Products $\gamma^{(p+s)}\,\varepsilon^{(p+s)}$ wird der erste beliebig klein, und der zweite übertrifft niemals einen festen Werth E. Was dagegen den Bruch $\dfrac{\gamma^{(p+s)}}{\varepsilon^{(p+s)}}$ anlangt, so wird sein Zähler beliebig klein, dagegen kann sein Nenner nach der getroffenen Voraussetzung unter einen bestimmten, von der Null verschiedenen Werth numerisch nicht herabgehen. *Es nähern sich also gegen-*

wärtig sowohl die Brüche der neuen Reihe (3), *wie auch die Brüche der neuen Reihe* (4) *der Null als Grenzwerth.*

Einen gleichen Erfolg hat bei der neuen Reihe (3) die Annahme, dass die Brüche der Reihe ε', ε'',.. sich der *Null* als Grenzwerth nähern. Andrerseits ist es aber klar, *dass, wenn weder die Brüche der Reihe* γ', γ'',.. *noch die Brüche der Reihe* ε', ε'',... *jemals numerisch unter einen bestimmten von der Null verschiedenen Zahlenwerth herabsinken, auch die Brüche der neuen Reihe* (3) *nicht unter einen bestimmten von der Null verschiedenen Zahlenwerth herabsinken können. In diesem Falle hat sowohl der Grenzwerth der* γ', γ'',.. *ein bestimmtes Vorzeichen, wie auch der Grenzwerth der* ε' ε'',... *ein bestimmtes Vorzeichen, und je nachdem diese beiden Vorzeichen übereinstimmen oder nicht übereinstimmen, bekommt der Grenzwerth der Brüche* $\gamma'\varepsilon'$, $\gamma''\varepsilon''$,.. *das positive oder das negative Vorzeichen. Sobald der Grenzwerth der* γ', γ'',... *und der Grenzwerth der* ε', ε'',... *dasselbe Vorzeichen haben, so hat auch der Grenzwerth der Brüche* $\gamma'+\varepsilon'$, $\gamma''+\varepsilon''$,.. *der neuen Reihe* (1) *dasselbe Vorzeichen.*

Ausserdem sind noch einige allgemeine Beobachtungen hervorzuheben. *Die neue Reihe* (1) *bleibt ungeändert, sobald man die Reihe* γ', γ'',.. *mit der Reihe* ε', ε'',.. *vertauschet; die neue Reihe* (2) *entsteht aus den Reihen* γ', γ'',.. *und* $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$,.. *durch dasselbe Verfahren, durch das die neue Reihe* (1) *aus den Reihen* γ', γ'',.. *und* ε', ε'',.. *entstanden ist; die neue Reihe* (3) *bleibt ebenfalls ungeändert, wofern man die Reihe* γ', γ'',.. *mit der Reihe* ε', ε'',.. *vertauscht.* Auch erkennt man sogleich, *dass, wenn aus drei Reihen der in Rede stehenden Art durch Addition oder durch Multiplication der drei gleichstelligen Individuen eine neue Reihe gebildet wird, die Vertauschung der drei ursprünglichen Reihen unter einander wie auch ihre Zusammenfassung zu Gruppen auf die hervorgehende Reihe keinen Einfluss ausüben kann.*

Die neue Reihe (2) enthält das Mittel zur Vergleichung des Grenzwerthes der γ', γ'',.. und des Grenzwerthes der ε' ε'',.. Sobald die Differenzen $\gamma'-\varepsilon'$, $\gamma''-\varepsilon''$,.. sich der *Null* als Grenzwerth nähern, so unterscheiden sich die Brüche γ', γ'',.. von den gleichstelligen und weit genug vorgerückten Brüchen ε', ε'',.. um beliebig wenig, mithin wird *der Grenzwerth der erstern dem Grenzwerthe der letzteren gleich.* Wenn dagegen die Differenzen

$\gamma' - \varepsilon', \gamma'' - \varepsilon'', \ldots$ nicht unter einen festen von der Null verschiedenen Zahlenwerth herabsinken, so müssen sie nach den gegebenen Erörterungen von einer bestimmten Stelle ab sämmtlich entweder *positiv* oder *negativ* bleiben. *Im ersten Falle* sagt man, *dass der Grenzwerth der* $\gamma', \gamma'', \ldots$ *grösser sei, in dem zweiten Falle, dass der Grenzwerth der* $\gamma', \gamma'', \ldots$ *kleiner sei, als der Grenzwerth der* $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$.

Nach diesen Vorbereitungen bleibt noch übrig, dass man für den Grenzwerth, dem sich die einzelnen Brüche jeder betrachteten Reihe nähern, ein *eigenes Zeichen* einführt. Es werde der Grenzwerth der Brüche $\gamma', \gamma'', \ldots$ mit $\mathfrak{G}$, der Grenzwerth der Brüche $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ mit $\mathfrak{E}$, der Grenzwerth der Brüche, die in den neuen Reihen (1), (2), (3), (4) enthalten sind, beziehungsweise mit $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bezeichnet. Was unter einem *positiven Grenzwerthe*, was unter einem *negativen Grenzwerthe*, was unter dem *Grenzwerthe Null* zu verstehen sei, ist vorhin definirt worden. *Man überträgt nun die Rechnungsoperationen auf die Grenzwerthe selbst und bildet die folgenden Gleichungen:*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{G} + \mathfrak{E} \tag{10}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} - \mathfrak{E} \tag{11}$$

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{E} \tag{12}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}. \tag{13}$$

Das Gleichheitszeichen ist hier so zu verstehen, dass, wenn man für jeden Grenzwerth einen hinreichend weit vorgerückten Bruch aus der betreffenden Reihe substituirt, die Differenz der rechts und links vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke numerisch beliebig klein wird. Dass die vorstehenden vier Gleichungen in diesem Sinne gültig sind, geht aus den angestellten Erörterungen hervor.

In den drei ersten Gleichungen, welche sich auf die *Addition*, die *Subtraction* und die *Multiplication* beziehen, sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ keinen Einschränkungen unterworfen; in der letzten Gleichung, welche sich auf die *Division* bezieht, *darf der Nenner* $\mathfrak{E}$, *wie sich gezeigt hat, nicht* $= 0$ *sein.* Die ferner angestellten Betrachtungen drücken sich in der nunmehr eingeführten Sprechweise folgendermassen aus. *Wofern* $\mathfrak{E} = 0$ *ist, wird* $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}$; *wofern* $\mathfrak{G} = 0$ *ist, wird* $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{D} = -\mathfrak{E}$.

Wofern $\mathfrak{G} = 0$ *ist, wird* $\mathfrak{P} = 0$ *und* $\mathfrak{Q} = 0$. *Das Product* $\mathfrak{G}\mathfrak{E}$ *verschwindet, sobald einer seiner beiden Factoren gleich Null ist; dasselbe kann nicht verschwinden, wenn jeder der beiden Factoren von Null verschieden ist und hat das positive Vorzeichen oder das negative Vorzeichen, je nachdem* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{E}$ *gleiches Vorzeichen oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die Summe* $\mathfrak{G} + \mathfrak{E}$ *ist positiv, wofern* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{E}$ *beide positiv sind, und ist negativ, wofern* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{E}$ *beide negativ sind. Die Summe* $\mathfrak{G} + \mathfrak{E}$ *bleibt ungeändert, wenn die Summanden* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{E}$ *mit einander vertauscht werden. Die Differenz* $\mathfrak{G} - \mathfrak{E}$ *ist gleich der Summe von* $\mathfrak{G}$ *und* $-\mathfrak{E}$. *Das Product* $\mathfrak{G}\mathfrak{E}$ *bleibt ebenfalls ungeändert, wenn man die Factoren* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{E}$ *mit einander vertauscht. Auch eine Summe aus drei Summanden und ein Product aus drei Factoren werden durch Vertauschung oder Zusammenfassung der zugehörigen Bestandtheile nicht geändert.*

Eine wiederholte Anwendung der Schlüsse, auf welchen die Gleichungen (10), (11), (12), (13) beruhen, erlaubt die Folgerung, *dass alle Regeln, die bisher für die Rechnung mit positiven oder negativen Brüchen abgeleitet worden sind, für die Rechnung mit Grenzwerthen gültig bleiben.* Hiebei ist aber der Umstand wohl zu berücksichtigen, dass die Rechnung mit positiven oder negativen Brüchen in der so eben eingeführten Rechnung mit Grenzwerthen eingeschlossen ist. Es steht nämlich nichts im Wege, den besonderen Fall ins Auge zu fassen, dass die sämmtlichen Brüche $\gamma', \gamma'', \ldots$ einem einzigen Bruche gleich sind, und dass auch die sämmtlichen Brüche $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ einem einzigen Bruche gleich sind. Alsdann fällt der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ der $\gamma', \gamma'', \ldots$ mit dem betreffenden Bruche γ', der Grenzwerth $\mathfrak{E}$ der $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ mit dem betreffenden Bruche ε' zusammen und es handelt sich wieder um die Rechnung mit Brüchen. Ebensowohl kann man voraussetzen, dass von den beiden Reihen $\gamma', \gamma'', \ldots$ und $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ die eine aus lauter gleichen Brüchen bestehe, die andere aber von allgemeiner Beschaffenheit sei. Dann fällt bei den Brüchen der ausgewählten Reihe, etwa der ersten, der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ mit dem zugehörigen Bruche γ' zusammen, und die Gleichungen (10), (11), (12), (13) dienen dazu, einen Grenzwerth $\mathfrak{G}$, der dem Bruche γ' gleich ist, mit einem Grenzwerthe $\mathfrak{E}$ von allgemeiner Beschaffenheit durch die vier Grundoperationen der Rechnung zu verbinden.

Nun ist schon in der früheren Ausdrucksweise darauf aufmerksam gemacht worden, dass bei der Gleichung (11) der Grenzwerth $\mathfrak{D}$ entweder *positiv* oder *negativ* oder *gleich Null* sein kann, und es ist hervorgehoben, *dass je nach diesen drei Fällen* $\mathfrak{G}$ *grösser als* $\mathfrak{E}$, *oder* $\mathfrak{G}$ *kleiner als* $\mathfrak{E}$, *oder* $\mathfrak{G}$ *gleich* $\mathfrak{E}$ *genannt wird.* Wenn man also die Brüche γ', γ'', .. einander gleich annimmt, so dass der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ dem Bruche γ' gleich wird, so liefert die Gleichung (11) eine Handhabe, *um die Differenz zwischen einem Grenzwerthe* $\mathfrak{E}$ *und einem Bruche* $\mathfrak{G}$ *darzustellen.*

§ 17. Eindeutigkeit der positiven Wurzel des *n*ten Grades aus einem gegebenen positiven Bruche. Definition der rationalen und der irrationalen Grössen. Zusammenfassung der rationalen und der irrationalen Grössen unter der Benennung der bestimmten Grössen.

Wir kehren jetzt zu den Reihen von Brüchen zurück, deren Grenzwerth in § 14 *eine positive nte Wurzel aus dem Bruche* $\frac{G}{H}$ genannt worden ist. Sowohl die Brüche der dortigen Reihe

$$\alpha, \alpha', \alpha'', ..$$

wie auch die Brüche der dortigen Reihe

$$\beta, \beta', \beta'', ..$$

nähern sich einem bestimmten positiven Grenzwerthe. Dass diese beiden Grenzwerthe als *einander gleich* bezeichnet worden sind, stimmt mit den Definitionen des vorigen § völlig überein, da nach § 14 die positive Differenz $\beta^{(p)} - \alpha^{(p)}$ kleiner gemacht werden kann, als ein beliebig kleiner gegebener Werth. Dies heisst nämlich nichts anderes, als dass die durch Subtraction der betreffenden gleichstelligen Brüche entstehenden Brüche

$$\beta - \alpha,\ \beta' - \alpha',\ \beta'' - \alpha'', ..$$

sich der *Null als Grenzwerth* nähern.

Wenn wir den übereinstimmenden positiven Grenzwerth der Brüche $\alpha, \alpha', \alpha''$, .. und der Brüche β, β', β'', .. mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, so erfüllt derselbe nach der Ausdrucksweise des vorigen § die Gleichung

$$\mathfrak{A}^n = \frac{G}{H}.$$

Denn sobald man den Grenzwerth $\mathfrak{A}$ durch einen hinreichend

weit vorgerückten Bruch $\alpha^{(p)}$ aus der Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ oder einen solchen Bruch $\beta^{(p)}$ aus der Reihe $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ ersetzt, so wird die Differenz der linken und der rechten Seite der Gleichung, nämlich $(\alpha^{(p)})^n - \frac{G}{H}$ oder $(\beta^{(p)})^n - \frac{G}{H}$, numerisch beliebig klein, da die erste Differenz das negative Vorzeichen, die zweite Differenz das positive Vorzeichen hat, und die Differenz $(\beta^{(p)})^n - (\alpha^{(p)})^n$ für ein angemessen gewähltes p einen positiven beliebig kleinen Werth annimmt. Es folgt nämlich durch die im vorigen § bei Gelegenheit der Gleichung (7) benutzte Schlussweise, dass, weil $\beta^{(p)} - \alpha^{(p)}$ positiv ist und beliebig klein wird, auch $\beta^{(p)}\beta^{(p)} - \alpha^{(p)}\alpha^{(p)} = (\beta^{(p)})^2 - (\alpha^{(p)})^2$, desgleichen $(\beta^{(p)})^3 - (\alpha^{(p)})^3, \ldots (\beta^{(p)})^n - (\alpha^{(p)})^n$ positiv ist und beliebig klein werden muss.

In § 14 sind die Reihen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ und $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ unter der Voraussetzung abgeleitet worden, dass der positive Bruch $\frac{G}{H}$, auf seine kleinste Benennung gebracht, *nicht* die Bedingung befriedige, sowohl in seinem Zähler wie auch in seinem Nenner eine $n$te Potenz einer ganzen Zahl zu haben; daraus ergab sich, dass kein positiver Bruch existirt, welcher auf die $n$te Potenz erhoben dem Bruche $\frac{G}{H}$ gleich werden kann. *Sobald aber statt der unerfüllbaren Forderung, einen solchen Bruch zu bestimmen, die Forderung aufgestellt wird, eine Reihe von Brüchen zu suchen, bei welchen die Differenz zwischen ihrer $n$ten Potenz und dem Bruche $\frac{G}{H}$ numerisch kleiner gemacht werden kann, als ein beliebig kleiner gegebener Werth, so sehen wir diese Forderung durch die Brüche $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ und auch durch die Brüche $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ erfüllt, deren gemeinsamer Grenzwerth $\mathfrak{A}$ genannt worden ist, und für diesen Grenzwerth besteht die obige Gleichung*

$$\mathfrak{A}^n = \frac{G}{H}.$$

Man kann jetzt auch den Beweis führen, dass es keinen von dem Grenzwerthe $\mathfrak{A}$ *verschiedenen* positiven Grenzwerth $\mathfrak{C}$ giebt, welcher dieser Gleichung genügt. Wenn es einen solchen

Grenzwerth $\mathfrak{E}$ gäbe, so würde derselbe mit gleichem Rechte, wie der Grenzwerth $\mathfrak{A}$, *eine positive nte Wurzel aus dem Bruche* $\frac{G}{H}$ genannt werden. Nach den Definitionen des vorigen § heisst der Grenzwerth $\mathfrak{E}$, dem sich die Brüche einer Reihe

$$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$$

nähern, mit dem Grenzwerth $\mathfrak{A}$ *gleich* oder von demselben *verschieden*, je nachdem die Brüche der Reihe

$$\varepsilon - \alpha, \; \varepsilon' - \alpha', \; \varepsilon'' - \alpha'', \ldots$$

sich der *Null* als Grenzwerth nähern oder *nicht*. Ist, wie wir annehmen wollen, das letztere der Fall, so sind diese Brüche von einer bestimmten Stelle ab entweder sämmtlich *positiv* oder sämmtlich *negativ*, und nähern sich demgemäss entweder einem *positiven* oder einem *negativen* von der Null verschiedenen Grenzwerthe, welcher mit Δ bezeichnet werden möge. Dann darf vermöge der Gleichung (11) des vorigen § die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \Delta$$

gebildet werden. Gesetzt, der positive Grenzwerth $\mathfrak{E}$ befriedige die in Rede stehende Gleichung $\mathfrak{E}^n = \frac{G}{H}$, so müsste zu gleicher Zeit

$$(\mathfrak{A} + \Delta)^n = \frac{G}{H}, \quad \mathfrak{A}^n = \frac{G}{H}$$

sein. Wir erinnern uns nun, wie im Anfange des § 13 bewiesen ist, dass *zwei von einander verschiedene positive Brüche* $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p}{q}$ nicht zugleich den Gleichungen

$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n = \frac{G}{H}, \quad \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{G}{H}$$

genügen können. Da aber nach den Ausführungen des vorigen § für die Rechnung mit Grenzwerthen und für die Rechnung mit Brüchen genau dieselben Regeln gelten, und da die Begriffe *grösser* und *kleiner* für die beiden Gebiete eine genau entsprechende Bedeutung haben, so lassen sich die an jener Stelle angewendeten Schlüsse durchaus übertragen und unsere Behauptung, dass $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$ sein muss, ist bewiesen.

Auf diese Weise entsteht *der Satz, dass die positive nte Wurzel aus einem positiven Bruche* $\frac{G}{H}$ *eindeutig bestimmt ist.*

Durch die gegenwärtig eingeführten Definitionen gilt derselbe für *alle* möglichen Voraussetzungen. Entweder der Bruch $\frac{G}{H}$ kann der $n$ten Potenz eines positiven Bruches $\frac{p}{q}$ gleich sein oder nicht; im ersten Falle ist *die positive nte Wurzel aus* $\frac{G}{H}$ gleich der *positiven rationalen Grösse* $\frac{p}{q}$ *und nur gleich dieser allein*, im zweiten Falle ist *die positive nte Wurzel* aus dem Bruche $\frac{G}{H}$ gleich der vorhin definirten *positiven irrationalen Grösse* $\mathfrak{A}$ *und nur gleich dieser allein.* Die rationalen und irrationalen Grössen haben die folgende allgemeine Definition. Eine *rationale Grösse* bedeutet einen Werth, der *durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen aus den ganzen Zahlen dargestellt werden kann,* das heisst, einen *positiven* oder *negativen Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind.* Eine *irrationale Grösse* bedeutet *den Grenzwerth von rationalen Brüchen, die eine unbeschränkt fortzusetzende Reihe bilden, und die eine gewisse Forderung, welche durch einen rationalen Bruch nicht in aller Strenge erfüllt werden kann, mit beliebiger Genauigkeit erfüllen.*

Sowohl die rationalen wie die irrationalen Grössen sind *bestimmte Grössen;* denn eine Grösse, die mit einer von ihr verschiedenen nicht verwechselt werden kann, ist bestimmt. Mit Rücksicht auf diesen Begriff hat der gegenwärtige Abschnitt die Ueberschrift: *Rechnung mit bestimmten Grössen* erhalten.

§ 18. Producte und Quotienten von positiven $n$ten Wurzeln aus positiven rationalen Brüchen.

Vermittelst des Satzes, dass es aus jedem positiven rationalen Bruche $\frac{G}{H}$ eine und nur eine positive $n$te Wurzel giebt, lässt sich die Lehre von den Wurzelgrössen leicht begründen. Es soll von jetzt ab die übliche Bezeichnung gebraucht werden, nach welcher *die der Gleichung*

$$(1) \qquad \mathfrak{A}^n = \frac{G}{H}$$

genügende positive Grösse $\mathfrak{A}$ *mit*

$$\mathfrak{A} = \sqrt[n]{\frac{G}{H}}$$

notirt wird.

Wenn man den Bruch $\frac{G}{H}$ auf irgend eine Weise als ein Product von zwei rationalen Brüchen $\frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{g_2}{h_2}$ darstellt, so sind die den Gleichungen

$$(2) \qquad \mathfrak{a}_1^n = \frac{g_1}{h_1}, \quad \mathfrak{a}_2^n = \frac{g_2}{h_2}$$

genügenden positiven Grössen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ebenfalls vollständig bestimmt, und man hat

$$\mathfrak{a}_1 = \sqrt[n]{\frac{g_1}{h_1}}, \quad \mathfrak{a}_2 = \sqrt[n]{\frac{g_2}{h_2}}.$$

Nun liefert die Multiplication der beiden Gleichungen (2) die Gleichung

$$\mathfrak{a}_1^n \, \mathfrak{a}_2^n = \frac{g_1}{h_1} \frac{g_2}{h_2},$$

welche sich in die Gestalt bringen lässt

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^n = \frac{G}{H}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass das Product $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$, welches positiv ist, weil seine Factoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ positiv sind, eine *n*te Wurzel aus dem Bruche $\frac{G}{H}$ ist. Weil es nun nur *eine* positive *n*te Wurzel aus diesem Bruche giebt, nämlich $\mathfrak{A}$, so muss $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{A}$ sein, oder

$$(3) \qquad \sqrt[n]{\frac{g_1}{h_1}} \sqrt[n]{\frac{g_2}{h_2}} = \sqrt[n]{\frac{G}{H}}.$$

Da das *Product* $\frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{g_2}{h_2}$ dem *Quotienten* $\dfrac{\frac{g_1}{h_1}}{\frac{h_2}{g_2}}$ gleich ist, so können in ganz ähnlicher Weise die positive *n*te Wurzel $\sqrt[n]{\frac{g_1}{h_1}}$ und die positive *n*te Wurzel $\sqrt[n]{\frac{h_2}{g_2}}$ verbunden werden, und dies führt zu der Gleichung

$$(4) \qquad \frac{\sqrt[n]{\frac{g_1}{h_1}}}{\sqrt[n]{\frac{h_2}{g_2}}} = \sqrt[n]{\frac{G}{H}}.$$

Die Schlüsse, durch welche die beiden Gleichungen (3) und (4) bewiesen sind, haben ganz dieselbe Kraft, mögen die auftretenden Wurzelgrössen rational oder irrational sein; denn nach den Ausführungen des § 16 gelten die angewendeten Rechnungsoperationen in allen Fällen. Die beiden Gleichungen drücken die Sätze aus, *dass das Product der positiven nten Wurzeln aus zwei positiven rationalen Brüchen gleich der positiven nten Wurzel aus dem Product der beiden Brüche, und dass der Quotient der positiven nten Wurzeln aus zwei positiven rationalen Brüchen gleich der positiven nten Wurzel aus dem Quotienten der beiden Brüche ist.* Der erste Satz dehnt sich unmittelbar auf ein Product aus, das aus beliebig vielen Factoren besteht. Aus dem zweiten Satze folgt zugleich, dass die positive $n$te Wurzel aus $\frac{G}{H}$ gleich einem Quotienten ist, dessen Zähler die positive $n$te Wurzel aus der ganzen Zahl G, und dessen Nenner die positive $n$te Wurzel aus der ganzen Zahl H bildet.

§ 19. Rechnung mit Potenzen, deren Basis ein rationaler Bruch ist und deren Exponenten positive oder negative ganze Zahlen sind. Eindeutige Definition der Potenzen, deren Basis ein positiver rationaler Bruch ist und deren Exponenten positive oder negative rationale Brüche sind. Rechnung mit solchen Potenzen.

Wenn man von der positiven $n$ten Wurzel aus einem positiven rationalen Bruche C verschiedene Potenzen nimmt und dieselben durch Multiplication und Division verknüpft, so zeigen sich die gleichen Erscheinungen, wie bei den ganzen Potenzen eines rationalen Bruches C. Es mögen zunächst die letzteren Potenzen betrachtet werden. Die Potenzexponenten a und b bezeichnen die Anzahl der in der Potenz vorhandenen gleichen Factoren und sind insofern *positive ganze Zahlen mit Ausschluss der Null.* Mithin kommt die Gleichung

$$C^a \,.\, C^b = C^{a+b},$$

und, je nachdem a grösser als b, a gleich b, oder a kleiner als b ist, die eine der drei Gleichungen

$$\frac{C^{a}}{C^{b}} = C^{a-b}; \quad \frac{C^{a}}{C^{a}} = 1; \quad \frac{C^{a}}{C^{b}} = \frac{1}{C^{b-a}}.$$

Um die letzten drei Gleichungen in die Form einer einzigen, nämlich der ersten, zusammenzufassen, werden als Potenzexponenten *die Null und die negativen ganzen Zahlen* eingeführt, so dass

$$C^{0} = 1, \ C^{a-b} = \frac{1}{C^{b-a}}$$

ist. Dann bringt die Reihe der von der Null beginnenden positiven und negativen Zahlen als Exponenten die Reihe von Potenzen hervor

(1) $$\ldots, C^{-2}, C^{-1}, C^{0}, C^{1}, C^{2}, \ldots$$

welche für ein positives C lauter positive Individuen, für ein negatives C regelmässig abwechselnd positive und negative Individuen enthält. Liegt der numerische Werth von C über der Einheit, so wachsen die Brüche numerisch mit wachsendem Exponenten über jedes Mass und nehmen numerisch mit abnehmendem Exponenten ohne Ende ab. Sobald der numerische Werth von C unter der Einheit liegt, findet das Entgegengesetzte Statt.

Von dieser Beobachtung ist schon in § 15 Gebrauch gemacht worden. Da es an jener Stelle nur auf ein Beispiel ankam, so wurde vorausgesetzt, dass der zu potenzirende Werth eine die Einheit übertreffende ganze Zahl sei. Alsdann liegt es auf der Hand, dass ein wachsender Exponent eine Zahl hervorbringt, die numerisch jede gegebene Grösse überschreitet. Für einen Werth C, welcher überhaupt numerisch grösser ist, als die Einheit, kann die betreffende Behauptung folgendermassen bewiesen werden. Es sei der numerische Werth von C gleich $1 + \gamma$, wo γ positiv und von der Null verschieden ist. Man habe ausserdem einen zweiten Werth $1 + \delta$, wo δ ebenfalls positiv und von der Null verschieden ist. Dann besteht für das Product der in Rede stehenden Werthe die Gleichung

$$(1 + \gamma)(1 + \delta) = 1 + \gamma + \delta + \gamma\delta.$$

Hier ist $\gamma\delta$ positiv, mithin die rechte Seite grösser als $1 + \gamma + \delta$.

Setzt man $\gamma = \delta$, so folgt, dass $(1+\gamma)^2$ grösser ist, als $1+2\gamma$; wird dieselbe Betrachtung auf $(1+\gamma)^3 = (1+\gamma)^2(1+\gamma)$ angewendet, nachdem bemerkt worden, dass der erste Factor $(1+\gamma)^2$ grösser ist als $1+2\gamma$, so erweist sich $(1+\gamma)^3$ grösser als $1+3\gamma$, und fortschreitend für eine beliebig grosse positive Zahl p die Potenz $(1+\gamma)^{\mathrm{p}}$ grösser als $1+p\gamma$. Da nun γ ein die Null übertreffender gegebener Werth ist, so wird $1+p\gamma$ für ein passend gewähltes p grösser als jeder noch so grosse Werth, und daher übertrifft um so mehr die Potenz $(1+\gamma)^{\mathrm{p}}$ jeden noch so grossen Werth, wie behauptet worden war.

Da gegenwärtig alle positiven und negativen ganzen Zahlen sammt der Null als Potenzexponenten auftreten dürfen, so kann man auch in diesem erweiterten Umfange zwei Potenzen derselben Basis C miteinander multipliciren, und eine durch die andere dividiren, wodurch die mit den obigen Gleichungen gleichlautenden Gleichungen

$$(2) \qquad C^{\mathrm{a}} \,.\, C^{\mathrm{b}} = C^{\mathrm{a+b}}, \quad \frac{C^{\mathrm{a}}}{C^{\mathrm{b}}} = C^{\mathrm{a-b}}$$

entstehen.

Sobald festgesetzt wird, dass auch für eine positive irrationale Grösse die Erhebung auf den Exponenten Null die Einheit hervorbringen und die Erhebung auf einen ganzzahligen negativen Exponenten die Bedeutung haben soll, dass die gleichnamige positive Potenz in die Einheit dividirt werde, so enthält diese Definition nur die in § 16 erörterten allgemein gültigen Grundoperationen, und demgemäss kann die positive $n$te Wurzel $\mathfrak{A}$ aus einem positiven rationalen Bruche C auf die sämmtlichen positiven und negativen ganzzahligen Exponenten mit Einschluss der Null erhoben werden. Auf diese Weise entsteht die nach beiden Seiten unbegrenzt fortschreitende Reihe von Potenzen

$$(3) \qquad ..\,\mathfrak{A}^{-2},\ \mathfrak{A}^{-1},\ \mathfrak{A}^{0},\ \mathfrak{A}^{1},\ \mathfrak{A}^{2},\ \ldots$$

Alle Individuen derselben sind positiv; sie nehmen mit wachsendem Exponenten über jedes Mass zu und sinken mit abnehmendem Exponenten unter jede noch so kleine Grösse, wenn $\mathfrak{A}$ die Einheit übertrifft, und verhalten sich in dem entgegengesetzten Falle umgekehrt. *Ob aber $\mathfrak{A}$ über der Einheit liegt, der Einheit gleich ist, oder unter der Einheit liegt, das hängt allein davon ab, ob der Werth C über der Einheit liegt, der Einheit gleich*

ist, oder unter der Einheit liegt. Denn wegen der Gleichung $\mathfrak{A}^n = C$ ist ein unter der Einheit liegendes $\mathfrak{A}$ nur mit einem unter der Einheit liegenden C, ein über der Einheit liegendes $\mathfrak{A}$ nur mit einem über der Einheit liegenden C, und $\mathfrak{A} = 1$ nur mit $C = 1$ vereinbar.

Für die Potenzen der Grösse $\mathfrak{A}$ ergeben sich die den Gleichungen (2) entsprechenden Gleichungen

$$\mathfrak{A}^a . \mathfrak{A}^b = \mathfrak{A}^{a+b}, \quad \frac{\mathfrak{A}^a}{\mathfrak{A}^b} = \mathfrak{A}^{a-b}, \tag{4}$$

wo a und b beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Die Potenzen der Grösse $\mathfrak{A}$ gestatten nun noch eine andere Auffassung. Aus der Gleichung $\mathfrak{A}^n = C$ folgt, indem beide Seiten auf die $a$te Potenz erhoben werden, die Gleichung

$$\mathfrak{A}^{na} = C^a,$$

und diese lässt erkennen, dass $\mathfrak{A}^a$, auf die $n$te Potenz erhoben, gleich C^a wird. Weil aber $\mathfrak{A}^a$ eine positive Grösse ist und weil es nur *eine positive* $n$te Wurzel aus C^a giebt, so stellt $\mathfrak{A}^a$ *die positive nte Wurzel aus* C^a *dar*, und man hat in den eingeführten Bezeichnungen die Gleichung

$$\left(\sqrt[n]{C}\right)^a = \sqrt[n]{C^a}. \tag{5}$$

Auf Grund dieser Gleichung wird *die positive nte Wurzel aus C durch das Zeichen* $C^{\frac{1}{n}}$ und $\left(\sqrt[n]{C}\right)^a = \sqrt[n]{C^a}$ *durch das Zeichen* $C^{\frac{a}{n}}$ *ausgedrückt.* Die Einführung der negativen und der gebrochenen Potenzexponenten rührt von *Newton* her, wie aus einem Briefe *Newtons* an *Oldenburg* vom 13ten Juni 1676 zu schliessen ist. Durch dieselbe verwandelt sich die Reihe (3) in *die Reihe der gebrochenen Potenzen*

$$C^{-\frac{2}{n}},\ C^{-\frac{1}{n}},\ C^0,\ C^{\frac{1}{n}},\ C^{\frac{2}{n}},\ \ldots \tag{6}$$

und die Gleichungen (4) gehen in die Gleichungen

$$C^{\frac{a}{n}} . C^{\frac{b}{n}} = C^{\frac{a+b}{n}}, \quad \frac{C^{\frac{a}{n}}}{C^{\frac{b}{n}}} = C^{\frac{a-b}{n}} \tag{7}$$

über, in denen $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ *irgend welche positive oder negative Brüche mit dem Nenner n sind.* Die wiederholte Anwendung von (7) liefert für die Erhebung der Grösse $C^{\frac{a}{n}}$ auf eine positive oder negative ganze Potenz die Bestimmung

$$(7^*) \qquad \left(C^{\frac{a}{n}}\right)^f = C^{\frac{af}{n}}.$$

Die Reihe (6) enthält offenbar die Reihe (1) in sich, und zwar so, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Individuen von (1) immer $n-1$ aufeinanderfolgende Individuen von (6) regelmässig eingeschaltet sind. Wenn man ferner mit $n n_1$ irgend ein ganzes Vielfache der Zahl n bezeichnet, und die Reihe der Potenzen der positiven Wurzel $C^{\frac{1}{nn_1}}$ bildet, nämlich

$$(8) \qquad \ldots C^{-\frac{2}{nn_1}},\ C^{-\frac{1}{nn_1}},\ C^0,\ C^{\frac{1}{nn_1}},\ C^{\frac{2}{nn_1}},\ \ldots$$

so umfasst diese Reihe die ganze Reihe (6). Denn so oft in der Reihe (8) der Zähler eines gebrochenen Exponenten gleich einem Vielfachen der Zahl n_1 etwa gleich $a n_1$ wird, so hat die betreffende Potenz $C^{\frac{an_1}{nn_1}}$ in Folge der obigen Gleichung (7*) die Eigenschaft, auf die $n$te Potenz erhoben, gleich C^a zu werden. Die positive Grösse $C^{\frac{an_1}{nn_1}}$ muss daher mit der *eindeutig* bestimmten positiven Grösse $C^{\frac{a}{n}}$ zusammenfallen. Mithin bringen die sämmtlichen in den Zählern der Exponenten der Reihe (8) erscheinenden positiven und negativen Vielfachen der Zahl n_1 die sämmtlichen Individuen der Reihe (6) hervor. Auf dieselbe Weise sind in der Reihe (8) die sämmtlichen Individuen derjenigen Reihe eingeschlossen, welche durch das Potenziren der positiven Wurzel $C^{\frac{1}{n_1}}$ entsteht, nämlich der Reihe

$$(9) \qquad \ldots C^{-\frac{2}{n_1}},\ C^{-\frac{1}{n_1}},\ C^0,\ C^{\frac{1}{n_1}},\ C^{\frac{2}{n_1}},\ \ldots$$

denn es gilt für jede positive oder negative ganze Zahl b_1 die Gleichung

$$C^{\frac{b_1 n}{n n_1}} = C^{\frac{b_1}{n_1}}.$$

Jetzt kann auch das Product und der Quotient von einem beliebigen Individuum $C^{\frac{a}{n}}$ der Reihe (6) und einem beliebigen Individuum $C^{\frac{b_1}{n_1}}$ der Reihe (9) dadurch gebildet werden, dass man beide Individuen in der Reihe (8) aufsucht, und alsdann auf dieselben die Regeln (7) anwendet. Da in der Reihe (8) der Exponent $\frac{a}{n}$ durch den ihm gleichen Bruch $\frac{an_1}{nn_1}$ und der Exponent $\frac{b_1}{n_1}$ durch den ihm gleichen Bruch $\frac{b_1 n}{nn_1}$ vertreten wird, so erhält man bei dem betreffenden Product im Exponenten die Summe $\frac{an_1 + b_1 n}{nn_1} = \frac{a}{n} + \frac{b_1}{n_1}$, und bei dem betreffenden Quotienten im Exponenten die Differenz $\frac{an_1 - b_1 n}{nn_1} = \frac{a}{n} - \frac{b_1}{n_1}$. Daraus ergiebt sich *für die Multiplication und die Division der gebrochenen Potenzen von derselben Basis C die allgemeine Regel*

$$(10) \qquad C^{\frac{a}{n}} \cdot C^{\frac{b_1}{n_1}} = C^{\frac{a}{n} + \frac{b_1}{n_1}},$$

$$\frac{C^{\frac{a}{n}}}{C^{\frac{b_1}{n_1}}} = C^{\frac{a}{n} - \frac{b_1}{n_1}}.$$

Am Schlusse des vorigen § ist die positive $n$te Wurzel aus dem rationalen Bruche $\frac{G}{H}$ als der Quotient der positiven $n$ten Wurzeln aus den positiven ganzen Zahlen G und H dargestellt worden. Für die positive Wurzel aus einer ganzen Zahl G ergiebt sich vermöge des vorigen § eine characteristische Zerlegung in Factoren, sobald die Zahl G in das *Product ihrer Primfactoren* aufgelöst wird. Nach § 7 ist dies nur auf eine einzige Weise möglich, und es sei G das Product der Potenzen der von einander verschiedenen Primzahlen $G_1, G_2, \ldots G_\mu$,

$$G = G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \ldots G_\mu^{\alpha_\mu}.$$

Dann wird $G^{\frac{1}{n}}$ durch die Gleichung

$$G^{\frac{1}{n}} = G_1^{\frac{\alpha_1}{n}} G_2^{\frac{\alpha_2}{n}} \dots G_\mu^{\frac{\alpha_\mu}{n}}$$

ausgedrückt. Hier sind die Exponenten $\frac{\alpha_1}{n}$, $\frac{\alpha_2}{n}$, .. auf ihre kleinste Benennung zu bringen. Wo einer der Exponenten gleich einer ganzen Zahl ist, da erscheint in dem vorliegenden Ausdruck eine ganze Potenz der betreffenden Primzahl als Factor, in jedem anderen Falle bezeichnet der auf seine kleinste Benennung gebrachte Exponent durch seinen Nenner, welche Wurzel aus der zugeordneten Primzahl zu ziehen sei, und durch seinen Zähler, auf welche Potenz diese Wurzel erhoben werden müsse.

§ 20. Addition, Subtraction, Multiplication und Division von beliebigen rationalen oder irrationalen Grössen. Entsprechende Ausdehnung des Gebietes der Analysis. Rechnung mit Potenzen, deren Basis eine beliebige rationale oder irrationale Grösse ist und deren Exponenten positive oder negative rationale Brüche sind.

Durch die Erörterungen der § 15 und 16 sind die vier Grundoperationen der Rechnung auf *Grenzwerthe nach einander folgender Brüche*, mithin wegen der in § 17 gegebenen Definition auf beliebige *rationale oder irrationale Grössen* ausgedehnt worden. Am Schlusse des § 16 wurde ein besonderer Nachdruck darauf gelegt, dass die Differenz von zwei solchen *bestimmten Grössen* $\mathfrak{G} - \mathfrak{E}$ entweder *positiv*, oder *negativ*, oder *gleich Null* ist, und dass dem entsprechend $\mathfrak{G}$ *grösser* als $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$ *kleiner* als $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$ *gleich* $\mathfrak{E}$ genannt wird. Für die beiden ersten Fälle sollen im Folgenden respective *die Zeichen der Ungleichheit* gebraucht werden

$$\mathfrak{G} > \mathfrak{E},\ \mathfrak{G} < \mathfrak{E},$$

wobei der Fall der Gleichheit als ausgeschlossen gilt. Dass der Fall der Gleichheit eingeschlossen sei, mögen die Zeichen

$$\mathfrak{G} \geq \mathfrak{E},\ \mathfrak{G} \leq \mathfrak{E}$$

andeuten. Vermöge der Rechnung mit rationalen und irrationalen Grössen ist es auch gestattet, *wenn eine Reihe von Brüchen* γ', γ'', ... *die in* § 15 *aufgestellten Bedingungen erfüllt, und folglich diese Brüche sich wieder einem Grenzwerthe* $\mathfrak{G}$ *nähern, für die betreffende Grösse* $\mathfrak{G}$ *die Reihe von Differenzen zu bilden*

$$\mathfrak{G} - \gamma';\ \mathfrak{G} - \gamma'', \dots .$$

jede Differenz als positiv oder negativ zu bezeichnen und zu sagen, dass die numerischen Werthe derselben nach und nach beliebig klein werden oder sich der Null als Grenze nähern. Nimmt man als Beispiel die beiden Reihen von Brüchen, welche in § 14 zu der Darstellung der positiven Quadratwurzel aus der Zahl 7 aufgestellt sind, so liefert die erste Reihe die Reihe von Differenzen

$$\sqrt{7}-2,\ \sqrt{7}-\frac{26}{10},\ \sqrt{7}-\frac{264}{100},\ \sqrt{7}-\frac{2645}{1000},\ \ldots$$

und die zweite Reihe die Reihe von Differenzen

$$\sqrt{7}-3,\ \sqrt{7}-\frac{27}{10},\ \sqrt{7}-\frac{265}{100},\ \sqrt{7}-\frac{2646}{1000},\ \ldots$$

Die erste Reihe von Differenzen enthält lauter positive, die zweite lauter negative Grössen, die sich der Null als Grenze nähern.

Nachdem im Vorhergehenden das Ziel erreicht ist, mit beliebigen bestimmten Grössen die vier Grundoperationen der Rechnung auszuführen, so erstreckt sich nunmehr das Feld der mathematischen Speculation oder das Feld der Analysis auf alle Aufgaben, die für beliebige bestimmte Grössen unter der Voraussetzung der Ausführung jener Operationen gestellt werden können. Wenn also, um ein Beispiel hervorzuheben, eine *bestimmte positive Grösse* C gegeben ist, welche rational oder irrational sein mag, so kann in beiden Fällen nach einer positiven Grösse $\mathfrak{A}$ gefragt werden, welche auf die $n$te Potenz erhoben gleich C wird.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass C eine irrationale Grösse sei. Dass die Frage alsdann nicht zwei verschiedene Antworten zulässt, ergiebt sich durch Wiederholung des Beweisverfahrens, das in § 13 und dann in § 17 zur Anwendung gekommen ist. Eine Reihe von rationalen Brüchen, welche die in Rede stehende Forderung *mit beliebiger Genauigkeit erfüllen,* und die sich *einem bestimmten Grenzwerthe* nähern, kann aber nach der in § 14 entwickelten Methode gefunden werden. Denn wenn die $n$ten Potenzen der Brüche von dem Nenner σ mit der Grösse C verglichen werden, so giebt es gerade wie in § 14 stets zwei bestimmte auf einander folgende Brüche $\frac{\varrho}{\sigma}$ und $\frac{\varrho+1}{\sigma}$ von der Beschaffenheit, dass $\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^n < C$ und $C < \left(\frac{\varrho+1}{\sigma}\right)^n$ ist.

Diese Bemerkung genügt vollkommen, um die gesuchten

Reihen von rationalen Brüchen zu bilden. Der Grenzwerth dieser Brüche ist demnach *die eindeutig bestimmte positive nte Wurzel aus der positiven Grösse C, dieselbe hat die Bezeichnung* $\sqrt[n]{C}$ *oder auch die Bezeichnung* $C^{\frac{1}{n}}$, hieraus ergiebt sich für jede positive oder negative ganze Zahl a eine eindeutige Definition der Potenz $C^{\frac{a}{n}}$, und es gelten die Sätze, welche in den § 18 und 19 für die Potenzen von positiven rationalen Brüchen bewiesen sind, auch für die Potenzen von beliebigen positiven Grössen mit positiven oder negativen gebrochenen Exponenten.

Zu der Anwendung der entwickelten Begriffe bietet die im vorigen § mit (8) bezeichnete Reihe von Grössen eine Gelegenheit. Die positive Grösse $C^{\frac{1}{nn_1}}$ hat vermöge der Gleichung (7*) desselben § die Eigenschaft, dass ihre $n_1$te Potenz gleich der Grösse $C^{\frac{1}{n}}$ ist. Weil es nun nach dem so eben Bemerkten eine und nur eine positive $n_1$te Wurzel aus der positiven Grösse $C^{\frac{1}{n}}$ giebt, so ist $C^{\frac{1}{nn_1}}$ diese $n_1$te Wurzel, und man darf die Gleichung aufstellen

$$(1) \qquad \left(C^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n_1}} = C^{\frac{1}{nn_1}}.$$

Aus denselben Gründen ist die Grösse $C^{\frac{a}{nn_1}}$ gleich der eindeutig bestimmten positiven $n_1$ten Wurzel aus der positiven Grösse $C^{\frac{a}{n}}$, und erhebt man beide Seiten der Gleichung, welche dies ausdrückt, auf die $f_1$te Potenz, wo f_1 eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so entsteht die Gleichung

$$(2) \qquad \left(C^{\frac{a}{n}}\right)^{\frac{f_1}{n_1}} = C^{\frac{af_1}{nn_1}}.$$

Dieselbe umfasst in Verbindung mit den Gleichungen (10) des vorigen § die Hauptregeln für die Rechnung mit den Wurzelgrössen derselben Basis, und zwar darf die Basis gleich jeder bestimmten positiven Grösse sein.

Abschnitt II.

Elemente der Algebra.

Capitel I.
Definition der Algebra.

§ 21. Rationale ganze und rationale gebrochene Ausdrücke.

Es möge eine beschränkte Zahl von Grössen ausgewählt sein und mit diesen Bestandtheilen eine beliebige aber der Zahl nach beschränkte Reihenfolge von Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens vorgenommen werden, dann bildet die Untersuchung der auf diese Weise entstehenden Resultate den Gegenstand der Disciplin, welche gegenwärtig *Algebra* genannt wird. Bei der Anwendung der in Rede stehenden vier Grundoperationen ist zu erwägen, dass nach den in dem vorigen Abschnitte entwickelten Principien der Gebrauch der Addition, Subtraction und Multiplication keinen Einschränkungen unterworfen ist, der Gebrauch der Division dagegen verlangt, dass der jedesmalige Divisor nicht gleich Null sei. Demgemäss macht sich ein bedeutender Unterschied zwischen dem Falle geltend, wo bei der Hervorbringung eines Resultates nur die drei ersten Grundoperationen zur Anwendung kommen, und dem Falle, wo diese drei mit Hinzuziehung der vierten gebraucht werden.

Wofern die ausgewählten Bestandtheile oder Elemente, welche wir durch die Buchstaben $a, b, c, \ldots f$ bezeichnen wollen, nur durch *die drei ersten Grundoperationen* mit einander verbunden werden, so kann das Resultat nur ein Aggregat von Pro-

ducten sein, welche die Grössen a, b, c, .. f in beliebiger Wiederholung und ausserdem positive oder negative ganze Zahlen als Factoren enthalten. In einem jeden solchen Product lassen sich die einer Grösse a gleichen Factoren zu einer positiven ganzen Potenz a^{α} vereinigen, dasselbe gilt für die übrigen Grössen b, c, .. f, so dass durch die Vereinigung ein Product von positiven ganzen Potenzen der Elemente a, b, c, .. f entsteht. Wird die als Factor des Products auftretende positive oder negative ganze Zahl N genannt, so hat das Product die Gestalt $Na^{\alpha} b^{\beta} \ldots f^{\zeta}$. Die Zahl N heisst hier *der Coefficient* des Products $a^{\alpha} b^{\beta} \ldots f^{\zeta}$. Für den Fall, dass in einem bestimmten Product ein gewisses Element fehlt, kann dem bezüglichen Exponenten der Werth Null beigelegt werden; wo alle Elemente fehlen und eine reine Zahl N auftritt, sind alle Exponenten durch die Null zu ersetzen.

Ein zweites Product kann mit dem ersten zu einem einzigen verschmolzen werden, wofern die Potenzexponenten der Elemente a, b, ... f einzeln genommen mit einander übereinstimmen, indem man die zugehörigen Zahlenfactoren oder Coefficienten zu einander addirt. Das aus den Elementen a, b, c, .. f durch Addiren, Subtrahiren, und Multipliciren abgeleitete Resultat heisst *ein algebraischer rationaler ganzer Ausdruck*, und lässt sich nach dem so eben Gesagten als ein Aggregat einer endlichen Zahl von Gliedern

(1) $$Na^{\alpha} b^{\beta} \ldots f^{\zeta} + N' a^{\alpha'} b^{\beta'} \ldots f^{\zeta'} + \ldots$$

darstellen, bei welchem die Coefficienten N, N', .. positive oder negative ganze Zahlen, die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots \zeta; \alpha', \beta', \ldots \zeta'; \ldots$ positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null bedeuten, und wo in zwei verschiedenen Gliedern nicht zugleich die Gleichungen $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ .. $\zeta = \zeta'$ erfüllt sind.

Wie man sogleich erkennt, haben die Ausdrücke (1) die Eigenschaft, dass, wenn eine beliebige aber beschränkte Zahl von solchen aufgestellt und aus diesen durch eine beliebige aber der Zahl nach beschränkte Reihenfolge von Additionen, Subtractionen und Multiplicationen ein neuer Ausdruck abgeleitet wird, derselbe ein Ausdruck von derselben Art werden muss. Diese Eigenschaft der *rationalen ganzen Ausdrücke* entspricht genau

der gegen den Schluss des § 10 hervorgehobenen Eigenschaft der *positiven und negativen ganzen Zahlen.*

Wenn die Elemente $a, b, c, \ldots f$ durch *alle vier Grundoperationen* verbunden werden, so entsteht *ein rationaler gebrochener Ausdruck.* Es leuchtet ein, dass die erste Anwendung einer Division einen Quotienten hervorbringt, dessen Zähler und dessen Nenner algebraische ganze rationale Ausdrücke von der in (1) dargestellten Beschaffenheit sind. Weil nun die Addition, Subtraction, Multiplication und Division von Brüchen immer auf die Bildung eines einzigen Bruches zurückgeführt werden kann, so ist *ein algebraischer rationaler gebrochener Ausdruck*, der durch eine beliebige aber in endlicher Zahl mit den Elementen $a, b, \ldots f$ vorgenommene Anwendung der vier Grundoperationen erzeugt worden ist, immer gleich *einem Bruche, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Ausdrücke von der in* (1) *dargestellten Beschaffenheit sind.*

Es wird zweckmässig sein, an dieser Stelle über die Definition der Algebra, welche im Eingange des gegenwärtigen § gegeben ist, eine Bemerkung zu machen. Unter den verschiedenen mathematischen Disciplinen giebt es solche, deren Abgrenzung von vorne herein fest gestanden, und solche, deren Abgrenzung sich erst allmälig durch die Entwickelung der gesammten mathematischen Wissenschaft bestimmt hat. Zu den letzteren gehört die Algebra. Unter diesem Namen verstand man ursprünglich die Kunst, Gleichungen des ersten Grades aufzulösen. Als aus der Beschäftigung mit den Gleichungen die Ausführung der Rechnung in allgemeinen Zeichen hervorging, wurde der Namen der Algebra auf die Rechnung in allgemeinen Zeichen übertragen. Diesem Sprachgebrauche folgt *Newton* in den Eingangsworten seiner *arithmetica universalis.* „Die Rechnung geschieht in Zahlen, wie in der gewöhnlichen Arithmetik, oder in Zeichen, wie bei den Analysten. Jede der beiden Rechnungsarten gründet sich auf dieselben Fundamente und strebt nach demselben Ziel, die Arithmetik auf bestimmte und besondere Weise, die Algebra dagegen auf unbestimmte und allgemeine Weise.“

Die vorhin angegebene und heutzutage geltende Begriffsbestimmung der Algebra wird dagegen von *Euler* in seiner *introductio in analysin infinitorum* festgehalten. Seine Ausdrucks-

weise unterscheidet sich auch darin von derjenigen *Newtons*, dass *Euler*, wie jetzt üblich ist, mit dem Namen der *Arithmetik* die *Lehre von den ganzen Zahlen* bezeichnet. Bei der obigen Definition der Algebra ist der Hauptnachdruck darauf zu legen, dass die *Anzahl* der Anwendungen der vier Grundoperationen eine *beschränkte* sein soll. Daraus erwächst allerdings für die vorliegende Darstellung eine gewisse Schwierigkeit; denn erst an einer weit späteren Stelle kann gezeigt werden, wie sich durch eine in unbeschränkter Anzahl wiederholte Anwendung von Operationen ein bestimmtes Resultat gewinnen lässt.

§ 22. Constante und variable Elemente.

In Bezug auf die Elemente, aus denen die im vorigen § definirten *algebraischen Ausdrücke* zusammengesetzt werden, lässt sich die Verfügung treffen, dass einige Elemente die einmal gewählten Werthe unveränderlich behalten, andere Elemente nach und nach beliebige andere Werthe bekommen. Die ersteren Elemente werden *unveränderliche Grössen* oder *Constanten*, die letzteren Elemente *veränderliche Grössen* oder *Variabeln* genannt. Die ersteren mögen durch die Buchstaben $a, b, c, \ldots$, die letzteren durch die Buchstaben $x, y, z, \ldots$ bezeichnet werden. Ein aus beiden Gattungen von Elementen nach einer bestimmten Vorschrift gebildeter algebraischer Ausdruck zeigt die Eigenschaft, *seinen Werth zu ändern, sobald den Variabeln $x, y, z, \ldots$ andere und andere Werthe beigelegt werden.* Insofern ist *der Werth des Ausdruckes von den Werthen der Variabeln abhängig*, und der Ausdruck heisst *eine algebraische Function der Variabelen $x, y, z, \ldots$* Er wird eine *algebraische rationale ganze Function der Variabeln $x, y, z, \ldots$* genannt, *wenn die Variabeln nur in den drei ersten Grundoperationen zur Anwendung kommen*, wird dagegen *eine algebraische rationale gebrochene Function der Variabeln $x, y, z, \ldots$* genannt, *wenn die Variabeln in allen vier Grundoperationen zur Anwendung kommen.*

Man erkennt leicht, dass, wenn für die Variabeln $x, y, z, \ldots$ nur *die drei ersten Grundoperationen*, dagegen für die Constanten $a, b, c, \ldots$ alle vier Grundoperationen zugelassen sind, die Variabeln $x, y, z, \ldots$ nur in positiven ganzen Potenzen und in Producten dieser Potenzen erscheinen können. Zu solchen Pro-

ducten kann nur noch ein Factor hinzutreten, der ausschliesslich aus den Constanten a, b, c, .. gebildet ist, und zwar darf dieser Factor die Constanten nach der getroffenen Voraussetzung auch in auszuführender Division enthalten. Da der in Rede stehende Factor nur aus Constanten besteht, so ist er selbst eine constante Grösse; er wird *der Coefficient* des Products von positiven ganzen Potenzen der Variabeln genannt. Auf dieselbe Weise, wie in dem vorigen § geschlossen ist, dass ein rationaler ganzer Ausdruck der Elemente a, b, c, .. f die dort mit (1) bezeichnete Gestalt hat, wird jetzt geschlossen, dass *eine algebraische rationale ganze Function der Variabeln* x, y, z, .. *gleich einem aus einer endlichen Zahl von Gliedern bestehenden Aggregat von der folgenden Beschaffenheit* ist

$$(1) \qquad M x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} .. + M' x^{\lambda'} y^{\mu'} z^{\nu'} .. + ..$$

Die Coefficienten M, M', .. sind constante Grössen, die Exponenten λ, μ, ν, ..; λ', μ', ν', .. positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null. Es darf dabei angenommen werden, dass solche Glieder, die in Bezug auf die sämmtlichen Potenzen der Variabeln übereinstimmen, durch Addition der Coefficienten schon in ein Glied vereinigt sind, und dass daher für je zwei verschiedene in (1) auftretende Glieder die Gleichungen $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, .. nicht zugleich erfüllt sind.

Sobald für die Variabeln x, y, z, .. auch die Division erlaubt ist, so folgt aus den Erörterungen des vorigen § unmittelbar, dass nach Ausführung aller vorgeschriebenen Operationen nur *eine* Division übrig bleibt. Mithin *ist eine algebraische rationale gebrochene Function der Variabeln* x, y, z, .. *stets gleich einem Bruche, dessen Zähler und dessen Nenner eine algebraische rationale ganze Function der Variabeln* x, y, z, .. *ist.*

Eine Function von einer Variable x wird durch die *Characteristik* $f(x)$, eine Function von zwei Variabeln x, y durch die *Characteristik* $f(x, y)$, u. s. f. angedeutet. Eine Gelegenheit, den Begriff einer algebraischen Function und die so eben erwähnte Bezeichnungsweise an Beispielen zu erklären, bietet sich in den folgenden §§.

Capitel II.

Algebraische rationale ganze Functionen mit einer Variable und von einem beliebig hohen Grade. Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten und von einem beliebig hohen Grade.

§ 23. Ganze Function des ersten Grades mit einer Variable. Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten.

Die *algebraischen rationalen ganzen Functionen von einer Variable* x sind der nächste Gegenstand der vorzunehmenden Untersuchung. Vermöge der in (1) des vorigen § gegebenen Darstellung ist eine solche Function gleich dem Aggregat einer *endlichen Zahl* unter einander verschiedener positiver ganzer Potenzen der Variable x, welche in constante Coefficienten multiplicirt sind. Die Potenzen der Variable x können nach der Grösse der Exponenten geordnet werden, so dass die Potenz, deren Exponent der grösseste ist, oder die höchste Potenz beginnt, und die übrigen Potenzen in absteigender Reihe folgen, bis das in x^0 multiplicirte constante Glied den Schluss macht. Auf diese Weise erhält die in Rede stehende Function die Gestalt

(1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Diese Function wird nach dem Exponenten ihrer höchsten Potenz eine *algebraische rationale ganze Function des nten Grades* genannt. Die constanten Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$, deren Anzahl gleich $n+1$ ist, sind an sich keiner Beschränkung unterworfen, weil die Ausführung der drei ersten Grundoperationen, für welche sie allein verwendet werden, keine Einschränkung erfordert. Sobald aber der Nachdruck darauf gelegt wird, dass diese Function in der That vom $n$ten und von keinem niedrigeren Grade sein soll, so muss der Coefficient a_0 nothwendig einen von der Null verschiedenen Werth haben. Diese Voraussetzung möge von jetzt ab gelten, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil erklärt wird.

Eine Function *vom Grade Null* ist gleich der *reinen Constante* a_0 und enthält die Variable x materiell nicht. Die Function

des niedrigsten Grades, in der die Variable x materiell vorkommt, ist *die Function des ersten Grades*

(2) $$f(x) = a_0 x + a_1.$$

Hier erhebt sich sogleich die Frage, ob der Variable x ein Werth ξ beigelegt werden kann, durch dessen Substitution die Function $a_0 x + a_1$ gleich Null wird. Dies ist die Frage nach der Auflösung *der Gleichung des ersten Grades*

(3) $$a_0 \xi + a_1 = 0.$$

Weil der Coefficient a_0 als von der Null verschieden vorausgesetzt ist, so bezeichnet der Bruch

$$-\frac{a_1}{a_0}$$

einen bestimmten Werth, der für ξ genommen $a_0 \xi + a_1$ zu Null macht. Darum hat die Gleichung (3) die *Auflösung*

$$\xi = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es keinen zweiten von ξ verschiedenen Werth giebt, welcher die Gleichung (3) ebenfalls befriedigt. Denn, wenn ein solcher existirte, so würde aus den beiden Gleichungen $a_0 \xi + a_1 = 0$ und $a_0 \alpha + a_1 = 0$ durch Subtraction die Gleichung

$$a_0(\alpha - \xi) = 0$$

folgen. Nun kann aber nach § 16 *ein Product von zwei Grössen nicht verschwinden, wenn jeder der beiden Factoren von Null verschieden ist.* Der erste Factor a_0 ist nach der allgemein geltenden Voraussetzung von Null verschieden; folglich muss der zweite Factor $\alpha - \xi$ gleich Null sein. Darum sind die Werthe α und ξ nothwendig einander gleich, und das war behauptet worden. Ein Werth ξ, welcher eine mit demselben gebildete Gleichung befriedigt, heisst *eine Wurzel der Gleichung.* Es hat sich also gezeigt, *dass für die Gleichung des ersten Grades* (3) *immer eine und nur eine Wurzel vorhanden ist, nämlich die Wurzel*

(4) $$\xi = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Dieser Satz hat für die Function des ersten Grades (2) die Bedeutung, dass dieselbe für einen und nur für einen Werth der Variable x, das ist, für den Werth $x = \xi$ gleich Null wird. Die Function des ersten Grades (2) lässt sich nun auch in die

Gestalt bringen $a_0 x + a_0 \frac{a_1}{a_0}$, welche vermöge der Gleichung (4) in den Ausdruck

$$(5) \qquad a_0(x-\xi)$$

übergeht. Dieser Ausdruck ist geeignet, den im vorigen § eingeführten Begriff einer algebraischen Function zu erläutern. Von den beiden Factoren des Products $a_0(x-\xi)$ ist der erste constant und von Null verschieden, der zweite dagegen nimmt, sobald die Variable x gleich einer bestimmten Grösse gesetzt wird, einen bestimmten zugehörigen Werth und, sobald der Variable x nach und nach andere Werthe beigelegt werden, seinerseits ebenfalls bestimmte aber nach und nach andere Werthe an. Giebt man der Variable x Werthe, die grösser sind als ξ, so wird der zweite Factor positiv, giebt man der Variable x Werthe, die kleiner sind als ξ, so wird der zweite Factor negativ. Weil das Product einer von Null verschiedenen Grösse a_0 in einen positiven Factor das Vorzeichen von a_0 behält, dagegen das Product der Grösse a_0 in einen negativen Factor das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, so bekommt die Function (2), die dem Ausdrucke (5) gleich ist, für die Werthe von x der ersten Art das Vorzeichen der Grösse a_0, dagegen für die Werthe von x der zweiten Art das der Grösse a_0 entgegengesetzte Vorzeichen. Zwischen den Werthen der ersten Art und den Werthen der zweiten Art liegt der einzige Werth $x=\xi$, der die Function (2) zum Verschwinden bringt.

Um ein Beispiel zu geben, sei die Function des ersten Grades (2) die folgende

$$f(x) = 2x - 3.$$

Dann hat die Gleichung des ersten Grades

$$2\xi - 3 = 0$$

die eine und nur die eine Wurzel $\xi = \frac{3}{2}$. Hieraus entspringt für die Function $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Für jeden Werth von x, welcher grösser ist als $\frac{3}{2}$, wird $f(x)$ gleich einer positiven Grösse, für jeden Werth von x, welcher kleiner ist als $\frac{3}{2}$, wird $f(x)$ gleich einer negativen Grösse, und

nur für den Werth $x = \frac{3}{2}$ gleich der Null. Der Gebrauch der *Characteristik* $f(x)$ besteht darin, dass die betreffenden Werthe der Variable x an die Stelle von x in die Klammer gesetzt werden. Wenn die Variable x nach und nach gleich den Grössen $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt wird, so entstehen für die obige Function $f(x)$ die folgenden zugehörigen Werthe

$$\begin{aligned} f(-2) &= -7 \quad < 0 \\ f(-1) &= -5 \quad < 0 \\ f(0) &= -3 \quad < 0 \\ f(1) &= -1 \quad < 0 \\ f(2) &= +1 \quad > 0 \\ f(3) &= +3 \quad > 0, \end{aligned}$$

wo die Zeichen der Ungleichheit nach den Definitionen des § 20 angewendet sind.

Auch für die allgemeine Function des ersten Grades $a_0 x + a_1$ leuchtet es ein, dass, sobald die Variable x der Reihe nach gleich den positiven und negativen natürlichen Zahlen, von der Null anfangend, gesetzt wird, zwei zugehörige aufeinander folgende Werthe der Function beständig die Differenz a_0 haben. Eine Reihe, bei der je zwei aufeinander folgende Glieder immer dieselbe Differenz zeigen, heisst *eine arithmetische Reihe.* Demnach bilden die Werthe

$$\ldots -2a_0 + a_1, \ -a_0 + a_1, \ a_1, \ a_0 + a_1, \ 2a_0 + a_1, \ \ldots$$

eine nach beiden Seiten unbegrenzt fortschreitende *arithmetische Reihe* mit *der Differenz* a_0.

§ 24. Ganze Function des zweiten Grades mit einer Variable. Gleichung des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Bei *der Function des zweiten Grades von der Variable* x

(1) $$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

ist nun wieder die Frage zu beantworten, ob es Werthe $x = \xi$ giebt, für welche $f(\xi) = 0$ wird, oder die Frage nach der Auflösung *der Gleichung des zweiten Grades*

(2) $$a_0 \xi^2 + a_1 \xi + a_2 = 0.$$

Wir halten uns hier an die Betrachtung der Function $f(x)$ und bemerken, dass dieselbe, da a_0 von Null verschieden vorausgesetzt ist, gleich dem Ausdrucke $a_0\left(x^2 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0}\right)$ gesetzt

werden darf. In der Function $x^2 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0}$ wird das Aggregat der beiden ersten Glieder mit Hinzufügung des Quadrates $\frac{a_1^2}{4 a_0^2}$ gleich dem Quadrat von dem Ausdrucke $x + \frac{a_1}{2 a_0}$. Auf diese Weise entsteht für die Function $x^2 + \frac{a_1 x}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}$ die Darstellung

$$(4) \qquad \left(x + \frac{a_1}{2 a_0}\right)^2 + \frac{4 a_0 a_2 - a_1^2}{4 a_0^2}$$

und für die Function $f(x)$ die entsprechende Darstellung

$$(5) \qquad a_0 \left(\left(x + \frac{a_1}{2 a_0}\right)^2 + \frac{4 a_0 a_2 - a_1^2}{4 a_0^2}\right).$$

Das Verschwinden von $f(x)$ ist nur dadurch möglich, dass der Ausdruck (4) gleich Null wird und mit dem letzteren Ausdruck verhält es sich folgendermassen. Der erste Summand hat als das *Quadrat* des Ausdruckes $x + \frac{a_1}{a_0}$ die Eigenschaft, *sobald dieser Ausdruck einen positiven oder negativen Werth erhält, positiv* zu sein und nur dann gleich *Null* zu werden, sobald dieser Ausdruck *den Werth Null* annimmt. Daher kann der erste Summand *niemals negativ* werden. Dagegen ist der zweite Summand, welcher einen constanten Werth hat, entweder *negativ*, oder gleich *Null*, oder *positiv*, und zwar hängt dies lediglich von der im Zähler befindlichen Verbindung

$$(6) \qquad 4 a_0 a_2 - a_1^2$$

ab, da der Nenner $4 a_0^2$ als ein volles Quadrat stets das positive Vorzeichen hat.

Im ersten Falle ist $\frac{-4 a_0 a_2 + a_1^2}{4 a_0^2}$ eine positive Grösse, und nach dem letzten § des ersten Abschnittes giebt es immer eine positive zweite Wurzel oder Quadratwurzel aus dieser Grösse; sie heisse

$$(7) \qquad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{-4 a_0 a_2 + a_1^2}{4 a_0^2}};$$

dadurch nimmt der Ausdruck (4) die Gestalt

$$(8) \qquad \left(x + \frac{a_1}{2 a_0}\right)^2 - \mathfrak{B}^2.$$

Im zweiten Falle ist $\frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0^2} = 0$, und daher wird der Ausdruck (4) gleich

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2. \tag{9}$$

Im dritten Falle existirt aus dem erwähnten Motiv eine positive Quadratwurzel aus der positiven Grösse $\frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0^2}$, die mittelst des Zeichens

$$B = \sqrt{\frac{4a_0a_1 - a_2^2}{4a_0^2}} \tag{10}$$

notirt werden soll; dann wird der Ausdruck (4) gleich dem Ausdrucke

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + B^2. \tag{11}$$

Der Ausdruck (8) ist *eine Differenz von zwei Quadraten*, der Ausdruck (9) *ein einziges Quadrat*, der Ausdruck (11) *die Summe von zwei Quadraten.*

Nun lässt sich jede *Differenz von zwei Quadraten* $p^2 - q^2$ als das Product der beiden Factoren $(p-q)(p+q)$ darstellen. Demnach wird der Ausdruck (8) gleich dem Product von zwei Factoren

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_0} - \mathfrak{B}\right)\left(x + \frac{a_1}{2a_0} + \mathfrak{B}\right), \tag{12}$$

deren jeder die Variable x nur in der ersten Potenz enthält. Dieses Product verschwindet, sobald einer seiner Factoren verschwindet, und das geschieht beziehungsweise bei dem ersten und bei dem zweiten Factor, je nach dem x einen der beiden Werthe ξ_1 oder ξ_2 erhält,

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \mathfrak{B}, \quad \xi_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - \mathfrak{B}. \tag{13}$$

Diese beiden Werthe sind *von einander verschieden,* weil ihre Differenz den Werth

$$\xi_1 - \xi_2 = 2\mathfrak{B} \tag{14}$$

hat, und $2\mathfrak{B}$ *nicht gleich Null* ist. Diese beiden Werthe sind *Wurzeln der Gleichung* (2), und ausser denselben kann keine Wurzel α vorhanden sein, wie sich sogleich zeigen wird. Durch die Einsetzung einer solchen Grösse α für x müsste das Product (12) verschwinden. Weil aber in dem entstehenden Product

$$\left(\alpha + \frac{a_1}{a_0} - \mathfrak{B}\right)\left(\alpha + \frac{a_1}{a_0} + \mathfrak{B}\right)$$

der erste Factor nicht gleich Null ist, da $\alpha - \xi_1$ nicht gleich Null sein soll, und der zweite Factor nicht gleich Null ist, da auch $\alpha - \xi_2$ nicht gleich Null sein soll, so kann das Product selbst nicht verschwinden, und die Annahme, dass ausser ξ_1 und ξ_2 noch eine Wurzel α vorhanden sei, ist unzulässig. *Die quadratische Gleichung* (2) *hat also die beiden von einander verschiedenen Wurzeln* ξ_1 *und* ξ_2, *und nur diese, sobald die Verbindung* $4a_0a_2 - a_1^2$ *negativ ist.*

Der Ausdruck (9) ist das Quadrat der Basis $x + \frac{a_1}{a_0}$ und verschwindet daher nur mit dieser Basis zusammen, das heisst für den einen Werth

(15) $$\xi = -\frac{a_1}{2a_0}.$$

Die quadratische Gleichung (2) *hat demnach, sobald die Verbindung* $4a_0a_2 - a_1^2 = 0$ *ist, nur diese eine Wurzel.*

Ein durchaus anderes Verhalten zeigt der Ausdruck (11). Denn weil in diesem Aggregat das Quadrat B^2 die Null übertrifft, und das Quadrat $\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2$ nur entweder positiv oder gleich Null werden kann, so ist *die Summe der beiden Quadrate* mit Nothwendigkeit grösser als Null und kann daher überhaupt *nicht zum Verschwinden gebracht werden. Also lässt sich die Gleichung* (2) *nicht befriedigen, wofern die Verbindung* $4a_0a_2 - a_1^2$ *positiv ist.*

Wenn die drei unterschiedenen Gestalten (8), (9), (11) des Ausdruckes (4) in (5) eingesetzt werden, so entstehen für die Function $f(x)$ die drei entsprechenden Darstellungen

(16) $$\begin{cases} f(x) = a_0\left(\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \mathfrak{B}^2\right) \\ f(x) = a_0\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 \\ f(x) = a_0\left(\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + B^2\right). \end{cases}$$

Auf die drei hervorgehobenen Fälle beziehen sich die drei Beispiele

$$(17)\quad \begin{cases} x^2+x-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \\ 2x^2-12x+18=2(x-3)^2 \\ x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}. \end{cases}$$

In dem ersten ist $\mathfrak{B}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$, ferner $\xi_1=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\xi_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, in dem zweiten $\xi=3$, in dem dritten $B=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

§ 25. Bedingungen für die Zerlegung einer Function des zweiten Grades einer Variable in ein Product von zwei Factoren des ersten Grades.

In den beiden Fällen, in denen die Function des zweiten Grades $f(x)$ überhaupt gleich Null werden kann, sind die Wurzeln der Gleichung $f(\xi)=0$ durch die Betrachtung der Function $f(x)$ gefunden worden. Wenn man die im vorigen § gethanen Schritte in umgekehrter Ordnung wiederholt, und die Gleichungen (13) mit dem Ausdrucke (12), die Gleichung (15) mit dem Ausdrucke (9) verbindet, so entstehen für den dortigen Ausdruck (4) oder für die Function $x^2+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}$ respective die beiden Darstellungen

$$(1)\qquad (x-\xi_1)(x-\xi_2)$$

und

$$(2)\qquad (x-\xi)^2,$$

welche für einen *beliebigen oder unbestimmten Werth der Variable* x gelten. Beide sind *Producte von zwei Factoren des ersten Grades in Bezug auf die Variable* x, und jeder Factor ist gleich der um eine Gleichungswurzel verminderten Variable x; in (1), wo es zwei verschiedene Wurzeln ξ_1 und ξ_2 giebt, sind mit diesen die beiden von einander verschiedenen Factoren $x-\xi_1$ und $x-\xi_2$ gebildet; in (2), wo es nur eine Wurzel ξ giebt, ist mit ξ der Ausdruck $x-\xi$ gebildet, und es sind die beiden gleichen Factoren $x-\xi$ zu einem Quadrate vereinigt.

Der Ausdruck (4) des vorigen § kann nun in dem dritten Falle, *in dem derselbe unfähig ist zu verschwinden, auch nicht für einen beliebigen oder unbestimmten Werth von* x *als ein Product von zwei Factoren des ersten Grades*

(3) $$(x-\alpha)(x-\beta)$$

ausgedrückt werden, wo α und β irgend welche Constanten bedeuten sollen. Denn gesetzt, dies wäre der Fall, so würde das Product (3) sowohl durch den Werth $x=\alpha$, wie auch durch den Werth $x=\beta$ gleich Null werden, was der Voraussetzung widerspricht. Wir sahen in dem vorigen §, dass die Unterscheidung der in Rede stehenden drei Fälle von der dortigen Verbindung (6) abhängt. Durch Zusammenfassung der Resultate, die den drei Fällen zugehören, entsteht daher der Satz, *dass die Function des zweiten Grades* $x^2+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}$ *in zwei Factoren des ersten Grades* $(x-\alpha)$ *und* $(x-\beta)$ *zerlegt werden kann, sobald die Verbindung* $4a_0a_2-a_1^2$ *negativ oder gleich Null ist, jedoch nicht in ein solches Product zerlegt werden kann, sobald die Verbindung* $4a_0a_2-a_1^2$ *positiv ist.* Auf diese Weise kann unter den Beispielen (17) des vorigen § die Function x^2+x-1 und die Function x^2-6x+9 in zwei Factoren des ersten Grades zerlegt werden, dagegen ist dies bei der Function x^2+x+1 nicht möglich.

Das Charakteristische der Unterschiede, welche hier offenbar werden, liegt in der Thatsache, auf die im vorigen § aufmerksam gemacht worden ist, dass die Funktion $x^2+\frac{a_1x}{a_0}+\frac{a_2}{a_0}$ je nach den drei auftretenden Fällen *gleich einer Differenz von zwei Quadraten, gleich einem einzigen Quadrate*, oder *gleich einer Summe von zwei Quadraten ist. Eine Differenz von zwei Quadraten* a^2-b^2 *ist*, wie dort erwähnt, *gleich dem Product der Factoren* $a-b$ und $a+b$, *welche sowohl in Bezug auf* a *wie in Bezug auf* b *vom ersten Grade sind. Das Quadrat* a^2 *ist gleich dem Producte der beiden gleichen Factoren* a. *Die Summe von zwei Quadraten* a^2+b^2 *kann dagegen nicht gleich einem Product von zwei Factoren sein, die in Bezug auf* a *und in Bezug auf* b *vom ersten Grade sind, wie* $\lambda a+\mu b$ *und* $\nu a+\varrho b$, *wo* λ, μ, ν, ϱ *beliebige von* a *und* b *unabhängige Werthe bedeuten.* Denn die Summe von zwei Quadraten a^2+b^2 kann nicht zu Null gemacht werden, ausser indem sowohl a als b gleich Null genommen wird. Sollte aber

(4) $$a^2+b^2=(\lambda a+\mu b)(\nu a+\varrho b)$$

sein, so würde daraus ein Widerspruch entstehen; denn der Ausdruck der rechten Seite kann immer zum Verschwinden gebracht werden, *ohne dass gleichzeitig a und b gleich Null genommen* werden, und zwar dadurch, dass man einen der beiden Factoren, etwa den ersten $\lambda a + \mu b$ zum Verschwinden bringt. In dem Factor $\lambda a + \mu b$ dürfen nicht λ und μ zugleich gleich Null sein, weil der Factor sonst immer gleich Null wäre. Ist nun λ allein gleich Null, so verschwindet $\lambda a + \mu b$, indem man a einen *beliebigen von Null verschiedenen* Werth und b den Werth Null beilegt. Ist μ allein gleich Null, so verschwindet $\lambda a + \mu b$, indem man a den Werth Null und b einen *beliebigen von Null verschiedenen* Werth beilegt. Sind weder λ noch μ gleich Null, so verschwindet $\lambda a + \mu b$, wofern man die Werthe von a und b so annimmt, dass $\frac{b}{a} = -\frac{\lambda}{\mu}$ wird. Also führt die Annahme (4) in allen vorhandenen Fällen auf den Widerspruch, dass die linke Seite nur verschwinden kann, indem sowohl $a = 0$ als $b = 0$ genommen wird, die rechte Seite dagegen auch auf andere Arten zu Null gemacht werden kann.

§ 26. Einführung der Rechnung mit reellen und imaginären oder mit complexen Grössen. Addition, Subtraction, Multiplication der complexen Grössen.

Da es sich *als unmöglich* herausstellt, die Summe von zwei Quadraten $a^2 + b^2$ als ein Product von zwei Factoren darzustellen, die in Bezug auf a und auf b vom ersten Grade sind, so hat man *ein Rechenzeichen* und *ein zugehöriges Rechenverfahren* ersonnen, wodurch eine solche Darstellung der *Form* nach erhalten wird.

Wenn z irgend eine veränderliche Grösse bedeutet, so ist der Ausdruck $a^2 - b^2 z^2$ gleich dem Product von zwei Factoren $(a - bz)(a + bz)$. Sobald nun festgesetzt wird, dass z ein Rechenzeichen vorstellen soll, und dass, nachdem mit diesem Rechenzeichen ein Product aus zwei Factoren $a - bz$ und $a + bz$ vermöge der für die Multiplication zweier Ausdrücke geltenden formellen Regeln gebildet ist, in dem Resultat das Quadrat des Rechenzeichens z durch die negative Einheit ersetzt wird, so geht durch diese Substitution der Form nach das erhaltene Produkt $(a - bz)(a + bz)$ in den Ausdruck $a^2 + b^2$ über.

Ein solches zu dem genannten Behufe eingeführtes Rechenzeichen ist die aus der negativen Einheit gezogene Quadratwurzel

$$i=\sqrt{-1},$$

und mit Hülfe dieses Rechenzeichens, dessen Quadrat immer durch die negative Einheit ersetzt werden muss, entsteht die formelle Zerlegung der Summe a^2+b^2 in ein Product von zwei Factoren

(1) $$a^2+b^2=(a-bi)(a+bi)\,.$$

Das Rechenzeichen i heisst eine imaginäre Einheit, das Product einer bestimmten positiven oder negativen Grösse b in die imaginäre Einheit oder bi eine rein imaginäre Grösse, im Gegensatze hierzu heisst eine bestimmte positive oder negative Grösse a eine reelle Grösse, ferner wird die Summe einer reellen Grösse a und einer rein imaginären Grösse bi eine complexe Grösse genannt.

Die Regeln für die *Grundoperationen der Rechnung mit complexen Grössen* müssen so beschaffen sein, dass sie die Gleichung (1) nach sich ziehen. Sie müssen daher der Form nach aus den Regeln für die Grundoperationen der Rechung mit beliebigen reellen Grössen abgeleitet werden, während die Regel hinzukommt, dass überall das Zeichen i^2 durch die negative Einheit zu ersetzen ist. *Demzufolge darf das Gleichsein von zwei complexen Grössen*

$$a+bi=a'+b'i$$

keine andere Bedeutung haben, als dass der reelle Theil a gleich dem reellen Theile a', und der rein imaginäre Theil bi gleich dem rein imaginären Theile $b'i$, das heisst, die reelle Grösse b gleich der reellen Grösse b' ist. Eine andere Auffassung einer solchen Gleichung würde den Widersinn in sich schliessen, dass i gleich einer reellen Grösse würde, während das Quadrat einer reellen Grösse stets positiv ist und daher die vorgeschriebene Gleichung $i^2=-1$ nicht befriedigen kann. *Nach der gegenwärtigen Bestimmung ist eine complexe Grösse $a+bi$ gleich Null und nur dann gleich Null, wenn sowohl $a=0$ wie auch $b=0$ ist.*

Die Addition und die Subtraction von zwei complexen Grössen sind so auszuführen, dass respective die reellen Bestandtheile und die Factoren von i addirt und subtrahirt werden. Man hat also für die *Summe* und die *Differenz* von zwei complexen Grössen $a+bi$ und $c+di$ die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i. \end{cases}$$

Die Bildung einer Summe complexer Grössen ist demnach von der Anordnung der Summanden unabhängig. Die Differenz $(a+bi)-(c+di)$ *verschwindet ferner dann und nur dann, wenn die complexen Grössen* $a+bi$ *und* $c+di$ *einander gleich sind.*

Die Multiplication von zwei complexen Grössen $a+bi$ *und* $c+di$ *erfolgt nach der Gleichung.*

$$(3) \qquad (a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i.$$

Die rechte Seite ist entstanden, indem das Product formell ausgeführt und der Bestandtheil bdi^2 durch $-bd$ ersetzt ist. Die Gleichung (3) hat die Eigenschaft, dass wenn $a+bi$ mit $c+di$, das heisst, wenn a mit c und zugleich b mit d vertauscht wird, die rechte Seite ungeändert bleibt. *Auf solche Weise schliesst man, dass ein Product zweier complexer Grössen und auch ein Product mehrerer complexer Grössen von der Anordnung seiner Factoren unabhängig ist.*

Die aufgestellten Regeln für die Addition, Subtraction und Multiplication complexer Grössen sind von der Art, dass, wenn man dieselben auf die beiden Seiten von gültigen zwischen complexen Grössen bestehenden Gleichungen anwendet, wieder richtige zwischen complexen Grössen bestehende Gleichungen hervorgehen. Um diese Behauptung zu beweisen, muss gezeigt werden, dass aus zwei Gleichungen $a+bi=a'+b'i$, $c+di=c'+d'i$ bei der *Addition*, der *Subtraction* und der *Multiplication* die Gleichungen

$$(a+bi)+(c+di)=(a'+b'i)+(c'+d'i)$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a'+b'i)-(c'+d'i)$$
$$(a+bi)(c+di)=(a'+b'i)(c'+d'i)$$

folgen. Nun haben die beiden vorausgesetzten Gleichungen $a+bi=a'+b'i$ und $c+di=c'+d'i$ den Inhalt, dass zu gleicher Zeit $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$ ist, die abgeleiteten Gleichungen bedeuten aber zufolge der in (2) und (3) enthaltenen Definitionen foldendes: die erste, dass $a+c=a'+c'$, $b+d=b'+d'$, die zweite, dass $a-c=a'-c'$, $b-d=b'-d'$, die dritte, dass $ac-bd=a'c'-b'd'$, $bc+ad=b'c'+a'd'$ ist. Diese Gleichungen sind richtige Conclusionen aus den vorausgesetzten; daher ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Es fragt sich, ob nach der gegebenen Definition des Pro-

ducts von zwei complexen Grössen auch der Satz bestehen bleibt, *dass ein Product dann und nur dann gleich Null wird, wenn einer seiner Factoren gleich Null ist.*

Um den Inhalt dieses Satzes deutlich zu machen, wollen wir die Beziehungen zwischen reellen Grössen aufsuchen, welche derselbe ausdrückt. Das Product der complexen Grössen $(a+bi)$ und $(c+di)$ wird durch die rechte Seite der Gleichung (3) dargestellt. Diese complexe Grösse ist gleich Null, wenn bei derselben der reelle Theil und der Factor von i gleich Null sind, dass heisst, wenn die beiden Gleichungen

(4) $$ac-bd=0,\ bc+ad=0$$

befriedigt sind. Das Verschwinden der complexen Grösse $a+bi$ setzt die beiden Gleichungen

(5) $$a=0,\ b=0$$

das der complexen Grösse $c+di$ die beiden Gleichungen

(6) $$c=0,\ d=0$$

voraus.

Dass das Product $(a+bi)(c+di)$ verschwinden muss, sobald der Factor $a+bi$ oder der Factor $c+di$ verschwindet, leuchtet sofort ein; denn sowohl die beiden Gleichungen (5) wie auch die beiden Gleichungen (6) bewirken das Verschwinden von $ac+bd$ und von $bc+ad$. Damit aber das Product $(a+bi)(c+di)$ *nur* dann gleich Null werden kann, wenn einer der beiden Factoren gleich Null ist, müssen die beiden Gleichungen (4) die nothwendige Folge haben, dass *entweder* die beiden Gleichungen (5) *oder* die beiden Gleichungen (6) befriedigt sind.

Diese Folge besteht allerdings; sie beruht auf einer Grundeigenschaft der Summen von zwei Quadraten, welche so lautet: *Werden zwei Summen von zwei Quadraten a^2+b^2 und c^2+d^2 mit einander multiplicirt, so ist ihr Product vermöge der Gleichung*

(7) $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

ebenfalls gleich einer Summe von zwei Quadraten.

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich, indem die beiden Quadrate der rechten Seite wirklich gebildet, die Producte $-2acbd$ und $2bcad$ gegen einander fortgehoben und die vier Glieder der Summe $a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$ zu der Summe $(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2$ vereinigt werden. Sobald nun

zwischen den reellen Grössen a, b, c, d die beiden Gleichungen $ac - bd = 0$ und $bc + ad = 0$ gelten, so verschwindet die Quadratsumme auf der rechten Seite von (7), und die linke Seite von (7) muss ebenfalls gleich Null sein. *Diese ist das Product der beiden reellen Factoren* $(a^2 + b^2)$ *und* $(c^2 + d^2)$. Für ein Product von zwei reellen Grössen ist in § 16 der Satz bewiesen, dass dasselbe nicht verschwinden kann, wenn jeder der beiden Factoren von Null verschieden ist. Folglich muss entweder der Factor $a^2 + b^2$, oder der Factor $c^2 + d^2$ gleich Null sein. Nun kann die Summe der Quadrate von zwei reellen Grössen nicht gleich Null sein, ausser wenn die Basen beider Quadrate gleich Null sind. Daher zieht die Annahme $a^2 + b^2 = 0$ die beiden Gleichungen (5) $a = 0$ und $b = 0$, die Annahme $c^2 + d^2 = 0$ die beiden Gleichungen (6) $c = 0$ und $d = 0$ nach sich. *Deshalb folgt aus dem Verschwinden des Products* $(a + bi)(c + di)$ *entweder das Verschwinden des Factors* $a + bi$ *oder das Verschwinden des Factors* $c + di$ und das war der noch zu beweisende Theil des in Rede stehenden Satzes.

§ 27. Division der complexen Grössen. Einheiten auf dem Gebiete der complexen Grössen.

Jetzt kann auch der Begriff der *Division* auf complexe Grössen ausgedehnt werden. *Wenn* $a + bi$ *eine beliebige complexe Grösse bedeutet und* $c + di$ *eine complexe Grösse, die nicht gleich Null ist, so giebt es eine und nur eine Grösse* $r + si$, *welche mit der complexen Grösse* $c + di$ *multiplicirt gleich der complexen Grösse* $a + bi$ *wird. Diese complexe Grösse* $r + si$ *ist gleich dem Ausdrucke* $(a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right)$ *und wird als der Quotient bei der Division des Dividendus* $a + bi$ *durch den Divisor* $c + di$ *oder als der Bruch*

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

bezeichnet.

Die Voraussetzung, dass $c + di$ eine von Null verschiedene complexe Grösse sei, muss deshalb getroffen werden, weil das Product jeder complexen Grösse $r + si$ und der Null gleich der Null ist, mithin das Product $(r + si)(c + di)$ niemals gleich einer von der Null verschiedenen complexen Grösse $a + bi$ werden

kann. Bei der geltenden Voraussetzung, dass $c + di$ nicht gleich Null ist, kann auch die Quadratsumme $c^2 + d^2$ nicht gleich Null sein, und deshalb ist in dem obigen Ausdrucke $(a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right)$ die mit der reellen Grösse $c^2 + d^2$ auszuführende Division durchaus gerechtfertigt. Weil ferner bei der Multiplication dieses Ausdruckes mit der Grösse $c + di$ zuerst das Product der beiden Factoren

$$\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right)(c + di)$$

gebildet werden darf und weil dieses Product nach der Regel (3) des vorigen § gleich $\frac{c^2}{c^2 + d^2} + \frac{d^2}{c^2 + d^2}$, das ist, gleich der Einheit wird, so liefert die Multiplication des Ausdruckes $(a + b\,i)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right)$ mit der Grösse $(c + di)$ in der That die verlangte Grösse $a + bi$.

Eine von dem angegebenen Ausdrucke $r + si$ verschiedene complexe Grösse $r' + s' i$ kann die bezeichnete Forderung deshalb nicht erfüllen, weil aus der Annahme der beiden Gleichungen

$$(r + si)(c + di) = a + bi$$
$$(r' + s'i)(c + di) = a + bi$$

durch *Subtraction* die Gleichung

$$(r + si - r' - s'i)(c + di) = 0$$

folgen würde. Das Product der linken Seite müsste gleich Null sein, und dieser Umstand zieht nach dem am Schlusse des vorigen § bewiesenen Satze mit Nothwendigkeit das Verschwinden von einem der beiden Factoren nach sich; der Factor $c + di$ ist als von Null verschieden vorausgesetzt, folglich müsste der andere Factor

$$r + si - r' - s' i$$

gleich Null sein, und das heisst gerade, dass die complexen Grössen $r + si$ und $r' + s' i$ einander gleich sind.

Für die gegebene Definition der Division von zwei complexen Grössen lässt sich genau wie für die drei ersten Grundoperationen beweisen, dass aus zwei Gleichungen

$$a + bi = a' + b'i, \quad c + di = c' + d'i$$

die Gleichheit der beiden Quotienten folgt

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a'+b'i}{c'+d'i}.$$

Daher ist es gestattet, auf die beiden Seiten von gültigen zwischen complexen Grössen bestehenden Gleichungen gemäss den gegebenen Definitionen die vier Grundoperationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens anzuwenden.

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtung war die Gleichung (1) des vorigen §

$$a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi).$$

Die beiden complexen Grössen, in welche hier die Summe der Quadrate $a^2 + b^2$ zerlegt wird, haben denselben reellen Theil, während die Factoren von i in dem imaginären Theile gleich und entgegengesetzt sind. Aus der Grösse $a + bi$ entsteht durch Umkehrung des Vorzeichens von b die Grösse $a - bi$, und durch dasselbe Verfahren verwandelt sich $a - bi$ in $a + bi$ zurück. *Zwei complexe Grössen, welche dieselbe Beziehung zu einander haben, wie $a + bi$ und $a - bi$, heissen zu einander conjugirt. Eine reelle Grösse ist sich selbst conjugirt, und wenn eine complexe Grösse $c + di$ der complexen Grösse $c - di$, mit welcher sie conjugirt ist, auch gleich ist, so muss sie reell sein.* Denn aus der Gleichung

$$c + di = c - di$$

folgt für c keine Bestimmung, dagegen folgt, dass $2d$, mithin auch d gleich Null sein muss. *Eine rein imaginäre Grösse ist der ihr entgegengesetzten conjugirt, und wenn eine complexe Grösse $c + di$, zu der ihr conjugirten Grösse $c - di$ addirt, die Summe Null liefert, so muss sie rein imaginär sein.* Denn aus der Gleichung

$$c + di + c - di = 0$$

folgt für d keine Bestimmung, dagegen folgt, dass $2c$, also auch c gleich Null sein muss. *Das Product einer complexen Grösse $c + di$ in die ihr conjugirte $c - di$ ist die Summe der reellen Quadrate $c^2 + d^2$, mithin immer eine positive Grösse, und nur dann gleich Null, wenn $c + di = 0$ ist; dasselbe heisst die Norm der complexen Grösse $c + di$. Die positive Quadratwurzel aus der Norm $\sqrt{c^2 + d^2}$ wird der analytische Modul der complexen Grösse $c + di$ genannt.* Die conjugirten Grössen $c + di$ und $c - di$ haben demnach *dieselbe Norm* und *denselben analytischen Modul.*

Wenn man jeder von zwei beliebigen complexen Grössen $a + b\,i$ und $c + d\,i$ respective die derselben conjugirte complexe Grösse $a - b\,i$ und $c - d\,i$ gegenüberstellt, und von den Grössen $a - b\,i$ und $c - d\,i$ nach den aufgestellten Regeln die Summe, die Differenz, das Product, und unter der Voraussetzung, dass $c^2 + d^2$ nicht gleich Null ist, auch den Quotienten nimmt, so zeigen die resultirenden Ausdrücke

$$(1) \qquad (a - b\,i) + (c - d\,i) = a + c - (b + d)\,i$$

$$(2) \qquad (a - b\,i) - (c - d\,i) = a - c - (b - d)\,i$$

$$(3) \qquad (a - b\,i)\,(c - d\,i) = a\,c - b\,d - (a\,d + b\,c)\,i$$

$$(4) \qquad \frac{a - b\,i}{c - d\,i} = (a - b\,i)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} + \frac{d}{c^2 + d^2}\,i\right),$$

mit den für $a + b\,i$ und $c + d\,i$ gebildeten entsprechenden Ausdrücken verglichen, dass jedesmal der reelle Theil der gleiche, der Factor von i in dem rein imaginären Theile der entgegengesetzte ist. Durch die wiederholte Anwendung dieser Beobachtung entsteht der folgende allgemeine Satz. *Wenn aus einer beliebigen aber beschränkten Anzahl von complexen Grössen $a + b\,i$, $c + d\,i$, $e + f\,i$, .. durch eine beliebige aber beschränkte Anzahl von Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens ein Resultat abgeleitet wird, das nach der Trennung des reellen und imaginären Theiles gleich der complexen Grösse $r + s\,i$ ist, und wenn hierauf mit den zu den gegebenen conjugirten Grössen $a - b\,i$, $c - d\,i$, $e - f\,i$, .. dieselbe Reihe von Operationen ausgeführt wird, so ist das hervorgehende Resultat gleich der zu $r + s\,i$ conjugirten Grösse $r - s\,i$.*

Ein aus gegebenen complexen Elementen auf die bezeichnete Weise erhaltener Ausdruck bildet eine Verallgemeinerung der Ausdrücke, welche durch die entsprechenden Operationen aus reellen Elementen gebildet werden, und von denen der Eingang dieses Abschnittes handelt. Sobald die complexen Grössen $a + b\,i$, $c + d\,i$, $e + f\,i$, .. nur durch die drei ersten Grundoperationen verbunden werden, so entsteht ein *algebraischer rationaler ganzer Ausdruck dieser Elemente*; wofern auch die Division benutzt wird, entsteht *ein algebraischer rationaler gebrochener Ausdruck dieser Elemente.*

Wenn die Gleichung (3) des gegenwärtigen § und die Gleichung (3) des vorigen § verbunden werden, indem man die

conjugirten Factoren der linken Seite und die conjugirten Ausdrücke der rechten Seite mit einander multiplicirt, so erhält man die Gleichung (7) des vorigen §

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.$$

Ich habe es aber vorgezogen, diese Gleichung zuerst durch Operationen abzuleiten, die sich ausschliesslich auf dem Gebiete der reellen Grössen bewegen, weil ich die Gültigkeit dieser Gleichung als eine Thatsache ansehe, auf welche sich die Theorie der complexen Grössen stützt, und für die aus dieser Theorie zwar ein Beweis aber keine Erklärung entnommen werden kann. Nach der eingeführten Terminologie lässt sich der Inhalt der Gleichung so aussprechen, *dass die Norm des Products von zwei complexen Grössen gleich dem Product der Normen der beiden Factoren ist.*

Um sich das Wesen der complexen Grössen leichter verständlich zu machen, kann man bei ihrer Betrachtung einen Gang einschlagen, der sich dem im ersten Abschnitte für die reellen Grössen genommenen Gange anschliesst. Es mögen zuerst nur solche complexe Grössen gebildet werden, bei denen der reelle Theil und der Factor von i positive oder negative ganze Zahlen sind; aus complexen Grössen von dieser Eigenschaft $a + bi$, $c + di$, $e + fi$, .. kann durch Anwendung der drei ersten Grundoperationen nur eine complexe Grösse $r + si$ entstehen, bei der r und s wieder positive oder negative ganze Zahlen sind. Es mögen zweitens nur solche complexe Grössen gebildet werden, bei denen der reelle Theil und der Factor von i positive oder negative rationale Brüche sind; aus complexen Grössen von dieser Eigenschaft $a + bi$, $c + di$, $e + fi$, .. kann durch Anwendung der vier Grundoperationen nur eine complexe Grösse $r + si$ entstehen, bei der r und s positive oder negative rationale Brüche sind. Zu einer dritten Gattung gehören die complexen Grössen, bei denen entweder der reelle Theil oder der Factor von i eine irrationale Grösse ist, oder beide irrationale Grössen sind. *Gauss* hat eine complexe Grösse $a + bi$, bei der a und b positive oder negative ganze Zahlen sind, eine *complexe ganze Zahl*, eine complexe Grösse $a + bi$, bei der a und b positive oder negative rationale Brüche sind, eine *complexe rationale Zahl* genannt und eine Theorie dieser Zahlen gegründet.

Die vorhin berührte Gleichung (7) des vorigen § drückt, wenn a, b, c, d, ganze Zahlen sind, den Satz aus, dass das Product von zwei Zahlen, deren jede gleich einer Summe von zwei ganzen Quadraten ist, selbst gleich einer Summe von zwei ganzen Quadraten ist. Es sei zum Beispiel $a=1$, $b=2$; $c=2$, $d=3$ so findet sich

$$a^2+b^2=5\,,\ c^2+d^2=13\,,$$
$$ac-bd=-4,\ bc+ad=7,$$
$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=65,$$
$$5\,.\,13=65.$$

Auf dem Gebiete der positiven und negativen reellen Grössen sind die beiden Einheiten $+1$ und -1 vorhanden. Auf dem Gebiete der complexen Grössen tritt zu diesen beiden die *imaginäre Einheit* i und ausser dieser noch die *entgegengesetzte imaginäre Einheit* $-i$ hinzu. Diese vier Einheiten sind nach der vorhin gegebenen Definition complexe ganze Zahlen und haben die gemeinsame Eigenschaft, dass die Norm von jeder derselben gleich der reellen positiven Einheit ist; denn die complexe Grösse $x+yi$ nimmt nach einander die Werthe $+1$, -1, i, $-i$ an, sobald beziehungsweise $x=1$, $y=0$, dann $x=-1$, $y=0$, hierauf $x=0$, $y=1$, und endlich $x=0$, $y=-1$ genommen wird, und für jedes Paar dieser ganzzahligen Werthe gilt die Gleichung $x^2+y^2=1$. Wenn jetzt festgesetzt wird, dass jede complexe ganze Zahl $x+yi$, für welche die Gleichung $x^2+y^2=1$ erfüllt ist, eine Einheit heissen soll, so lässt sich zeigen, dass es ausser jenen vier Einheiten keine anderen giebt. Es kann durch zwei positive oder negative ganze Zahlen x und y die Gleichung $x^2+y^2=1$ nicht erfüllt werden, wenn eine der beiden ganzen Zahlen einen grösseren numerischen Werth hat als 1, denn schon das Quadrat der Zahl Zwei ist gleich 4. Auch können nicht x und y beide numerisch gleich der Einheit sein, weil x^2+y^2 dann gleich Zwei würde. Also erlaubt jene Gleichung nur die vier Auflösungen, bei denen entweder $x=1$, $y=0$, oder $x=-1$, $y=0$, oder $x=0$, $y=1$ oder $x=0$, $y=-1$ ist. Dieselben bringen, wie schon bemerkt, für $x+yi$ die vier Werthe hervor

$$+1,\ -1,\ +i,\ -i,$$

und diese sind demnach die vier einzigen im Gebiete der complexen Grössen vorhandenen Einheiten.

Diese vier Einheiten können aus der imaginären Einheit i erhalten werden, indem man dieselbe successive mit sich selbst multiplicirt oder auf ganze Potenzen erhebt. Vermöge der für die Multiplication geltenden Regel kommt

$$i^1 = i\,,\ i^2 = -1\,,\ i^3 = -i\,,\ i^4 = 1\,,\ i^5 = i\,, \ldots$$

Nachdem bei der Erhebung auf die vierte Potenz der Werth der positiven reellen Einheit erschienen ist, wiederholen sich die Werthe i, -1, $-i$, $+1$ in regelmässiger Folge. Um daher den Werth einer beliebig hohen positiven Potenz von i, etwa i^ν zu finden, ist der Exponent ν durch die Zahl 4 zu dividiren und der zugeordnete Rest ϱ zu bestimmen, der nach § 9 eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 sein muss. Dann wird die in Rede stehende Aufgabe durch die Gleichung

$$i^\nu = i^\varrho$$

gelöst; das Zeichen i^0 stellt die reelle positive Einheit dar.

§ 28. Zerlegbarkeit von jeder Function des zweiten Grades einer Variable bei Anwendung der Rechnung mit complexen Grössen.

Die im § 25 angestellte Betrachtung der rationalen ganzen Function des zweiten Grades $\frac{f(x)}{a_0} = x^2 + \frac{a_1}{a_0}\,x + \frac{a_2}{a_0}$ schloss mit dem Resultate ab, dass die Function $\frac{f(x)}{a_0}$ entweder den Werth Null annehmen kann und dann gleich einem Product von zwei Factoren des ersten Grades $(x-\alpha)(x-\beta)$ wird, oder nicht den Werth Null annehmen und dann auch nicht gleich einem solchen Product $(x-\alpha)(x-\beta)$ werden kann. Die Einführung der Rechnung mit complexen Grössen hat nun die Wirkung, diesen Unterschied aufzuheben. In dem zuletzt erwähnten Falle wurde die Function $\frac{f(x)}{a_0}$ gleich dem Ausdrucke (11) des § 24, bei welchem

$$4\,a_0\,a_2 - a_1^2 > 0,\ B = \sqrt{\frac{4\,a_0\,a_2 - a_1^2}{4\,a_0^2}}$$

war, also galt die Darstellung

$$x^2 + \frac{a_1 x}{a_0} + \frac{a_2}{a_0} = \left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + B^2 \,. \tag{1}$$

Bei der Anwendung der Rechnung mit complexen Grössen wird die Quadratsumme der rechten Seite gleich dem Product

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_0} - iB\right)\left(x + \frac{a_1}{2a_0} + iB\right), \tag{2}$$

dessen zwei Factoren in Bezug auf die Variable x von dem ersten Grade sind. Damit treten *alle ganzen Functionen des zweiten Grades* auf eine und dieselbe Stufe; *jede ganze Function des zweiten Grades von x kann als ein Product von zwei Factoren des ersten Grades von x dargestellt werden, und die zugeordnete Gleichung hat stets zwei Wurzeln.* Das Product (2) lässt sich zum Verschwinden bringen, indem x entweder einen complexen Werth erhält, durch den der erste Factor gleich Null wird, nämlich den Werth $\xi_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + iB$, oder indem x einen complexen Werth erhält, durch den der zweite Factor gleich Null wird, nämlich den Werth $\xi_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - iB$. Die Gleichung $f(\xi) = 0$ hat in Folge dessen *die beiden complexen Wurzeln*

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + iB, \quad \xi_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - iB, \tag{3}$$

und zwar sind diese Wurzeln von einander verschieden, weil ihre Differenz den Werth

$$\xi_1 - \xi_2 = 2iB \tag{4}$$

ergiebt, und $2B$ nicht gleich Null ist. Da sich die beiden Wurzeln nur durch das Vorzeichen des Factors von i unterscheiden, so sind sie zu *einander conjugirt.*

Eine complexe Grösse $\gamma + \delta i$, welche weder gleich ξ_1 noch gleich ξ_2 ist, kann den Ausdruck (2) nicht zu Null machen. Denn sonst müsste das Product

$$\left(\gamma + \delta i + \frac{a_1}{2a_0} - iB\right)\left(\gamma + \delta i + \frac{a_1}{2a_0} + iB\right)$$

gleich Null sein, ohne dass einer der beiden Factoren gleich Null wäre, und das ist nach dem letzten Satze des § 26 unmöglich. *Daher hat die Gleichung $f(\xi) = 0$ in dem gegenwärtigen*

Falle, wo die Verbindung $4a_0 a_2 - a_1^2$ positiv ist, die beiden in (3) bezeichneten conjugirten complexen Wurzeln und ausser diesen keine andere Wurzel.

In dem dritten Beispiele (17) des § 24 war die Function

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

gegeben, und $B = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die conjugirten complexen Wurzeln der zugehörigen Gleichung sind demnach

$$\xi_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

Wenn man die in (3) definirten complexen Wurzeln ξ_1 und ξ_2 der Gleichung $f(\xi) = 0$ rückwärts in die Factoren des Ausdrucks (2) einführt, so erhält derselbe die Gestalt

(5) $$(x - \xi_1)(x - \xi_2)$$

welche mit der Gestalt von (1) und (2) in § 25 ganz übereinstimmt.

Nunmehr können die Wurzeln der quadratischen Gleichung $f(\xi) = 0$ für alle drei unterschiedenen Fälle durch dieselben Ausdrücke dargestellt werden, nämlich

(6) $$\xi_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \omega,\ \xi_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - \omega.$$

Die Grösse ω ist eine Wurzel der Gleichung

(7) $$\omega^2 = \frac{-4a_0 a_2 + a_1^2}{4a_0^2},$$

und zwar, wenn $4a_0 a_2 - a_1^2 < 0$ ist, die positive Quadratwurzel aus der Grösse $\frac{-4a_0 a_2 + a_1^2}{4a_0^2}$, wenn $4a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ ist, gleich Null, wenn $4a_0 a_2 - a_1^2 > 0$ ist, gleich dem Product aus der imaginären Einheit i in die positive Quadratwurzel aus der Grösse $\frac{4a_0 a_2 - a_1^2}{4a_0^2}$. Für die Summe $\xi_1 + \xi_2$ und für das Product $\xi_1 \xi_2$ folgen aus (6) durch eine leichte Rechnung die Gleichungen

(8) $$\xi_1 + \xi_2 = -\frac{a_1}{a_0},\ \xi_1 \xi_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Mit Hülfe der Wurzeln ξ_1 und ξ_2, die in (6) ausgedrückt sind,

wird die Function $f(x)$ gleich dem Product von zwei Factoren des ersten Grades in Bezug auf die Variable x

(9) $$f(x) = a_0(x - \xi_1)(x - \xi_2).$$

Die beiden Factoren $(x - \xi_1)$ und $(x - \xi_2)$ sind für einen beliebig veränderlichen reellen Werth von x, wenn $4a_0a_2 - a_1^2 < 0$ ist, reell und von einander verschieden, wenn $4a_0a_2 - a_1^2 = 0$ ist, reell und einander gleich, wenn $4a_0a_2 - a_1^2 > 0$ ist, complex und zu einander conjugirt. Niemals ist es möglich, die Function $f(x)$ für einen beliebigen Werth von x durch eine Gleichung

$$f(x) = a_0(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)$$

auf eine von der Gleichung (9) *verschiedene Weise in Factoren zu zerlegen.* Die Annahme, dass ϱ_1 von ξ_1 und ξ_2 verschieden sei, und dass ϱ_2 von ξ_1 und ξ_2 verschieden sei, führt nämlich durchaus zu ebensolchen Widersprüchen wie die oben erörterte Annahme, dass es in dem besondern Falle von zwei complexen conjugirten Wurzeln ξ_1 und ξ_2 eine von diesen verschiedene Wurzel gebe.

§ 29. Reine Gleichungen eines beliebigen hohen Grades von der Gestalt $\omega^n = C$.

Die mitgetheilte allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichung $f(\xi) = 0$ führt auf die Gleichung (7) des vorigen § zurück, durch welche eine Grösse ω bestimmt wird, deren Quadrat gleich einer gegebenen Grösse sein soll. *Eine Gleichung, durch welche eine Grösse ω verlangt wird, von der die positive ganze nte Potenz gleich einer gegebenen Grösse C sein soll,*

(1) $$\omega^n = C$$

heisst eine reine Gleichung des nten Grades, auch eine zweigliedrige oder binomische Gleichung des nten Grades.

Die Gleichung (7) des vorigen § ist demnach *eine reine quadratische Gleichung.* Die reine Gleichung des *n*ten Grades (1) enthält, wofern C eine positive Grösse ist, dieselbe Forderung, mittelst welcher in § 14 und später in § 20 des ersten Abschnittes *die positive nte Wurzel aus einer positiven Grösse C* definirt worden ist. Der an jenen Stellen bewiesene Satz, dass die positive *n*te Wurzel aus der positiven Grösse C *eindeutig bestimmt* ist, sagt nichts anderes aus, als *dass die Gleichung* (1) *bei einem positiven C eine und nur eine positive Wurzel hat.*

Ob die Gleichung (1) bei einem positiven C auch durch negative Werthe von ω befriedigt werden könne, ist im ersten Abschnitte nicht erörtert worden, kann indessen sehr leicht bestimmt werden. Weil eine negative Grösse, eine ungerade Zahl von Malen mit sich selbst multiplicirt, ein negatives Resultat, dagegen, eine gerade Zahl von Malen mit sich selbst multiplicirt, ein positives Resultat liefert, so kommt es darauf an, ob die *Zahl* n, welche den Grad der Gleichung (1) ausdrückt, *ungerade* oder *gerade* ist. Wenn n eine *ungerade Zahl* ist, so kann keine negative Grösse ω auf die $n$te Potenz erhoben gleich der positiven Grösse C werden. Wenn dagegen n eine *gerade Zahl* ist, so wird die in Rede stehende Gleichung durch die mit der negativen Einheit multiplicirte vorhin definirte positive $n$te Wurzel aus C ebenfalls erfüllt. Ausser dieser negativen Grösse kann dies aber keine von derselben verschiedene negative Grösse leisten; denn sonst müsste die betreffende Grösse durch, die Multiplication mit der negativen Einheit aus einer von der zuerst angewendeten Wurzel verschiedenen positiven Wurzel erhalten werden können, und eine solche giebt es nicht.

Sobald die Grösse C negativ angenommen wird, und n eine *ungerade Zahl* bedeutet, so giebt es keinen positiven, dagegen einen und nur einen negativen Werth, welcher die Gleichung (1) befriedigt. Denn nach dem so eben Erörterten hat die Gleichung

$$\omega'^{n} = -C \tag{2}$$

eine und nur eine positive Wurzel, und deren negativ genommener Werth genügt der Gleichung (1). Die Gleichung (1) kann aber keine andere negative Wurzel haben, weil eine solche, mit der negativen Einheit multiplicirt, eine andere positive Wurzel der Gleichung (2) liefern würde.

Sobald endlich die Grösse C negativ angenommen wird, und n eine *gerade Zahl* bedeutet, so existirt keine positive oder negative Grösse, welche die Gleichung (1) erfüllt, weil die Erhebung auf einen geraden Exponenten stets ein positives Resultat erzeugt. Daher findet in diesem Falle schon bei der reinen quadratischen Gleichung die Einführung der imaginären Grössen ihren Platz. Die reine quadratische

$$\omega^2 = C$$

zeigt die beiden rein imaginären einander entgegengesetzten Wurzeln

$$i\sqrt{-C}, \quad -i\sqrt{-C}.$$

Die Frage nach der Auflösung der reinen Gleichung des $n$ten Grades (1) kann nun die allgemeine Fassung erhalten, dass alle reellen oder complexen Grössen verlangt werden, welche dieser Gleichung genügen. Dieser Frage entspricht die allgemein gültige Antwort, *dass, wenn die Grösse C nicht gleich Null ist, die betreffende reine Gleichung des $n$ten Grades immer genau n von einander verschiedene Wurzeln hat.* Durch dieses Resultat, welches sogleich abgeleitet werden soll, bestätigt sich der Werth der Einführung der complexen Grössen.

§ 30. Darstellung einer complexen Grösse mit Anwendung des Sinus und des Cosinus eines zugehörigen Winkels. Entsprechende Darstellung einer ganzen Potenz einer complexen Grösse.

Wenn es darauf ankommt, alle complexen Grössen $a + bi$ zu betrachten, welche für ω gesetzt die Gleichung

(1) $$\omega^n = C$$

erfüllen, bei der wir uns zunächst wieder C gleich einer reellen positiven Grösse denken wollen, so ist von der complexen Grösse $a + bi$ die positive ganze $n$te Potenz nach den für die Multiplication der complexen Grössen geltenden Regeln zu bilden. Diese $n$te Potenz besteht aus einem reellen Theil r und einem rein imaginären Theil si, wo r und s algebraische rationale ganze Ausdrücke der Elemente a und b sind, und weil $r + si = C$ sein soll, so muss der reelle Theil r gleich der gegebenen reellen Grösse C und der imaginäre Theil si gleich der Null sein, wodurch das Verschwinden des reellen Factors s bedingt ist. Es treten daher an die Stelle der einen Gleichung (1) die beiden Gleichungen

(2) $$r = C, \quad s = 0,$$

und dienen zu der Bestimmung der beiden reellen Grössen a und b, aus denen sich die complexe Grösse $a + bi$ zusammensetzt.

Die Bildung der $n$ten Potenz $(a + bi)^n$ kann nun mit Hinzuziehung von gewissen Hülfsvorstellungen auf eine eigenthüm-

liche Art bewerkstelligt werden. Eine complexe Grösse $a + bi$, die nicht gleich Null ist, hat nach einer in § 26 gemachten Bemerkung eine von Null verschiedene *Norm* $a^2 + b^2$, und daher auch einen von Null verschiedenen *analytischen Modul*, die positive Quadratwurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$. Deshalb darf jede von Null verschiedene complexe Grösse durch ihren analytischen Modul dividirt und mit demselben multiplicirt werden, so dass die Gleichung

$$(3) \qquad a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i\right)$$

entsteht. Der Factor $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i$ hat jetzt die Eigenschaft, dass seine Norm oder die Summe der Quadrate der reellen Grössen $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ gleich der Einheit ist. Die gleiche Eigenschaft kennt man bei *den trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus eines Winkels.* Es möge in einer Ebene von einem festen Punkte aus eine gerade Linie gezogen und diese Linie um den festen Punkt in einem bestimmten Sinne, etwa von der linken zur rechten Hand, gedreht werden. Man betrachtet die Winkel φ, welche die ursprünglich gezogene Linie mit denjenigen Lagen der Linie bildet, die aus der Drehung derselben hervorgehen, und sagt, dass ein Winkel im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten liege, je nachdem sich derselbe zwischen Null und einem Rechten, zwischen einem und zwei Rechten, zwischen zwei und drei Rechten, oder zwischen drei und vier Rechten befindet. Der Cosinus und der Sinus eines Winkels sind positive oder negative Zahlengrössen, deren numerischer Werth niemals die Einheit übertrifft. Der Cosinus bewegt sich für einen den ersten Quadranten stets wachsend durchlaufenden Winkel abnehmend von 1 bis 0, für einen den zweiten Quadranten stets wachsend durchlaufenden Winkel abnehmend von 0 bis -1, in dem dritten Quadranten wachsend von -1 bis 0, in dem vierten Quadranten wachsend von 0 bis 1. Der Sinus bewegt sich für einen den ersten Quadranten stets wachsend durchlaufenden Winkel wachsend von 0 bis 1, für einen den zweiten Quadranten stets wachsend durchlaufenden Winkel abnehmend von 1 bis 0, in dem dritten Quadranten ab-

nehmend von 0 bis — 1, in dem vierten Quadranten wachsend von — 1 bis 0. Für denselben Winkel ist, wie schon bemerkt, die Summe der Quadrate des Cosinus und des Sinus stets gleich der Einheit; werden zwei zusammengehörige positive oder negative reelle Werthe gegeben, welche diese Bedingung erfüllen, so gehört respective zu denselben als Cosinus und Sinus ein innerhalb der 4 Quadranten völlig bestimmter Winkel. Aus diesem Grunde giebt es einen innerhalb der 4 Quadranten völlig bestimmten Winkel, dessen Cosinus gleich der Grösse $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und dessen Sinus gleich der Grösse $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist. Der Winkel selbst soll nicht durch die Zahl der in demselben enthaltenen Grade, sondern durch das Verhältniss gemessen werden, in welchem bei einem mit einem beliebigen Radius beschriebenen Kreise die Länge des dem Winkel zugehörigen Kreisbogens zu dem Kreisradius steht. Wenn eine an und für sich völlig bestimmte Linie als die Einheit der Länge angenommen und auch zum Kreisradius gewählt wird, so ist für diesen Kreis die Länge des betreffenden Bogens selbst das Mass des zugeordneten Winkels. Der Flächenraum, der von dieser Kreislinie eingeschlossen wird, ist bekanntlich gleich dem Producte aus dem Quadrat der Längeneinheit in die feste Zahlengrösse $\pi = 3{,}1415926\,..$ Die Länge der ganzen Kreisperipherie wird dann durch 2π ausgedrückt.

Die Bogenlänge φ, welche in diesem Kreise einem Winkel von m Graden entspricht, findet sich demgemäss durch die Proportion

$$m^0 : 360^0 = \varphi : 2\pi,$$

so dass dem rechten Winkel die Bogenlänge $\frac{\pi}{2}$ zugehört. Durch die beliebig gegebenen reellen positiven oder negativen Grössen a und b wird somit vermöge der Gleichungen

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi \tag{4}$$

ein Winkel φ innerhalb der vier ersten Quadranten, die den Kreis erfüllen, vollständig bestimmt.

Lässt man die Drehung der Linie, welche den Winkel φ

hervorbringt, in demselben Sinne weiter gehen, so kommt die Linie in Lagen, welche sie schon eingenommen hatte, und die Werthe des Cosinus und des Sinus werden den früher erhaltenen beziehungsweise gleich. Eine Vergrösserung des Winkels φ um eine volle Kreisperipherie 2π ändert weder den Cosinus noch den Sinus, so dass die Gleichungen

(5) $$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$$

gelten. Bei einer wiederholten Umdrehung kehren dieselben Erscheinungen wieder, darum bestehen für jede positive ganze Zahl s die Gleichungen

(6) $$\cos(\varphi + 2s\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2s\pi) = \sin\varphi.$$

Während der Cosinus und der Sinus eines Winkels φ als trigonometrische Functionen dieses Winkels bezeichnet werden, heisst der Winkel φ das *Argument* einer jeden zugehörigen Function, und die in den Gleichungen (6) ausgedrückte Eigenschaft, dass die trigonometrischen Functionen immer wieder dieselben Werthe annehmen, wenn der Winkel φ um dieselbe Grösse, nämlich den Werth 2π, wächst, macht sie zu *periodischen Functionen des Arguments φ mit der Periode 2π.* Ausser derjenigen Drehung der in einem Punkte festen Linie, durch die nach der gegebenen Vorschrift der Winkel φ erzeugt worden ist, und die von der linken zur rechten Hand ging, ist auch eine von derselben Anfangslage ausgehende Drehung im entgegengesetzten Sinne zulässig. Wenn man den auf die letztere Art entstehenden Winkeln negative Werthe der Grösse φ entsprechen lässt, so ist die Lage der gedrehten Linie für ein negatives φ dieselbe, die den Werthen $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, u. s. f. zugehört. Der Cosinus und der Sinus des Winkels, den die gedrehte Linie mit der Anfangslage bildet, sind für alle verschiedenen Lagen der gedrehten Linie definirt, indem sie für alle zwischen 0 und 2π liegenden Werthe des Winkels φ definirt sind, und damit für eine wiederkehrende Lage der Linie auch die Werthe des Cosinus und Sinus wiederkehren, muss festgesetzt werden, dass die Gleichungen (6) für alle positiven und negativen Werthe der Grösse φ gültig sein sollen. So bekommen die Functionen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Eigenschaft, auch dann respective ihre Werthe ungeändert zu behalten, wenn das Argument φ um eine beliebige Anzahl von ganzen Vielfachen der Periode 2π vermindert wird,

und die Bedeutung von s in den Gleichungen (6) erstreckt sich auf *alle positiven und negativen ganzen Zahlen.*

Indem der als positiv definirte analytische Modul $\sqrt{a^2 + b^2}$ durch ϱ bezeichnet wird, giebt die Anwendung der Gleichungen (4) auf die Gleichung (3) für jede von der Null verschiedene complexe Grösse $a + bi$ die Darstellung

$$a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Es werde nun eine beliebige zweite complexe Grösse $c + di$ genau entsprechend behandelt, der analytische Modul $\sqrt{c^2 + d^2}$ gleich σ gesetzt, und durch die Gleichungen $\frac{c}{\sigma} = \cos\chi$ und $\frac{d}{\sigma} = \sin\chi$ ein Winkel χ bestimmt, dann gilt die Gleichung

$$c + di = \sigma(\cos\chi + i\sin\chi). \tag{8}$$

Wir bilden jetzt das Product $(a + bi)(c + di)$ und den Quotienten $\frac{a + bi}{c + di}$, indem wir die betreffenden Operationen zuerst mit den beiden analytischen Moduln, dann mit den Factoren $\cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\cos\chi + i\sin\chi$ vornehmen. Das Product giebt die Entwickelung

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\chi + i\sin\chi) = \\ \cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi + i(\sin\varphi\cos\chi + \cos\varphi\sin\chi). \tag{9}$$

Es ist aber nach einem Fundamentalsatze der Trigonometrie für jedes Argument φ und χ der reelle Theil auf der rechten Seite gleich dem *Cosinus*, der Factor von i auf derselben Seite gleich dem *Sinus der Summe der Argumente* $\varphi + \chi$, und deshalb besteht die Gleichung

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\chi + i\sin\chi) = \cos(\varphi + \chi) + i\sin(\varphi + \chi). \tag{10}$$

Was die Division anlangt, so hat die Gleichung $\cos^2\chi + \sin^2\chi = 1$ zur Folge, dass

$$\frac{1}{\cos\chi + i\sin\chi} = \cos\chi - i\sin\chi \tag{11}$$

ist, und daher ergiebt sich für den Quotienten $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\chi + i\sin\chi}$ durch Entwickelung des statt seiner zu setzenden Products $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\chi - i\sin\chi)$ und durch Anwendung der fundamentalen Darstellungen von $\cos(\varphi - \chi)$ und $\sin(\varphi - \chi)$ der Ausdruck

(12) $$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\chi + i\sin\chi} = \cos(\varphi - \chi) + i\sin(\varphi - \chi).$$

Demnach wird das Product und der Quotient der gegebenen complexen Grössen $a + bi$ und $c + di$ durch die Gleichungen

(13) $$(a + bi)(c + di) = \varrho\sigma(\cos(\varphi + \chi) + i\sin(\varphi + \chi)),$$

(14) $$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{\varrho}{\sigma}(\cos(\varphi - \chi) + i\sin(\varphi - \chi))$$

dargestellt.

Wenn für eine beliebige complexe Grösse $p + qi$ ein Ausdruck vorliegt

(15) $$p + qi = \tau(\cos\psi + i\sin\psi),$$

in dem τ eine positive Grösse, ψ eine reelle Grösse bedeutet, so ist τ nothwendig gleich dem analytischen Modul $\sqrt{p^2 + q^2}$ und der Winkel ψ durch die Gleichungen $\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos\psi$, $\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin\psi$ bestimmt. Denn die vorausgesetzte Gleichung zieht durch Trennung des Reellen und des Imaginären die Gleichungen

$$p = \tau\cos\psi, \quad q = \tau\sin\psi$$

nach sich. Durch Quadriren und Addiren der Gleichungen kommt, da $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$ ist,

$$p^2 + q^2 = \tau^2,$$

und weil τ eine *positive* Grösse sein soll, so ist τ gleich der *positiven* Quadratwurzel $\sqrt{p^2 + q^2}$ oder dem analytischen Modul der Grösse $p + iq$. Dieser Werth von τ bringt die Gleichungen $\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos\psi$, $\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin\psi$ hervor. Durch diese Gleichungen ist aber der Winkel ψ in der Weise bestimmt, dass zwei derselben entsprechende Winkel nur um ein ganzes Vielfache der vollen Peripherie 2π verschieden sein können. In den Gleichungen (13) und (14) haben wir auf der rechten Seite Ausdrücke von der in (15) bezeichneten Beschaffenheit; denn weil ϱ und σ positiv sind, so ist sowohl $\varrho\sigma$ wie auch $\frac{\varrho}{\sigma}$ positiv, und weil φ und χ reelle Grössen sind, darum ist ihre Summe $\varphi + \chi$ und ihre Differenz $\varphi - \chi$ ebenfalls reell. Deshalb ist $\varrho\sigma$ der analytische Modul des Products und $\frac{\varrho}{\sigma}$ der analytische Mo-

dul des Quotienten, die sich beziehungsweise auf der linken Seite befinden. Das erstere von diesen Ergebnissen kann übrigens aus der Gleichung (7) des § 26 unmittelbar abgeleitet werden, und hierauf das zweite aus dem ersteren. Durch Wiederholung derselben Schlussweise gelangt man zu dem Satze, *dass der analytische Modul eines Products mehrerer complexen Factoren gleich dem Product der Moduln der einzelnen Factoren ist.*

Um aus der Gleichung (13) eine Darstellung der Potenzen der Grösse $a + bi$ zu erhalten, setzt man zunächst $c + di = a + bi$, wodurch $\sigma = \varrho$, $\chi = \varphi$ wird, und die Gleichung entsteht

$$(a + bi)^2 = \varrho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Wird ferner $(a + bi)^2$ für $c + di$ genommen, so stellt ϱ^2 den Modul σ, und 2φ den zugeordneten Winkel χ dar, und die wiederholte Anwendung der Gleichung (13) liefert das Resultat

$$(a + bi)^3 = \varrho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Da auch hier für den Werth der linken Seite ϱ^3 der Modul, 3φ der zugeordnete Winkel ist, so lässt sich dieses Verfahren stets fortsetzen, und es entsteht *die für jede positive ganze Potenz des Grades n geltende Gleichung*

$$(16) \qquad (a + bi)^n = \varrho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Diese Gleichung sollte abgeleitet werden.

§ 31. Allgemeine Auflösung der reinen Gleichungen eines beliebig hohen Grades $\omega^n = C$.

Die reine Gleichung

$$(1) \qquad \omega^n = C,$$

bei der C eine reelle positive Grösse bedeuten soll, kann durch den Werth $\omega = 0$ nicht erfüllt werden; jeder complexe Werth $\omega = a + bi$, der genügen soll, muss also von Null verschieden sein. Ein solcher Werth kann mithin nach (7) des vorigen § in die Gestalt gebracht werden

$$(2) \qquad a + bi = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

derselbe liefert, auf die $n$te Potenz erhoben, den Ausdruck

$$(3) \qquad (a + bi)^n = \varrho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

und führt daher vermöge der Substitution in (1) zu der Gleichung

$$(4) \qquad \varrho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = C.$$

Diese zerfällt durch die Trennung des Reellen und Imaginären in die beiden Gleichungen

(5) $$\varrho^n \cos n\varphi = C,\quad \varrho^n \sin n\varphi = 0,$$
welche der Sache nach mit den beiden Gleichungen (2) des vorigen § zusammenfallen. Dadurch, dass die Gleichungen (5) quadrirt und addirt werden, ergiebt sich, weil $\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = 1$ ist, die Gleichung

(6) $$\varrho^{2n} = C^2.$$

Da nun ϱ als der analytische Modul von $a + bi$ eine positive Grösse, und C nach der Voraussetzung ebenfalls eine positive Grösse ist, so fällt ϱ^n als die positive Quadratwurzel aus ϱ^{2n} mit C als der positiven Quadratwurzel aus C^2 zusammen. Weil überhaupt die positive $n$te Wurzel aus einer positiven Grösse C nach § 17 und 20 *eindeutig bestimmt* ist, so folgt aus der Gleichung $\varrho^n = C$, dass die positive $n$te Wurzel der linken Seite gleich der positiven $n$ten Wurzel der rechten Seite sein muss, oder dass die Gleichung

(7) $$\varrho = \sqrt[n]{C}$$

besteht. *Der Modul ϱ für jede Wurzel $a + bi$ der Gleichung* (1) *ist also gleich der positiven $n$ten Wurzel aus der positiven Grösse C.*

Die Gleichungen (5) verwandeln sich demnach in die beiden Gleichungen

(8) $$\cos n\varphi = 1,\ \sin n\varphi = 0.$$

Der Winkel, dessen Cosinus gleich 1 und dessen Sinus gleich 0 ist, hat den Werth *Null* oder nach der Gleichung (6) des vorigen § den Werth eines *ganzen positiven oder negativen Vielfachen der vollen Peripherie* $2s\pi$. Daher wird in den Gleichungen (8) das Argument $n\varphi$ durch die Gleichung

(9) $$n\varphi = 2s\pi$$

bestimmt, wo s irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluss der Null bedeutet.

Wenn man sich also die volle Peripherie 2π des Kreises vom Radius Eins in n gleiche Theile getheilt und von dem s fachen $n$ten Theile den Cosinus und Sinus genommen denkt, so entstehen die Gleichungen

(10) $$\cos\varphi = \cos\frac{2s\pi}{n},\quad \sin\varphi = \sin\frac{2s\pi}{n},$$

und die Einsetzung des Werthes von ϱ aus (7) *und der vor-*

stehenden Werthe in die Gleichung (2) *ruft für die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung* (1) *die Darstellung hervor*

$$(11)\qquad a + b\,i = \sqrt[n]{C}\left(\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{\pi}\right).$$

§ 32. Betrachtung der sämmtlichen Wurzeln einer reinen Gleichung eines beliebigen Grades $\omega^n = C$.

Um zu ermitteln, welche unter den gefundenen Ausdrücken $a + b\,i$ einander gleich und welche von einander verschieden sind, haben wir uns nur mit den Factoren $\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$ zu beschäftigen, weil der wesentlich positive analytische Modul $\sqrt[n]{C}$ überall derselbe ist. Zwei Ausdrücke $\cos u + i\sin u$ und $\cos u' + i\sin u'$ sind aber einander gleich oder von einander verschieden, je nachdem die Differenz $u' - u$ ein ganzes Vielfache der vollen Peripherie 2π ist oder nicht. Schreibt man daher in dem gegenwärtigen Falle für s die natürliche Reihe der Zahlen mit der Null anfangend bis zu der Zahl $n - 1$ in eine horizontale Reihe, und setzt diese Reihe nach der Seite der positiven und der negativen immer weiter fort, indem man immer neue horizontale Reihen von gleich vielen nämlich von n Gliedern bildet, so entstehet das folgende Schema

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -n & -n+1 & -n+2 & -n+3\,.. & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3\,.. & n-1 \\ n & n+1 & n+2 & n+3\,.. & 2n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Hier befinden sich in der ersten vertikalen Reihe die Null und die sämmtlichen Vielfachen der Zahl n und zwar so, dass wenn man mit der in der mittelsten horizontalen Reihe stehenden Null beginnt, nach unten die positiven Vielfachen, nach oben die negativen Vielfachen von n einander regelmässig folgen. Desgleichen enthält jede horizontale Reihe die Glieder einer nach beiden Seiten unbegrenzten *arithmetischen Reihe*, wie sie in § 23 erwähnt ist. Das in der mittelsten horizontalen Reihe befindliche Glied ist eine zwischen Null und $n - 1$ enthaltene Zahl, und *die Differenz der arithmetischen Reihe* ist die Zahl n.

In dem Ausdrucke $\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$ bewirkt eine Zunahme der ganzen Zahl s um eine Einheit eine Zunahme des Arguments $\frac{2s\pi}{n}$ um die Grösse $\frac{2\pi}{n}$, und daher eine Zunahme der ganzen Zahl s um die Zahl n eine Zunahme des Arguments $\frac{2s\pi}{n}$ um die *volle Peripherie* 2π.

Für jede solche Zunahme bleibt der Ausdruck $\cos\frac{2s\pi}{\pi} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$ ungeändert. Deshalb liefern die sämmtlichen Werthe der Zahl s, welche in dem obigen Schema (1) eine und dieselbe vertikale Reihe bilden, denselben Ausdruck $\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$; dagegen *bringen n Zahlen, welche den n von einander verschiedenen vertikalen Reihen angehören, n von einander verschiedene Ausdrücke* $\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$ *hervor.* Denn die n Zahlen der mittleren horizontalen Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$$

sind aus den n von einander verschiedenen vertikalen Reihen genommen, und wenn man irgend zwei verschiedene dieser n Zahlen respective mit t und t' bezeichnet, so können die entsprechenden Ausdrücke

$$\cos\frac{2t\pi}{n} + i\sin\frac{2t\pi}{n} \text{ und } \cos\frac{2t'\pi}{n} + i\sin\frac{2t'\pi}{n}$$

nicht zusammenfallen, weil die Differenz der Argumente $\frac{2t'\pi}{n} - \frac{2t\pi}{n}$ gleich dem Product der vollen Peripherie 2π in den Bruch $\frac{t'-t}{n}$ ist, dessen Zähler nicht gleich Null werden darf und abgesehen von seinem Vorzeichen kleiner als n bleiben muss, dessen Werth also weder verschwinden noch gleich einer ganzen Zahl werden kann.

Aus diesen Gründen hat die reine Gleichung (1) *des* § 30 *n von einander verschiedene Wurzeln, welche aus der Darstellung* (11) *des* § 31 *hervorgehen*

$$a + bi = \sqrt[n]{C}\left(\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}\right),$$

indem für s nach einander die Zahlen 0, 1, 2, . . $n-1$ *eingesetzt werden.*

§ 33. Reine Gleichungen eines beliebig hohen Grades von der Gestalt $\omega^n = A + Bi$. Allgemeine Auflösung derselben.

Nachdem die reine Gleichung $\omega^n = C$ bis jetzt unter der Voraussetzung erörtert worden ist, dass C eine reelle positive Grösse sei, wollen wir die Betrachtung auf den Fall ausdehnen, dass an die Stelle von C eine *von der Null verschiedene beliebig complexe Grösse* $A + Bi$ tritt. Es handelt sich dann um die Aufsuchung aller complexen Werthe $\omega = a + bi$, welche die Gleichung

$$(1) \qquad \omega^n = A + Bi$$

erfüllen. Bei der complexen Grösse $A + Bi$ möge der analytische Modul $\sqrt{A^2 + B^2}$ mit P, der nach Massgabe der Gleichungen (4) des § 30 zugeordnete Winkel mit Φ bezeichnet werden, so dass

$$(2) \qquad A + Bi = P(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

wird. Wenn man diesem Winkel vorschreibt, zwischen Null und 2π zu liegen, etwa mit Einschluss des Werthes Null und mit Ausschluss des Werthes 2π, so ist derselbe eindeutig bestimmt.

Hat man B gleich Null, und A positiv, wie in dem vorhin absolvirten Falle, so wird der in Rede stehende Winkel Φ gleich Null, und der Modul $P = A$. Hat man B gleich Null, und A negativ, so wird der betreffende Winkel Φ gleich der Grösse π, und der Modul $P = -A$.

Es sei jetzt wieder $a + bi$ ein complexer der Gleichung (1) genügender Werth, und man setze wie im vorigen §

$$a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Die $n$te Potenz dieses Ausdruckes werde auf der linken Seite von (1) für ω^n, zugleich der Ausdruck $P(\cos\Phi + i\sin\Phi)$ für $A + Bi$ substituirt, dann kommt

$$\varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = P(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

Weil nun die positive Grösse ϱ^n der analytische Modul der linken Seite, die positive Grösse P der analytische Modul der rechten Seite ist, so muss nach den zu der Gleichung (15) des

§ 30 angestellten Erörterungen $\varrho^n = P$, und $n\varphi - \Phi$ gleich einem ganzen Vielfachen der vollen Peripherie sein, das wie früher mit $2s\pi$ bezeichnet werden soll. Aus der positiven Grösse $P = \sqrt{A^2 + B^2}$ giebt es nur eine positive $n$te Wurzel, und dieser muss nach der Gleichung $\varrho^n = P$ der positive analytische Modul ϱ gleich sein. *Die Gleichung*

$$(4) \qquad n\varphi = \Phi + 2s\pi$$

ergiebt für $\cos\varphi$ *und* $\sin\varphi$ *die folgende Bestimmung, sobald man sich sowohl den Cosinus und den Sinus des nten Theiles der vollen Peripherie* 2π *wie auch den Cosinus und den Sinus des nten Theiles des Winkels* Φ *gebildet denkt,*

$$(5) \qquad \cos\varphi = \cos\left(\frac{\Phi}{n} + \frac{2s\pi}{n}\right), \; \sin\varphi = \sin\left(\frac{\Phi}{n} + \frac{2s\pi}{n}\right).$$

Die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (1) *sind daher in dem Ausdrucke enthalten*

$$(6) \qquad a + bi = \sqrt[n]{\sqrt{A^2 + B^2}}\left(\cos\frac{\Phi + 2s\pi}{n} + i\sin\frac{\Phi + 2s\pi}{n}\right).$$

Nach der fundamentalen Gleichung (10) des § 30 lässt sich dieser Ausdruck in den folgenden verwandeln

$$(7) \qquad a + bi = \sqrt[n]{\sqrt{A^2 + B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right)\left(\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}\right).$$

Sobald der Buchstabe s die ganze Reihe der natürlichen positiven und negativen Zahlen von der Null an durchläuft, so bleiben die beiden ersten Factoren der rechten Seite von (7) ungeändert, der letzte Factor ist aber der zweite Factor der rechten Seite von (11) in § 31. Zufolge der in § 32 angestellten Untersuchung nimmt derselbe n von einander verschiedene Werthe an, welche entstehen, indem s nach einander gleich den Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots n-1$$

gesetzt wird. *Vermöge dieser Substitution liefert der Ausdruck* (7) *die* n *unter einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung* (1).

§ 34. Auflösung der reinen quadratischen Gleichung $\omega^2 = A + Bi$ durch Ausziehung von Quadratwurzeln.

Der einfachste Fall der im vorigen § behandelten reinen Gleichung ist derjenige, in welchem dieselbe eine *quadratische Gleichung* ist. Für die betreffende Gleichung

$$(1) \qquad \omega^2 = A + Bi$$

ergeben sich die beiden vorhandenen Wurzeln aus der Gleichung (7) des vorigen §, indem $n = 2$, und s zuerst gleich Null, dann gleich Eins gesetzt wird. Nun ist $\cos 0 + i \sin 0 = 1$, $\cos \pi + i \sin \pi = -1$, mithin sind die beiden Wurzeln die folgenden

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1 + b_1 i = \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2}} \left(\cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2} \right) \\ a_2 + b_2 i = -\sqrt{\sqrt{A^2 + B^2}} \left(\cos \frac{\Phi}{2} + i \sin \frac{\Phi}{2} \right). \end{cases}$$

Die quadratische Gleichung (1) kann aber auch *direct* aufgelöst, nämlich auf die Ausziehung von Quadratwurzeln aus positiven reellen Grössen zurückgeführt werden, indem man die zu suchende complexe Grösse $a + bi$ für ω substituirt. Alsdann wird durch die Bildung des Quadrats

$$(3) \qquad a^2 - b^2 + 2abi = A + Bi,$$

und vermöge der Trennung des Reellen und Imaginären erscheinen die beiden Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 = A \\ 2ab \quad\; = B. \end{cases}$$

Durch Quadriren und Addiren folgt

$$(5) \qquad a^4 + 2a^2 b^2 + b^2 = A^2 + B^2,$$

und weil eine positive reelle Grösse eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel hat, die linke Seite aber das Quadrat der reellen positiven Grösse $a^2 + b^2$ ist, so muss

$$(6) \qquad a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

sein. Durch die Verbindung dieser Gleichung mit der ersten Gleichung (4) finden sich für a^2 und b^2 die Ausdrücke

$$(7) \qquad \begin{cases} a^2 = \dfrac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2} \\[2ex] b^2 = \dfrac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}. \end{cases}$$

Wofern $B = 0$ ist und A positiv, so wird $a^2 = A$, $b^2 = 0$, und es resultiren *die beiden reellen Wurzeln der Gleichung* (1)

$$\sqrt{A}, \quad -\sqrt{A}.$$

Wofern $B = 0$ ist und A negativ, so wird $a^2 = 0$, $b^2 = -A$,

und es entstehen in Uebereinstimmung mit § 29 *die beiden imaginären Wurzeln der Gleichung* (1)

$$\sqrt{-A}\, i, \; -\sqrt{-A}\, i\,.$$

Wofern aber B nicht gleich Null ist, so kann weder a^2 noch b^2 gleich Null sein, da $A^2 + B^2 > A^2$ ist, mithin in den durch (7) vorgeschriebenen Ausdrücken zu der positiven Quadratwurzel $\sqrt{A^2 + B^2}$ eine Grösse hinzuaddirt wird, die abgesehen von ihrem Vorzeichen kleiner ist als jene. Es darf daher nach der ersten Gleichung (7) die Grösse a entweder gleich der positiven Quadratwurzel $\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$ oder gleich derselben, negativ genommen, sein, und ebenso darf die Grösse b entweder gleich der positiven Quadratwurzel $\sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}$ oder gleich derselben, negativ genommen, sein. Bezeichnet man die positive oder negative Einheit, je nachdem a positiv oder negativ ausfällt, mit ε, und die positive oder negative Einheit, je nachdem b positiv oder negativ ausfällt, mit η, so kommt

$$(8) \quad a = \varepsilon \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}, \quad b = \eta \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}.$$

Die zweite Gleichung (4) lehrt aber, dass das Product $a\,b$ dasselbe Vorzeichen erhalten muss, wie die gegebene und gegenwärtig als von Null verschieden angenommene Grösse B. Aus diesem Grunde ist von den beiden Vorzeichen ε und η nur das eine willkürlich, während das andere durch die Bedingung

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varepsilon\,\eta &= 1 \quad \text{für } B > 0 \\ \varepsilon\,\eta &= -1 \text{ für } B < 0 \end{aligned}$$

bestimmt wird. Demnach erhält man für die beiden Wurzeln der Gleichung (1) die Ausdrücke von der vorher angegebenen Beschaffenheit

$$(10) \quad a + bi = \varepsilon \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + \eta \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}\; i.$$

Bei einem positiven B sind es diese

$$\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}\; i,$$

$$-\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}\; i,$$

bei einem negativen B dagegen diese

$$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\,i,$$

$$-\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\,i.$$

Stets geht die eine Wurzel aus der andern durch Multiplication mit der negativen Einheit hervor, was sich auch schon bei der früheren Darstellung in (2) gezeigt hat.

Die Vergleichung der beiden Darstellungen lässt erkennen, dass, wenn für die beliebig gegebene complexe Grösse $A+Bi$ durch die Gleichung

$$A+Bi=\sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\Phi+i\sin\Phi)$$

der zugeordnete Winkel Φ bestimmt ist, für den Cosinus und Sinus des halben Winkels die Gleichung

$$\pm\sqrt{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right)=$$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}+\eta\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\,i$$

gilt. Die einander entsprechenden Vorzeichen auf der linken und rechten Seite bestimmen sich durch die folgende Ueberlegung. Es war angenommen, dass der Winkel Φ zwischen 0 und 2π liegen soll; dann hat der Winkel $\frac{\Phi}{2}$ den Spielraum zwischen 0 und π und folglich wird $\sin\frac{\Phi}{2}$ niemals negativ. Mithin gehört in der vorstehenden Gleichung zu dem Pluszeichen der linken Seite die Bestimmung, dass $\eta=1$ sei, während gleichzeitig wegen der Bedingung (9) die Einheit ε das Vorzeichen der Grösse B annehmen muss. So entsteht die Gleichung

$$\sqrt{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right)= \tag{11}$$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\,i.$$

Diese Gleichung bietet das Mittel, um aus dem gegebenen Cosinus und Sinus eines beliebigen Winkels den Cosinus und Sinus des halben Winkels durch Ausziehung von Quadratwurzeln

wirklich darzustellen. Dieselbe Operation kann aber wiederholt werden und führt dann nach und nach zu der wirklichen Darstellung von dem Cosinus und dem Sinus des 4ten, des 8ten und allgemein des 2^qten Theiles des ursprünglichen Winkels, wo q eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Wenden wir dieses Verfahren auf den *ganzen Kreis* an, und bilden den Ausdruck $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, indem für n nach einander die *Potenzen der Zahl Zwei* gesetzt werden, so kommt zuerst

$$\cos\pi + i\sin\pi = -1 \tag{12a}$$

und hierauf

$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i. \tag{12b}$$

Die Substitution dieser Grösse für $A + Bi$ in die Formel (11) giebt, weil B gleich der positiven Einheit, folglich $\varepsilon = 1$ ist,

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\, i, \tag{12c}$$

und die nochmalige Anwendung

$$\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1}{2}} + \sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{1}{2}} + 1}{2}}\, i. \tag{12d}$$

Da man im Stande ist, den Cosinus und den Sinus des 2^qten Theiles der Kreisperipherie, oder die complexe Grösse

$$\cos\frac{\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{\pi}{2^{q-1}}$$

für eine beliebige positive ganze Zahl q numerisch auszudrücken, so macht es auch keine Schwierigkeit, den Cosinus und den Sinus eines beliebigen Vielfachen eines solchen Theiles numerisch anzugeben. Denn sei t eine beliebig positive ganze Zahl aus der Reihe von Null bis $2^q - 1$, so bringt die Erhebung der complexen Grösse $\cos\frac{\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{\pi}{2^{q-1}}$ auf die $t$te Potenz die Bestimmung hervor

$$\left(\cos\frac{\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{\pi}{2^{q-1}}\right)^t = \cos\frac{t\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{t\pi}{2^{q-1}}.$$

Man kann nun für eine festgewählte Zahl q eine Tafel berech-

nen, die für alle Bogen $\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ die zugehörigen Ausdrücke $\cos\frac{t\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ enthält; wie schon in § 32 unter ähnlichen Verhältnissen bemerkt worden ist, durchläuft der Bogen $\frac{t\pi}{2^{q-1}}$, immer um das Stück $\frac{\pi}{2^{q-1}}$ wachsend, die ganze Kreisperipherie, während t die Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots 2^q - 1$ durchläuft. *Eine solche Tafel ist geeignet, für eine beliebig gegebene complexe Grösse $c + di$, sobald dieselbe in die Gestalt gesetzt wird*

$$c + di = \sqrt{c^2 + d^2}(\cos\chi + i\sin\chi),$$

den zwischen 0 und 2π befindlichen Winkel χ näherungsweise zu bestimmen. In welchem Quadranten dieser Winkel zu suchen sei, lehren die Vorzeichen der Grössen $\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \cos\chi$ und $\frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sin\chi$. Weil aber innerhalb eines jeden Quadranten bei einem wachsenden Bogen der Cosinus entweder stets wächst oder stets abnimmt, und auch der Sinus entweder stets wächst oder stets abnimmt, so reicht es hin, die Grösse $\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$ mit den für den betreffenden Quadranten in der Tafel vorhandenen Cosinuswerthen zu vergleichen, um zu ersehen, ob dieselbe in der Tafel vorkommt, oder ob dieselbe zwischen zwei in der Tafel vorkommenden Cosinuswerthen liegt; zu demselben Zweck kann auch die Grösse $\frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}$ mit den für den betreffenden Quadranten in der Tafel vorkommenden Sinuswerthen verglichen werden. Auf diese Weise zeigt es sich, dass der gesuchte Winkel χ entweder einem Vielfachen der Grösse $\frac{\pi}{2^{q-1}}$ gleich, oder zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen $\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ und $\frac{(t+1)\pi}{2^{q-1}}$ eingeschlossen ist. Weil aber die Zahl q, von der die Potenz 2^q abhängt, *beliebig gross* gewählt werden kann, so ist

es möglich, den Unterschied der in Rede stehenden beiden Vielfachen, nämlich die Grösse $\frac{\pi}{2^{q-1}}$, *beliebig klein* zu machen. Der Winkel χ ist daher ein *Grenzwerth*, welchem sich die Vielfachen $\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ und $\frac{(t+1)\pi}{2^{q-1}}$, die für grösser werdende Werthe der Zahl q immer neu zu ermitteln sind, beliebig nähern, und ist daher in einer Weise bestimmt, welche den im ersten Abschnitte aufgestellten Grundsätzen entspricht.

Vermöge der beschriebenen für eine festgewählte Zahl q berechneten Tafel lassen sich *näherungsweise* die *beiden Hülfsaufgaben* lösen, welche für die Darstellung der sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $\omega^n = C$ in (11) des § 31, und für die Darstellung der sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $\omega^n = A + Bi$ in (7) des § 33 als gelöst angenommen sind. Die *erste Hülfsaufgabe* verlangt *für eine beliebige Zahl n die Bestimmung der complexen Grösse*

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{12}$$

die *zweite Hülfsaufgabe* verlangt, *wenn*

$$A + Bi = \sqrt{A^2 + B^2}\,(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

gesetzt ist, die Bestimmung der complexen Grösse

$$\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}. \tag{13}$$

Sobald die ganze Zahl n gleich irgend einer Potenz der Zahl Zwei ist, so werden beide Hülfsaufgaben durch das Verfahren gelöst, welches im Anfange des gegenwärtigen § auseinander gesetzt ist und zu der Berechnung der Tafel dient. Sobald dagegen die ganze Zahl n nicht gleich einer Potenz der Zahl Zwei ist, so sucht man mit Bezug auf die erste Hülfsaufgabe diejenige positive ganze Zahl r, für welche die Ungleichheit gilt

$$\frac{r}{2^q} < \frac{1}{n} < \frac{r+1}{2^q},$$

und findet in der Tafel für die complexe Grösse (12) die Näherungen $\cos\frac{r\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{r\pi}{2^{q-1}}$ und $\cos\frac{(r+1)\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{(r+1)\pi}{2^{q-1}}$. Behufs der zweiten Hülfsaufgabe hat man für die complexe

Grösse $A + Bi$ zuerst aus der Tafel eine angenäherte Bestimmung des Winkels Φ zu ziehen, welche mit $\frac{T\pi}{2^{q-1}}$ bezeichnet werden möge, hierauf eine positive ganze Zahl R so zu bestimmen, dass

$$\frac{R}{2^q} \leq \frac{T}{2^q n} < \frac{R+1}{2^q}$$

ist, und erhält dann als Näherungen der complexen Grösse (13) die Ausdrücke $\cos\frac{R\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{R\pi}{2^{q-1}}$ und $\cos\frac{(R+1)\pi}{2^{q-1}} + i\sin\frac{(R+1)\pi}{2^{q-1}}$.

§ 35. Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ oder $n$te Wurzeln der Einheit.

Wenn in der Gleichung (1) des § 31 die reelle positive Grösse C gleich der positiven Einheit gesetzt wird, so verwandelt sich diese Gleichung in die Gleichung

(1) $$\omega^n = 1.$$

Die n von einander verschiedenen Wurzeln derselben werden die $n$ten Wurzeln der Einheit genannt. Da die *positive* $n$te Wurzel aus der Einheit die Einheit selbst ist, so hat man für die Darstellung der in Rede stehenden n Grössen in der Formel (11) des § 31 den Factor $\sqrt[n]{C}$ durch die Einheit zu ersetzen, und bekommt den Ausdruck

(2) $$\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n},$$

in welchem nach den Ausführungen des § 32 für s die Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ zu substituiren sind. An jener Stelle ist darauf aufmerksam gemacht worden, dass, wenn man das daselbst mit (1) bezeichnete Schema bildet

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -n & -n+1 & -n+2 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

alle Werthe der Zahl s, welche in derselben vertikalen Reihe

enthalten sind und die eine arithmetische Reihe mit der Differenz n ausmachen, der Grösse $\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$ denselben Werth verleihen. Nun sieht man leicht, dass in jeder vertikalen Reihe die auftretenden positiven Zahlen, durch die Zahl n dividirt, *einen und denselben Rest* liefern, nämlich nach der in § 2 aufgestellten Definition die in der betrachteten vertikalen Reihe aus der mittelsten horizontalen Reihe

$$0, 1, 2, \ldots n-1$$

zu entnehmende Zahl. In dem § 2 sind es nur positive Zahlen, für die ein Rest bestimmt wird, da die negativen Zahlen noch gar nicht eingeführt sind. Allein auch für eine beliebige negative Zahl f kann verlangt werden, dass sie gleich der Summe eines ganzen Vielfachen des gegebenen Divisors n und einer Zahl r aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ sei

$$f = nq + r,$$

und *die durch diese Forderung vollständig bestimmte Zahl r wird dann ebenfalls der Rest der Zahl f für den Divisor r* genannt. Vermöge dieser erweiterten Definition sind in dem aufgestellten Schema alle in derselben vertikalen Reihe enthaltenen Zahlen *für den Divisor n gleichrestige Zahlen,* und irgend zwei in verschiedenen vertikalen Reihen enthaltene Zahlen *für den Divisor n ungleichrestige Zahlen.*

Die Ausdrücke (2) lassen sich, wenn s gleich einer positiven Zahl genommen wird, als Potenzen der Grösse $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ darstellen, wie für den Fall $n = 2^q$ im vorigen § bemerkt worden ist. Diese Darstellung kann auf negative Werthe der Zahl s ausgedehnt werden, indem für complexe Grössen der Gebrauch von negativen ganzen Exponenten $-m$ durch die Gleichung

$$(a + bi)^{-m} = \frac{1}{(a + bi)^m} \tag{3}$$

eingeführt wird. Die Uebertragung der Rechnung mit positiven und negativen ganzen Exponenten bringt dann auch die Bezeichnung

$$(a + bi)^0 = 1 \tag{4}$$

mit sich, die am Schlusse des § 27 anticipirt worden ist. Setzt man wie früher $a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so folgt aus (3) zunächst

$$(a+bi)^{-m} = \frac{1}{\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)}.$$

und nach der Gleichung (11) des § 30

$$(a+bi)^{-m} = \varrho^{-m}(\cos m\varphi - i\sin m\varphi).$$

Weil aber der Winkel $m\varphi$ und der Winkel $-m\varphi$ den gleichen Cosinus, jedoch den entgegengesetzten Sinus haben, so gilt die Gleichung

$$(5) \qquad (a+bi)^{-m} = \varrho^{-m}(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)),$$

die aus der Gleichung (16) des § 30 entsteht, indem die positive ganze Zahl n durch die negative ganze Zahl $-m$ ersetzt wird. Die Einsetzung der Werthe $n = 0$ und $m = 0$ bringt die obige Gleichung (4) hervor. Durch die Aufstellung der Gleichung (5) folgt für alle positiven und negativen ganzen Zahlen s mit Einschluss der Null die Gleichung

$$(6) \qquad \cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^s,$$

wie behauptet worden war.

Unter den $n$ten Wurzeln der Einheit kann es nach den Erörterungen des § 29, wofern n eine *ungerade Zahl* ist, nur *eine reelle Wurzel*, nämlich die positive Einheit, wofern n eine *gerade Zahl* ist, nur *zwei reelle Wurzeln*, nämlich die positive und die negative Einheit, geben. Von den Werthen $s = 0, 1, \ldots n-1$ bringt in dem vorstehenden Ausdrucke (6) der Werth $s = 0$ *die positive Einheit* hervor, und wenn n eine gerade Zahl ist, so liefert der Werth $s = \frac{n}{2}$ die Wurzel $\cos\pi + i\sin\pi$, die gleich *der negativen Einheit* ist. *Alle übrigen Wurzeln*, deren Anzahl im ersten Falle $n-1$, im zweiten Falle $n-2$ beträgt, *sind nicht reell, und zerfallen in lauter Paare von einander conjugirten Wurzeln; es gehört nämlich zu einer Wurzel, bei der die Zahl s einen bestimmten Werth t erhalten hat, diejenige Wurzel als conjugirte, bei der die Zahl s den Werth $n-t$ bekommt.* Denn die Grösse

$$\cos\frac{2(n-t)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-t)\pi}{n} = \cos\frac{t\pi}{n} - i\sin\frac{t\pi}{n}$$

ist mit der Grösse $\cos\frac{t\pi}{n}+i\sin\frac{t\pi}{n}$ conjugirt. Während t die Zahlen 1, 2, .. $n-1$ durchläuft, geht $n-t$ von $n-1$ bis 1; für ein ungerades n wird t niemals gleich $n-t$, für ein gerades n jedoch nur in dem schon besprochenen Falle, dass $t=\frac{n}{2}$ ist.

§ 36. Eigenschaften der *n*ten Wurzeln der Einheit. Primitive *n*te Wurzeln der Einheit.

Nach der Gleichung (6) des vorigen § hat die complexe $n$te Wurzel der Einheit $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ die Eigenschaft, dass aus derselben durch Potenzirung alle $n$ten Wurzeln der Einheit entstehen. Es ist nun von Interesse zu erfahren, ob auch eine andere $n$te Wurzel der Einheit

$$\cos\frac{2l\pi}{n}+i\sin\frac{2l\pi}{n} \tag{1}$$

die entsprechende Eigenschaft habe, dass ihre Erhebung auf ganze Potenzen die sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit hervorbringen kann. Die Erhebung der Wurzel (1) auf eine beliebige ganze Potenz vom Exponenten u giebt die Gleichung

$$\left(\cos\frac{2l\pi}{n}+i\sin\frac{2l\pi}{n}\right)^u= \tag{2}$$

$$\cos\frac{2lu\pi}{n}+i\sin\frac{2lu\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{lu}.$$

Wird nun für die ganze Zahl lu durch die Gleichung

$$lu=nq+r \tag{3}$$

der zu dem Divisor n gehörige aus der Reihe der Zahlen 0, 1, 2, .. $n-1$ zu nehmende Rest r bestimmt, so ist

$$\cos\frac{2lu\pi}{n}+i\sin\frac{2lu\pi}{n}=\cos\frac{2r\pi}{n}+i\sin\frac{2r\pi}{n}$$

oder

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{lu}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{r}, \tag{2*}$$

und es leuchtet ein, dass die linke Seite von (2) dann und nur dann die sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit darstellen kann, wenn der Rest r gleich allen Zahlen 0, 1, 2, .. $n-1$ zu werden vermag.

Sobald die Zahl l mit der Zahl n einen von der Einheit

verschiedenen gemeinsamen Theiler hat, so muss derselbe sowohl in die Zahl lu wie auch in die Zahl nq, und daher nach dem in § 5 hervorgehobenen Satze auch in die Differenz $lu - nq = r$ aufgehen; unter dieser Bedingung ist es also nicht möglich, dass r gleich jeder von den Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ werde. Es bleibt daher nur die Voraussetzung übrig, *dass die Zahl l mit der Zahl n keinen gemeinsamen Theiler habe,* und für diese gilt der Satz,

(A) *dass, wenn die Zahl l mit der Zahl n keinen gemeinsamen Theiler hat und wenn in dem Product lu für die Zahl u nach einander die Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ gesetzt werden, die Zahl r, welche den Rest des Products lu darstellt, ebenfalls diese Zahlen vollständig, jedoch abgesehen von ihrer Reihenfolge, durchläuft.*

Um diesen Satz zu beweisen, möge die Gleichung (3) für die bezeichneten n Werthe von u gebildet werden, wobei die zugehörigen Werthe des Quotienten q und des Restes r angehängte Zeiger erhalten,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} l.0 \quad &= nq_0 + r_0 \\ l.1 \quad &= nq_1 + r_1 \\ l.2 \quad &= nq_2 + r_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ l(n-1) &= nq_{n-1} + r_{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Hier müssen die n Reste $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ von einander verschieden sein. Gesetzt, es wären zwei Reste r_α und r_β, bei denen α nicht gleich β ist, einander gleich, so würde aus den beiden entsprechenden Gleichungen

$$l\alpha = nq_\alpha + r_\alpha$$

$$l\beta = nq_\beta + r_\beta$$

durch Subtraction die Gleichung

$$l(\beta - \alpha) = n(q_\beta - q_\alpha)$$

folgen. Ohne der Allgemeinheit zu vergeben, darf vorausgesetzt werden, dass die Zahl l positiv angenommen und die Differenz $\beta - \alpha$ positiv gewählt sei, so dass wegen des positiven Zeichens der Zahl n auch die Differenz $q_\beta - q_\alpha$ positiv sein müsste. Da nun vermöge der vorliegenden Gleichung das Product der beiden Zahlen l und $\beta - \alpha$ durch die Zahl n aufgeht, und nach der

Voraussetzung die Zahlen l und n ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, so muss nach dem Corollar zu dem Satze 1 des § 6 die Zahl $\beta - \alpha$ durch die Zahl n aufgehen. Dies kann aber nicht geschehen, weil sowohl β als α positive unter der Zahl n liegende Zahlen sind, ausser wenn $\beta = \alpha$ ist. Nun darf β nicht gleich α sein, also können unter den Resten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ nicht zwei einander gleiche vorkommen. Die Anzahl dieser Reste ist gleich n, jeder derselben ist gleich einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$; da nun die Anzahl der letzteren ebenfalls gleich n ist, und keiner der Reste $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ doppelt auftreten darf, so müssen die Reste abgesehen von der Reihenfolge mit den Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ übereinstimmen, und das war behauptet worden.

Eine $n$te Wurzel der Einheit, durch deren ganze Potenzen die sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit dargestellt werden können, heisst eine *primitive $n$te Wurzel der Einheit.* Nach dem so eben bewiesenen Satze besteht die Bedingung dafür, dass die Wurzel

$$\cos\frac{2l\pi}{n} + i\sin\frac{2l\pi}{n}$$

eine primitive Wurzel sei, darin, dass die Zahl l mit der Zahl n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Jede Zahl l liefert für den Divisor n einen bestimmten Rest, und nur Zahlen von *verschiedenen Resten* ergeben *verschiedene primitive $n$te Wurzeln der Einheit.* Die *Anzahl* der *primitiven $n$ten Wurzeln der Einheit* ist deshalb gleich *der Anzahl der relativen Primzahlen zu n in der Reihe der Zahlen* $1, 2, 3, \ldots n$, welche in § 9 bestimmt und mit $\varphi(n)$ bezeichnet worden ist. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass, wenn die Zahl n eine *Primzahl* ist, die *sämmtlichen $n-1$ nicht reellen $n$ten Wurzeln der Einheit,* welche den Werthen $l = 1, 2, 3, \ldots n-1$ entsprechen, zugleich *primitive $n$te Wurzeln der Einheit sind.*

Wenn man eine primitive $n$te Wurzel der Einheit successive auf die *positiven* Exponenten $1, 2, 3, \ldots n$ erhebt, so entstehen nach der gegebenen Definition die sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit, da die Erhebung auf den Exponenten n an die Stelle der Erhebung auf den Exponenten 0 getreten ist. Aus diesem Grunde ist n die niedrigste *positive ganze Zahl,* zu welcher erhoben eine primitive $n$te Wurzel der Einheit gleich der

Einheit wird. Daher hat *eine primitive Einheitswurzel der nten Ordnung die Eigenschaft, nicht zugleich eine Einheitswurzel von niedrigerer Ordnung sein zu können.*

§ 37. Zusammensetzung von Wurzeln der Einheit einer gegebenen Ordnung aus Wurzeln der Einheit einer niedrigeren Ordnung. Auflösung von unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen. Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche.

Unter gewissen Verhältnissen können die $n$ten Wurzeln der Einheit aus *Einheitswurzeln von niedrigerer Ordnung* durch *Multiplication* zusammengesetzt werden. Es sei n eine *zusammengesetzte Zahl* und gleich dem Product $n_1 n_2$, bei dem keine der beiden ganzen Zahlen n_1 und n_2 gleich der Einheit ist. Dann werden die sämmtlichen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\xi^{n_1} = 1 \text{ und } \eta^{n_2} = 1 \tag{1}$$

beziehungsweise mit Hülfe von zwei beliebigen ganzen Zahlen s_1 und s_2 durch die Ausdrücke

$$\cos\frac{2s_1\pi}{n_1} + i\sin\frac{2s_1\pi}{n_1} \text{ und } \cos\frac{2s_2\pi}{n_2} + i\sin\frac{2s_2\pi}{n_2} \tag{2}$$

dargestellt. Das Product dieser Ausdrücke erhält den Werth

$$\left(\cos\frac{2s_1\pi}{n_1} + i\sin\frac{2s_1\pi}{n_1}\right)\left(\cos\frac{2s_2\pi}{n_2} + i\sin\frac{2s_2\pi}{n_2}\right) = \tag{3}$$
$$\cos\left(\frac{2s_1\pi}{n_1} + \frac{2s_2\pi}{n_2}\right) + i\sin\left(\frac{2s_1\pi}{n_1} + \frac{2s_2\pi}{n_2}\right),$$

und bezeichnet, da die Summe der beiden Brüche mit den Nennern n_1 und n_2 gleich einem Bruche mit dem Nenner $n_1 n_2 = n$ ist,

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{s}{n_1 n_2}, \tag{4}$$

eine $n$te Wurzel der Einheit.

Sobald die Zahlen n_1 und n_2 zu einander relative Primzahlen sind, so lässt sich durch dieses Verfahren jede nte Wurzel der Einheit darstellen. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus dem Satze, dass, *wenn die Zahl n gleich dem Product der relativen Primzahlen n_1 und n_2 ist, es möglich ist, für jeden Werth der Zahl s den Bruch $\frac{s}{n}$ als eine Summe von zwei Brüchen darzustellen, deren Nenner die Zahlen n_1 und n_2 sind, oder den Bruch*

$\frac{s}{n}$ *in Partialbrüche mit den Nennern* n_1 *und* n_2 *zu zerlegen.* Es heisst dies nichts anderes, als dass für zwei relative Primzahlen n_1 und n_2 und eine beliebige Zahl s die Gleichung (4) durch zwei ganze Zahlen s_1 und s_2 stets befriedigt werden kann. Die Gleichung (4) geht durch Multiplication mit dem Nenner $n_1 n_2$ in die folgende über

$$s_1 n_2 + s_2 n_1 = s. \tag{5}$$

Diese *unbestimmte Gleichung des ersten Grades für die Unbekannten* s_1 *und* s_2 muss in *ganzen Zahlen auflösbar* sein, sobald die *unbestimmte Gleichung für die Unbekannten* t_1 *und* t_2

$$t_1 n_2 + t_2 n_1 = 1 \tag{6}$$

in *ganzen Zahlen auflösbar* ist. Denn wenn in (6) zwei ganze Zahlen t_1 und t_2 genügen, so wird die Gleichung (5) durch die ganzzahligen Werthe

$$s_1 = st_1, \quad s_2 = st_2$$

befriedigt. Dass aber, wofern n_1 und n_2 *relative Primzahlen* sind, die Gleichung (6) immer auflösbar ist, lehrt der im vorigen § bewiesene Satz (A). Denn vermöge desselben durchläuft der nach dem Divisor n_1 genommene Rest des Products $t_1 n_2$, wo n_2 relative Primzahl zu dem Divisor n_1 ist, sobald t_1 der Reihe nach gleich den Zahlen $0, 1, 2, \ldots n_1 - 1$ gesetzt wird, dieselbe Reihe von Zahlen, und wird daher Ein Mal gleich der positiven Einheit. Setzt man für diesen Fall

$$t_1 n_2 = - t_2 n_1 + 1,$$

so ist zugleich die Gleichung (6) in ganzen Zahlen aufgelöst. *Die Gleichungen* (6) *und* (5) *sind demnach, wofern* n_1 *und* n_2 *relative Primzahlen sind, immer in ganzen Zahlen auflösbar.*

Sobald die Auflösbarkeit der Gleichung (5) feststeht, können ihre *sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen* leicht angegeben werden. Es liege ausser der Auflösung s_1, s_2 noch eine zweite Auflösung

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_2$$

vor. Dann folgt aus den beiden Gleichungen

$$s_1 n_2 + s_2 n_1 = s$$
$$\sigma_1 n_2 + \sigma_2 n_1 = s$$

durch Subtraction die Gleichung

$$(\sigma_1 - s_1) n_2 = - (\sigma_2 - s_2) n_1.$$

Weil das Product $(\sigma_1 - s_1) n_2$ durch n_1 aufgeht, der Factor n_2 aber relative Primzahl zu n_1 ist, so muss nach dem im vorigen § benutzten Satze aus § 6 der Factor $\sigma_1 - s_1$ durch n_1 aufgehen, das heisst gleich dem Product von n_1 in eine ganze Zahl c sein,

(7) $$\sigma_1 - s_1 = c n_1 ,$$

und die Einsetzung dieses Ausdruckes in die letzte Gleichung giebt für die Differenz $\sigma_2 - s_2$ die zugehörige Gleichung

(8) $$\sigma_2 - s_2 = - c n_2 .$$

Die ganze Zahl c ist für *jede gegebene ganzzahlige Auflösung $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_2$ vollständig bestimmt.* Auf der anderen Seite leuchtet es ein, dass, wenn die Auflösung s_1, s_2 bekannt ist, die mit einem *beliebigen Werthe der Zahl c* gebildeten zusammengehörigen Zahlen

(9) $$s_1 + c n_1, \quad s_2 - c n_2$$

die Gleichung (5) erfüllen. *Daher enthalten die Ausdrücke* (9) *die sämmtlichen ganzzahligen Auflösungen der Gleichung* (5). *Die Werthe $s_1 + c n_1$ bilden eine unbegrenzte arithmetische Reihe mit der Differenz n_1, oder sind für diesen Divisor gleichrestige Zahlen, und die Werthe $s_2 + c n_2$ bilden eine unbegrenzte arithmetische Reihe mit der Differenz n_2, oder sind für den Divisor n_2 gleichrestige Zahlen. Die Glieder der beiden arithmetischen Reihen sind aber einander auf eine bestimmte Weise zugeordnet.*

Es kann hier noch die Bemerkung hinzugefügt werden, *dass, wenn die Zahl s keinen gemeinsamen Theiler mit dem Product $n_1 n_2 = n$ hat, sowohl die Zahl s_1 relative Primzahl zu n_1, wie auch die Zahl s_2 relative Primzahl zu n_2 sein muss.* Denn jeder gemeinsame Theiler von s_1 und n_1 müsste in Folge der Gleichung (5) in s aufgehen, und jeder gemeinsame Theiler von s_2 und n_2 müsste aus demselben Grunde ebenfalls in s aufgehen; also müsste im ersten Falle ein gemeinsamer Theiler von s und n_1, im zweiten Falle ein gemeinsamer Theiler von s und n_2 vorhanden sein, was gegen die Annahme verstösst. Auch gilt aus entsprechenden Gründen das umgekehrte, *dass, wenn die Zahl s mit n_1 einen gemeinsamen Theiler hat, dieser in s_1 aufgehen muss, und dass, wenn die Zahl s mit n_2 einen gemeinsamen Theiler hat, dieser in s_2 aufgehen muss.* Wenn daher weder s_1 mit n_1 noch s_2 mit n_2 einen gemeinsamen Theiler hat, so kann s

weder mit n_1 noch mit n_2 einen gemeinsamen Theiler haben, und muss deshalb auch relative Primzahl zu $n_1 n_2$ sein.

Kehrt man von der unbestimmten Gleichung (5) zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, den Bruch $\frac{s}{n}$ in Partialbrüche mit den Nennern n_1 und n_2 zu zerlegen, oder zu der Gleichung (4) zurück, so folgt aus der in (9) enthaltenen Darstellung der sämmtlichen Bestimmungen der gesuchten beiden Zähler, dass die betreffenden beiden Brüche selbst nothwendig die Gestalt haben

$$(10) \qquad \frac{s_1 + cn_1}{n_1} = \frac{s_1}{n_1} + c, \quad \frac{s_2 - cn_2}{n_2} = \frac{s_2}{n_2} - c.$$

Die Werthe der beiden Brüche sind demnach bis auf eine additive ganze Zahl c vollständig bestimmt. Auch ist es klar, dass, wenn der Zahl s ein neuer Werth beigelegt wird, der *mit dem früheren Werthe von s in Bezug auf den Divisor n gleichrestig ist,* der Werth des Bruches $\frac{s}{n}$ sich nur um eine ganze Zahl ändert, und dass bei der entsprechenden neuen Zerlegungsaufgabe zu dem Werthe eines jeden der beiden Partialbrüche wieder eine angemessen zu wählende ganze Zahl hinzukommt und nur eine solche ganze Zahl hinzukommen kann. Wenn dagegen der Zahl s ein neuer Werth s' beigelegt wird, der *mit dem früheren Werthe* von *s in Bezug auf den Divisor n nicht gleichrestig ist,* so kann bei der Zerlegung

$$\frac{s'_1}{n_1} + \frac{s'_2}{n_2} = \frac{s'}{n_1 n_2}$$

der Fall nicht eintreten, dass beziehungsweise $\frac{s'_1 - s_1}{n_1}$ gleich einer ganzen Zahl und gleichzeitig $\frac{s'_2 - s_2}{n_2}$ gleich einer ganzen Zahl wird, weil sonst gegen die Voraussetzung $\frac{s' - s}{n_1 n_2}$ gleich einer ganzen Zahl sein müsste.

Bis jetzt wurde die Voraussetzung festgehalten, dass die Zahl s gegeben sei, und die Zahlen s_1 und s_2 gesucht werden. Man kann aber auch die Annahme machen, dass s_1 und s_2 beliebige Zahlenwerthe erhalten und aus diesen der Werth der Zahl s hervorgehe. Alsdann folgt aus dem Gesagten, *dass, wenn*

auf der linken Seite der Gleichung (4) für die Zahl s_1 *nach einander die Werthe* $0, 1, 2, \ldots n_1 - 1$ *für die Zahl* s_2 *nach einander die Werthe* $0, 1, 2, \ldots n_2 - 1$ *gesetzt werden und jeder Werth von* s_1 *mit jedem Werthe von* s_2 *combinirt wird, die auf der rechten Seite der Gleichung erscheinende Zahl* s *für den Divisor* $n_1 n_2$ *lauter verschiedene Reste liefert. Da nun die Zahl jener Verbindungen von* s_1 *und* s_2 *gleich* $n_1 n_2$ *ist, so stimmen die auf den Divisor* $n_1 n_2$ *bezüglichen Reste der erhaltenen* $n_1 n_2$ *Zahlen* s *mit den* $n_1 n_2$ *überhaupt vorhandenen Resten*

$$0, 1, 2, 3, \ldots n - 1$$

abgesehen von der Anordnung überein.

Unter diesem Gesichtspunkte repräsentirt die Gleichung (5) *das Zusammensetzen von zwei Brüchen durch Addition.* Der so eben mitgetheilte Satz gestattet eine unmittelbare Anwendung auf die obige Gleichung (3) und lehrt, dass, wenn in dem ersten Factor der linken Seite die Zahl s_1 die Werthe $0, 1, \ldots n_1 - 1$ und in dem zweiten Factor der linken Seite die Zahl s_2 die Werthe $0, 1, 2, \ldots n_2 - 1$ durchläuft, der Ausdruck der rechten Seite, welcher mit Hinzuziehung von (4) durch

$$\cos \frac{2 s \pi}{n_1 n_2} + i \sin \frac{2 s \pi}{n_1 n_2}$$

ersetzt werden darf, für die Zahl s in Bezug auf den Divisor $n_1 n_2$ die vollständige Reihe der Reste

$$0, 1, 2, \ldots n_1 n_2 - 1$$

ergiebt. Alsdann repräsentirt aber der erste Factor der linken Seite von (3) successive *alle Wurzeln der Gleichung* $\xi^{n_1} = 1$, der zweite Factor der linken Seite von (3) successive *alle Wurzeln der Gleichung* $\eta^{n_2} = 1$, die rechte Seite von (3) *alle nten Wurzeln der Einheit* und *zwar jede ein Mal,* und es entsteht der Satz:

Wenn die Zahlen n_1 *und* n_2 *relative Primzahlen sind, und jede Wurzel der Gleichung* $\xi^{n_1} = 1$ *mit jeder Wurzel der Gleichung* $\eta^{n_2} = 1$ *multiplicirt wird, so stellen die betreffenden* $n_1 n_2$ *Producte die sämmtlichen* $n_1 n_2$ *Wurzeln der Gleichung* $\omega^{n_1 n_2} = 1$ *dar.*

Es ist vorhin bemerkt worden, dass, wofern in der Gleichung (4) die Zahl s *relative Primzahl zu* $n_1 n_2$ ist, sowohl s_1 *relative Primzahl zu* n_1 wie auch s_2 *relative Primzahl zu* n_2 sein muss, und dass, wofern s_1 *relative Primzahl* n_1 und zugleich s_2

relative Primzahl zu n_2 ist, s *relative Primzahl zu* $n_1 n_2$ sein muss.

Wenn man daher in der Gleichung (4) *für* s_1 *nacheinander die unter* n_1 *liegenden relativen Primzahlen zu* n_1, *und für* s_2 *nach einander die unter* n_2 *liegenden relativen Primzahlen zu* n_2 *setzt, und jeden Werth von* s_1 *mit jedem Werthe von* s_2 *combinirt, so liefert die auf der rechten Seite von* (4) *befindliche Zahl* s *lauter relative Primzahlen zu* $n_1 n_2$, *die in Bezug auf den Divisor* $n_1 n_2$ *ungleichrestig sind. Die Anzahl der unter* n_1 *liegenden relativen Primzahlen zu* n_1 *wird mit* $\varphi(n_1)$, *die Anzahl der unter* n_2 *liegenden relativen Primzahlen zu* n_2 *mit* $\varphi(n_2)$, *die Anzahl der unter* $n_1 n_2$ *liegenden relativen Primzahlen zu* $n_1 n_2$ *mit* $\varphi(n_1 n_2)$ *bezeichnet. Da* n_1 *und* n_2 *relative Primzahlen sind, so besteht nach* § 9 *die Gleichung*

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\,\varphi(n_2).$$

Die in Bezug auf den Divisor $n_1 n_2$ *genommenen unter einander verschiedenen Reste der sämmtlichen in Rede stehenden Werthe der Zahl* s, *deren Anzahl gleich* $\varphi(n_1)\,\varphi(n_2)$ *ist, stimmen demnach mit den sämmtlichen überhaupt vorhandenen zu dem Divisor* $n_1 n_2$ *theilerfreien Resten, das heisst, den unter* $n_1 n_2$ *liegenden relativen Primzahlen zu* $n_1 n_2$ *abgesehen von der Anordnung überein.*

Wenn man diesen Satz ebenfalls auf die Gleichung (3) anwendet, und bedenkt, dass die *primitiven Wurzeln* der Gleichungen $\xi^{n_1} = 1$, $\eta^{n_2} = 1$, $\omega^{n_1 n_2} = 1$ erhalten werden, indem man in den oft gebrauchten Ausdrücken beziehungsweise vorschreibt, dass s_1 die unter n_1 liegenden relativen Primzahlen zu n_1, dass s_2 die unter n_2 liegenden relativen Primzahlen zu n_2, dass s die unter $n_1 n_2$ liegenden relativen Primzahlen zu $n_1 n_2$ durchlaufen soll, so geht der folgende Satz hervor:

Sobald die Zahlen n_1 *und* n_2 *relative Primzahlen sind, und jede primitive Wurzel der Gleichung* $\xi^{n_1} = 1$ *mit jeder primitiven Wurzel der Gleichung* $\eta^{n_2} = 1$ *multiplicirt wird, so stellen die betreffenden* $\varphi(n_1 n_2)$ *Producte die sämmtlichen primitiven Wurzeln der Gleichung* $\omega^{n_1 n_2} = 1$ *dar.*

Um ein Beispiel für die Sätze zu geben, welche in Bezug auf die Zusammensetzung der Brüche durch Addition aufgestellt

und auf die Zusammensetzung der Einheitswurzeln durch Multiplication übertragen sind, sei die Zahl $n_1 = 3$, die Zahl $n_2 = 5$, also $n = n_1 n_2 = 15$. Die Werthe 0, 1, 2 von s_1 mögen in eine vertikale Reihe, die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 von s_2 in eine horizontale Reihe geschrieben und die zugeordneten Werthe des Bruches $\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{s}{n}$ in die zugehörigen Stellen einer Tafel eingetragen werden. Um den dem Divisor n entsprechenden Rest der Zahl s hervortreten zu lassen, soll $\frac{s}{n}$ als das Aggregat eines positiven echten Bruches und einer ganzen Zahl dargestellt werden. Auf diese Weise entsteht die Tafel von 15 Feldern:

	0	1	2	3	4
0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{2}{15}+1$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{1}{15}+1$	$\frac{4}{15}+1$	$\frac{7}{15}+1$

Die Werthe von s_1, welche mit n_1 ohne Theiler sind und die Werthe von s_2, welche mit n_2 ohne Theiler sind, werden, da sowohl 3 als 5 Primzahlen sind, dadurch erhalten, dass man in beiden Reihen von Werthen nur den Werth Null fortlässt. Hiermit fällt die oberste horizontale Reihe und die erste vertikale Reihe der Tafel fort, und die übrig bleibenden 8 Felder zeigen als Reste der Zahl s die 8 unter 15 liegenden und mit 15 theilerfreien Zahlen.

§ 38. Fortsetzung.

Sobald die Zahl n in das Product der beiden relativen Primzahlen n_1 und n_2 zerfällt, und einer der beiden Factoren etwa der Factor n_2 wieder als das Product von zwei relativen Primzahlen dargestellt werden kann, so lässt sich die Aufgabe, den Bruch $\frac{s}{n}$ gemäss der Gleichung

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{s}{n}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, nachdem sie einmal gelöst ist, mit

Bezug auf den Bruch $\frac{s_2}{n_2}$ wiederholen. Auch diese ist nach den gegebenen Erörterungen lösbar, und die betreffenden Auflösungen sind in der durch die Ausdrücke (10) des vorigen § bezeichneten Weise bestimmt. Die gleiche Operation kann so lange aufs neue angewendet werden, als einer der vorhandenen Nenner noch fähig ist, als ein Product von zwei relativen Primzahlen aufgefasst zu werden. Diese Möglichkeit muss sich aber zuletzt erschöpfen; denn nur eine Zahl, in deren Factoren wenigstens zwei verschiedene Primzahlen vorkommen, kann als ein Product von zwei relativen Primzahlen erscheinen. Das Ende der Zerfällungen tritt also dann ein, sobald die Zahl n als *ein Product der Potenzen verschiedener Primzahlen* dargestellt ist. *Es seien $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ die verschiedenen in n enthaltenen Primzahlen und man habe*

$$n = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}, \tag{1}$$

dann besteht die bezeichnete letzte Aufgabe darin, für eine beliebig gegebene Zahl s die ganzen Zahlen $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{s_1}{a_1^{\alpha_1}} + \frac{s_2}{a_2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{s_\lambda}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} = \frac{s}{n} \tag{2}$$

erfüllt wird.

Denkt man sich diese für einen bestimmten Werth von s gebildete Gleichung aufgelöst, was nach dem Vorigen immer geschehen kann, und die entsprechende einem zweiten Werthe s' von s zugeordnete Gleichung

$$\frac{s'_1}{a_1^{\alpha_1}} + \frac{s'_2}{a_2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{s'_\lambda}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} = \frac{s'}{n}$$

ebenfalls aufgelöst, so liefert die Subtraction der ersten von der zweiten die Gleichung

$$\frac{s'_1 - s_1}{a_1^{\alpha_1}} + \frac{s'_2 - s_2}{a_2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{s'_\lambda - s_\lambda}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} = \frac{s' - s}{n}.$$

Multiplicirt man beide Seiten derselben mit der Zahl n, wodurch alle Nenner fortfallen, und gebraucht abermals den Satz, dass, wenn a und b relative Primzahlen sind, und das Product

ak durch die Zahl b aufgeht, die Zahl k durch b aufgehen muss, so ergeben sich die folgenden Sätze:

1. *Sobald* $\frac{s'-s}{n}$ *gleich einer ganzen Zahl oder der Null ist, so muss jeder der Brüche*

$$\frac{s'_1-s_1}{a_1^{\alpha_1}},\ \frac{s'_2-s_2}{a_2^{\alpha_2}},\ldots\ \frac{s'_\lambda-s_\lambda}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}$$

gleich einer ganzen Zahl oder der Null sein.

2. *Sobald* $\frac{s'-s}{n}$ *nicht gleich einer ganzen Zahl und nicht gleich der Null ist, so können nicht alle Brüche*

$$\frac{s'_1-s_1}{a_1^{\alpha_1}},\ \frac{s'_2-s_2}{a_2^{\alpha_2}},\ldots\ \frac{s'_\lambda-s_\lambda}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}$$

gleich ganzen Zahlen oder der Null sein.

In ähnlicher Weise gehen aus der Gleichung (2) die Sätze hervor:

3. *Sobald s zu n relative Primzahl ist, so muss s_1 zu der Primzahl a_1, s_2 zu der Primzahl a_2, .. s_λ zu der Primzahl a_λ relativ prim sein.*

4. *Sobald s_1 zu a_1, s_2 zu a_2, .. s_λ zu a_λ relativ prim ist, so muss s zu n relativ prim sein.*

Mit diesen Mitteln erhält man auf dem durch die Gleichung (3) des vorigen § bezeichneten Wege die folgenden Sätze über die Zusammensetzung der $n$ten Wurzeln der Einheit aus Einheitswurzeln niedrigerer Ordnungen.

5. *Wenn die Zahl n gleich dem Product von Potenzen verschiedener Primzahlen $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ ist, und wenn aus je einer Wurzel von jeder der Gleichungen $\xi^{a_1^{\alpha_1}}=1$, $\eta^{a_2^{\alpha_2}}=1, \ldots \varrho^{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}=1$ ein Product gebildet wird, so stellen die n verschiedenen Producte die n verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\omega^n=1$ dar.*

6. *Wenn unter den gleichen Voraussetzungen aus je einer primitiven Wurzel von jeder der Gleichungen $\xi^{a_1^{\alpha_1}}=1$, $\eta^{a_2^{\alpha_2}}=1$, $\ldots \varrho^{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}=1$ ein Product gebildet wird, so stellen die verschiedenen Producte die verschiedenen primitiven Wurzeln der Gleichung $\omega^n=1$ dar, deren Anzahl gleich $\varphi(n)$ ist.*

§ 39. Darstellung der sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $\omega^n = A + Bi$, oder der sämmtlichen $n$ten Wurzeln aus einer complexen Grösse $A + Bi$ durch Anwendung von einer beliebigen dieser Wurzeln und der sämmtichen $n$ten Wurzeln der Einheit.

Wie die n Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ die $n$ten Wurzeln der Einheit heissen, so werden auch die n Wurzeln der mit einem reellen positiven C gebildeten Gleichung $\omega^n = C$, welche nach § 31 und 32 in dem Ausdrucke enthalten sind

$$(1) \qquad \sqrt[n]{C}\left(\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}\right),$$

die nten Wurzeln aus der reellen positiven Grösse C, und ebenso die n Wurzeln der Gleichung $\omega^n = A + Bi$, welche nach § 33 in dem Ausdrucke

$$(2) \qquad \sqrt[n]{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right)\left(\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}\right)$$

enthalten sind, *die nten Wurzeln aus der complexen Grösse* $A + Bi$ genannt. Offenbar entstehen die n Grössen (1), indem die positive $n$te Wurzel aus der positiven Grösse C successive mit den sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit multiplicirt wird, und ebenso entstehen die n Grössen (2), indem der Ausdruck $\sqrt[n]{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right)$, der selbst gleich einer bestimmten $n$ten Wurzel der Grösse $A + Bi$ ist, mit den sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit multiplicirt wird. *Die sämmtlichen Grössen (1) können aber auch dadurch erhalten werden, dass man eine beliebige von ihnen mit den sämmtlichen nten Wurzeln der Einheit multiplicirt, und desgleichen können die sämmtlichen Grössen (2) oder die sämmtlichen Wurzeln der reinen Gleichung des nten Grades* $\omega^n = A + Bi$ *erhalten werden, indem man eine beliebige von diesen mit den sämmtlichen nten Wurzeln der Einheit multiplicirt.* Denn sei k eine beliebig gewählte ganze Zahl, so liefert die Multiplication der in (1) enthaltenen Grösse

$$\sqrt[n]{C}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

mit der Einheitswurzel $\cos\frac{2t\pi}{n} + i\sin\frac{2t\pi}{n}$ das Product

$$(3) \qquad \sqrt[n]{C}\left(\cos\frac{2(k+t)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+t)\pi}{n}\right),$$

und die Multiplication der in (2) enthaltenen Grösse

$$\sqrt[n]{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

mit derselben Einheitswurzel das Product

$$(4) \sqrt[n]{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}\right)\left(\cos\frac{2(k+t)\pi}{n} + i\sin\frac{2(k+t)\pi}{n}\right).$$

Um die sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Einheit zu erhalten, kann man in dem benutzten Ausdrucke die Zahl t successive gleich den n Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ setzen. Die Betrachtung des Schemas (1) in § 32 lehrt aber, dass alsdann, wie auch die Zahl k gewählt sein möge, von den in (3) und (4) auftretenden Zahlen

$$k+t$$

die zu der Division mit der Zahl n gehörigen Reste sämmtlich ein Mal durchlaufen werden. Also werden, wie behauptet worden, *die sämmtlichen nten Wurzeln aus C durch* (3) *und die sämmtlichen nten Wurzeln aus A + Bi durch* (4) dargestellt.

Bei der Bestimmung des Winkels Φ durch die Gleichung (2) des § 33 ist festgesetzt worden, dass Φ zwischen 0 und 2π liegen soll. Bringt man aber den Ausdruck (4) der $n$ten Wurzeln aus der Grösse $A + Bi$ in die Gestalt des Products aus dem Factor

$$(4^*) \qquad \sqrt[n]{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\cos\frac{\Phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\Phi+2k\pi}{n}\right)$$

und dem die Zahl t enthaltenden Factor $\left(\cos\frac{2t\pi}{n} + i\sin\frac{2t\pi}{n}\right)$,

so zeigt die Vergleichung mit dem Ausdrucke (2), dass der zugehörige Winkel *ebensowohl zwischen zwei beliebigen auf einander folgenden ganzen Vielfachen der vollen Peripherie*, nämlich $2k\pi$ und $(2k+2)\pi$ angenommen werden darf. Aus dieser Bemerkung lässt sich für den Fall Nutzen ziehen, dass die zu der complexen Grösse $A + Bi$ conjugirte Grösse $A - Bi$ gebildet und neben die Gleichung $\omega^n = A + Bi$ die Gleichung

$$(5) \qquad \omega'^n = A - Bi$$

gestellt wird. Setzt man

$$(6) \qquad \begin{cases} A + Bi = P(\cos\Phi + i\sin\Phi) \\ A - Bi = P'(\cos\Phi' + i\sin\Phi') \end{cases}$$

so wird, da nach einer in § 27 gemachten Bemerkung zwei conjugirte complexe Grössen dieselbe Norm und denselben analytischen Modul haben,

(7) $$P' = P = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Ist ferner der Winkel Φ zwischen 0 und 2π bestimmt, so findet sich, falls Φ' in demselben Intervall liegen soll, $\Phi' = 2\pi - \Phi$, da $\cos(2\pi - \Phi) = \cos\Phi$ und $\sin(2\pi - \Phi) = -\sin\Phi$ ist.

Wird dagegen angenommen, dass Φ' negativ und zwischen 0 und -2π gelegen sei, so ist

(8) $$\Phi' = -\Phi$$

zu setzen. Um nun die sämmtlichen $n$ten Wurzeln aus der Grösse $A + Bi$ darzustellen, wird man in dem obigen Ausdrucke (2) den analytischen Modul $\sqrt{A^2 + B^2}$ ungeändert lassen, und statt des Winkels Φ', der an die Stelle von Φ treten muss, dessen Werth $-\Phi$ aus der Gleichung (8) substituiren. Die Zahl s muss jetzt n Werthe erhalten, deren nach dem Divisor n genommene Reste von einander verschieden sind; diese Eigenschaft haben die n Zahlen $0, -1, -2, -3, \ldots -(n-1)$. Ersetzt man daher in der bezeichneten Formel die unbestimmte ganze Zahl s durch die unbestimmte ganze Zahl $-s$, so entsteht der Ausdruck

(9) $$\sqrt[n]{\sqrt{A^2 + B^2}}\left(\cos\frac{\Phi}{n} - i\sin\frac{\Phi}{n}\right)\left(\cos\frac{2s\pi}{n} - i\sin\frac{2s\pi}{n}\right),$$

und repräsentirt, wie leicht einzusehen, die n Wurzeln der Gleichung (5), indem die Zahl s die Reihe der Zahlen 0, 1, 2, ... $n-1$ durchläuft. Bei der Vergleichung von (9) mit dem Ausdrucke (2), der bei denselben Werthen der Zahl s die n Wurzeln der Gleichung $\omega^n = A + Bi$ liefert, zeigt sich, dass für den gleichen Werth von s die Grösse $\cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}$ mit der Grösse $\cos\frac{\Phi}{n} - i\sin\frac{\Phi}{n}$, die Einheitswurzel $\cos\frac{2s\pi}{n} + i\sin\frac{2s\pi}{n}$ mit der Einheitswurzel $\cos\frac{2s\pi}{n} - i\sin\frac{2s\pi}{n}$, und daher auch der eine Ausdruck mit dem andern conjugirt ist. Hieraus folgt der Satz, *dass je eine nte Wurzel der Grösse $A - Bi$ je einer nten Wurzel der Grösse $A + Bi$ so zugeordnet werden kann, dass die entsprechenden Wurzeln einander conjugirt sind.*

§ 40. Hülfsaufgaben zur Darstellung der $n$ten Wurzeln aus einer complexen Grösse $A + Bi$.

Am Schluss des § 34 sind die beiden Hülfsaufgaben hervorgehoben, deren Lösung für die Darstellung der n Wurzeln der Gleichung $\omega^n = A + Bi$ vorausgesetzt wird. Die *erste Hülfsaufgabe*, welche für *eine beliebige Zahl n* die Bestimmung der complexen Grösse

$$(1)\qquad \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

verlangt, hat nach dem jetzt eingeführten Sprachgebrauche *eine gewisse primitive nte Wurzel der Einheit* zum Gegenstande, und ist vermöge der nunmehr entwickelten Resultate *einer Zurückführung auf einfachere Aufgaben derselben Art* fähig. Denn wenn die Zahl n als das *Product von Potenzen verschiedener Primzahlen* $a_1, a_2 \ldots a_\lambda$ aufgefasst wird

$$n = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$$

und wenn die Wurzeln der Gleichungen

$$(2)\qquad \xi^{a_1^{\alpha_1}} = 1,\ \eta^{a_2^{\alpha_2}} = 1, \ldots \varrho^{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} = 1$$

bekannt sind, so ist nach den Sätzen 5 und 6 des § 38 die in Rede stehende wie überhaupt jede $n$te Wurzel der Einheit als ein Product von bestimmten Wurzeln dieser Gleichungen ebenfalls bekannt. Die sämmtlichen Wurzeln von jeder der Gleichungen (2) werden beziehungsweise aus den Wurzeln

$$(3)\qquad \cos\frac{2\pi}{a_1^{\alpha_1}} + i\sin\frac{2\pi}{a_1^{\alpha_1}},\ \cos\frac{2\pi}{a_2^{\alpha_2}} + i\sin\frac{2\pi}{a_2^{\alpha_2}}, \ldots$$

$$\cos\frac{2\pi}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} + i\sin\frac{2\pi}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}$$

durch Erhebung auf ganze Potenzen hervorgebracht.

Die Darstellung der Grösse (1), *bei der die Zahl n einen beliebigen Werth hat, ist also auf diejenigen Fälle zurückgeführt, in denen die Zahl n gleich der Potenz einer Primzahl ist.*

Die erwähnte *zweite Hülfsaufgabe*, welche dahin geht, aus der gegebenen complexen Grösse $A + Bi$, nachdem

$$A + Bi = \sqrt{A^2 + B^2}\,(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

gesetzt ist, die complexe Grösse

$$(4) \qquad \cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}$$

zu bestimmen, kann einer *entsprechenden Reduction* unterworfen werden. Wenn für die Zahl n, die wir uns in der angegebenen Weise in ein Product von Primzahlpotenzen aufgelöst denken, nach der Vorschrift des § 38 der Bruch $\frac{1}{n}$ in Partialbrüche mit den Nennern $a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ zerlegt wird, so dass der dortigen Gleichung (2) gemäss die Gleichung

$$(5) \qquad \frac{r_1}{a_0^{\alpha_1}} + \frac{r_2}{a_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{r_\lambda}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} = \frac{1}{n}$$

entsteht, so können die ganzen Zahlen $r_2, r_2, \ldots r_\lambda$ verwendet werden, um die Grösse (4) als das folgende Product von ganzen Potenzen auszudrücken.

$$(6) \quad \left(\cos\frac{\Phi}{a_1^{\alpha_1}} + i\sin\frac{\Phi}{a_1^{\alpha_1}}\right)^{r_1}\left(\cos\frac{\Phi}{a_2^{\alpha_2}} + i\sin\frac{\Phi}{a_2^{\alpha_2}}\right)^{r_2}\cdots$$
$$\left(\cos\frac{\Phi}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} + i\sin\frac{\Phi}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}\right)^{r_\lambda}.$$

Es ist daher genügend, aus der Grösse $A + Bi$ die Grössen

$$(7) \quad \cos\frac{\Phi}{a_1^{\alpha_1}} + i\sin\frac{\Phi}{a_1^{\alpha_1}}, \; \cos\frac{\Phi}{a_2^{\alpha_2}} + i\sin\frac{\Phi}{a_2^{\alpha_2}}, \ldots$$
$$\cos\frac{\Phi}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} + i\sin\frac{\Phi}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}$$

abzuleiten.

Die Bestimmung der Grösse (4), *bei der die Zahl n einen beliebigen Werth hat, reducirt sich demnach ebenfalls auf diejenigen Fälle, in denen die Zahl n gleich der Potenz einer Primzahl ist.*

Unter gewissen Verhältnissen kommt es darauf an, eine beliebig gegebene complexe Grösse, von der die $n$te Wurzel gebildet werden soll, als das Product aus einer complexen Grösse, deren reeller Theil *positiv* ist, und einer der Einheiten -1, i, $-i$ darzustellen. Wenn in der gegebenen Grösse $A + iB$ der reelle Theil A negativ ist, hat man $A + iB$ gleich

dem Product $(-1)(-A-iB)$, wenn $A=0$ und B positiv, $A+iB=i(B)$, wenn $A=0$ und B negativ, $A+iB=-i(-B)$ zu nehmen.

Da ferner $-1=\cos\pi+i\sin\pi$, $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, $-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$ ist, so ergiebt sich für die vier Fälle Folgendes: Es sei $A>0$, so kommt $A+iB=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\Phi+i\sin\Phi)$, es sei $A<0$ und $-A-iB=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\Phi+i\sin\Phi)$, so kommt $A+iB=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\pi+i\sin\pi)$, es sei $A=0, B>0$, so kommt $A+iB=B\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, und es sei $A=0$, $B<0$, so kommt $A+iB=-B\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Die sämmtlichen $n$ten Wurzeln der Grösse $A+iB$ lassen sich also durch Multiplication aus einer $n$ten Wurzel einer complexen Grösse, deren reeller Theil positiv ist, und aus der $n$ten Wurzel aus der complexen Grösse $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, welche gleich $\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}$ ist, zusammensetzen.

Die Darstellung der $n$ten Wurzeln aus einer complexen Grösse $A+Bi$ erfordert ausser den beiden so eben besprochenen Aufgaben noch die Ausziehung der positiven Quadratwurzel aus der reellen positiven Norm A^2+B^2, und dann die Ausziehung der positiven $n$ten Wurzel aus dieser positiven Quadratwurzel. Die letzteren Aufgaben sind in § 34 nicht besonders genannt worden, weil ihre Lösung schon in § 20 erörtert worden ist. Jedoch *kann auch die Ausziehung der positiven nten Wurzeln aus einer positiven Grösse C auf die Ausziehung von solchen positiven Wurzeln aus der Grösse C zurückgeführt werden, deren Ordnungszahlen die in der Zahl n enthaltenen Primzahlpotenzen sind.* Da nämlich die in § 19 für die Rechnung mit gebrochenen Potenzen aufgestellten Regeln zufolge einer in § 20 gemachten Bemerkung nicht nur für einen positiven rationalen Bruch C, sondern für jeden beliebigen positiven Werth C gültig sind, so führt die Benutzung der Gleichung (5), mittelst deren der Bruch $\frac{1}{n}$ in Partialbrüche mit den Nennern $a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ zerlegt wird, zu der Gleichung

$$(8)\qquad \left(C^{\frac{1}{a_1^{\alpha_1}}}\right)^{r_1}\left(C^{\frac{1}{a_2^{\alpha_2}}}\right)^{r_2}\cdots\left(C^{\frac{1}{a_\lambda^{\alpha_\lambda}}}\right)^{r_\lambda}=C^{\frac{1}{n}}.$$

Die positive $n$te Wurzel aus C ist somit gleich einem Product ganzer Potenzen von den positiven Wurzeln aus C, deren Ordnung durch die Primzahlpotenzen $a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ bezeichnet wird.

Die Darstellung der nten Wurzeln aus einer beliebig gegebenen complexen Grösse $A + Bi$ ist im Vorstehenden so eingehend behandelt worden, weil *diese Operation* den Grundoperationen der Rechnung, nämlich der *Addition*, *Subtraction*, *Multiplication* und *Division*, an die Seite gesetzt wird, so dass *diese fünf Operationen zusammengenommen algebraische Operationen heissen.*

Die Darstellung der $n$ten Wurzeln aus einer gegebenen Grösse wird eine *algebraische irrationale Operation* genannt, und im Gegensatze hierzu heissen die vier ersten Grundoperationen *algebraische rationale Operationen.* Mit Rücksicht auf diesen Gegensatz war es von besonderer Bedeutung, *möglichst einfache* Aufgaben zu ermitteln, mit Hülfe von deren Lösung die neue fünfte Operation durch Anwendung der vier ersten Operationen ausgeführt werden kann. Darum ging das Streben dahin, die in diesem § wieder berührten *beiden Hülfsaufgaben* und *die Ausziehung der positiven nten Wurzel aus einer gegebenen positiven Grösse* auf einfachere Aufgaben der entsprechenden Art zurückzuführen. Für die erste Hülfsaufgabe, welcher man auch den Ausdruck giebt, *den Kreis in n gleiche Theile zu theilen*, desgleichen für die zweite, welcher man den analogen Ausdruck giebt, *einen gegebenen Winkel in n gleiche Theile zu theilen*, und ebenso für die genannte dritte Aufgabe liess sich eine Zurückführung auf die Fälle bewerkstelligen, in denen die Zahl n gleich der *Potenz einer Primzahl* ist.

§ 41. Theilung eines Kreises in n gleiche Theile. Merkmale der Theilungen eines Kreises, die mit alleiniger Hülfe von Lineal und Zirkel ausführbar sind.

Die beiden Aufgaben, welche so eben den Ausdruck erhalten haben, *den Kreis in n gleiche Theile zu theilen*, und *einen gegebenen Winkel in n gleiche Theile zu theilen*, sind im Vorher-

gehenden als *Aufgaben der Rechnung* gestellt und behandelt worden; diese Benennungen beziehen sich aber ursprünglich auf die entsprechenden *Aufgaben der geometrischen Construction*, die das griechische Alterthum der neueren Zeit überliefert hat. Um kein Missverständniss eintreten zu lassen, erinnere ich ausdrücklich daran, dass weder bei der ersten geometrischen Aufgabe die Länge der Peripherie des mit der Längeneinheit als Radius beschriebenen Kreises, noch bei der zweiten geometrischen Aufgabe die in einem solchen Kreise einem bestimmten Winkel zugehörende Bogenlänge in Frage kommt. Die erste geometrische Aufgabe fällt mit der Aufgabe zusammen, *in einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Polygon von n Seiten zu beschreiben.* Bei der zweiten geometrischen Aufgabe hat man sich den gegebenen Winkel als einen durch zwei gerade Linien gebildeten Winkel zu denken, und der $n$te Theil dieses Winkels soll ebenfalls als durch zwei gerade Linien gebildeter Winkel bestimmt werden.

Wenn der Cosinus und der Sinus eines Winkels Φ durch die Gleichungen

$$\cos\Phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\Phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

gegeben sind, so ist Φ als ein Winkel bestimmt, der von zwei Seiten eines *gewissen rechtwinkligen Dreiecks* gebildet wird.

Im Anschluss an die im § 30 entwickelten Vorstellungen sei O ein in einer Ebene angenommener fester Punkt, durch diesen Punkt gehe eine gerade Linie und zwar, um eine bestimmte Annahme zu machen, ursprünglich von dem Punkte O aus *horizontal* und *nach links.* Die gerade Linie werde, wie an der angeführten Stelle angenommen ist, *von der linken zur rechten Hand gedreht,* und komme, nachdem sie einen rechten Winkel beschrieben hat, in eine Lage, bei der dieselbe *vertikal und von dem Punkte O aus nach oben* gerichtet ist. Um den Punkt O sei mit der Längeneinheit als Radius ein Kreis gezeichnet, dann sind die Bogen dieses Kreises das in § 30 eingeführte Mass der Winkel, welche die ursprüngliche Lage der in O festen geraden Linie mit den durch Drehung entstandenen Lagen derselben macht. Um den bezeichneten Winkel Φ zu determiniren, wird man auf der von O ausgehenden horizontalen Graden von dem

Punkte O ab eine Strecke abschneiden, und zwar nach links oder nach rechts, je nachdem der gegebene Cosinuswerth $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ positiv oder negativ ist, die Länge gleich dem numerischen oder absoluten Werthe der Grösse $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ nehmen, und in dem zweiten Endpunkt dieser Strecke P eine vertikale Linie ziehen. In gleicher Weise wird man auf der von O ausgehenden vertikalen Geraden von dem Punkte O ab eine Strecke abschneiden, und zwar nach oben oder nach unten, je nachdem der gegebene Sinuswerth $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ positiv oder negativ ist, die Länge gleich dem numerischen oder absoluten Werthe der Grösse $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ nehmen, und in dem zweiten Endpunkt dieser Strecke Q eine horizontale Linie ziehen. Die in dem Punkte P und in dem Punkte Q construirten Linien müssen sich dann wegen der Gleichung $\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi = 1$ in einem bestimmten Punkte R der Peripherie des um O mit der Längeneinheit beschriebenen Kreises schneiden, und der in dem rechtwinkligen Dreiecke POR bei O auftretende Winkel bestimmt den gesuchten Winkel Φ. Wenn die von der linken zur rechten Hand auszuführende Drehung, durch welche die in O feste gerade Linie von der Anfangslage in die Lage OR gebracht wird, weniger als zwei Rechte beträgt, so ist nach den in § 30 getroffenen Annahmen der Dreieckswinkel POR dem Winkel Φ gleich. Wenn jene Drehung mehr als zwei Rechte und weniger als vier Rechte beträgt, so ist der Dreieckswinkel POR dem Winkel $2\pi - \Phi$ gleich. Ebenso entspricht der Frage nach den Grössen $\cos\frac{\Phi}{n}$ und $\sin\frac{\Phi}{n}$ die Frage nach einem rechtwinkligen Dreieck, in dem die Längen der Katheten beziehungsweise durch die absoluten Werthe jener Grössen gemessen werden.

Bekanntlich gestatteten die Alten bei der Ausführung einer geometrischen Construction den Gebrauch keines anderen Hülfsmittels als den des *Lineals* und des *Zirkels*. Man suchte daher auch die genannten beiden Aufgaben mit ausschliesslicher Anwendung des Lineals und des Zirkels zu lösen. Es gelang mit

diesen Hülfsmitteln einen beliebig gegebenen Winkel in *zwei gleiche Theile zu theilen*, während die Dreitheilung eines beliebig gegebenen Winkels unüberwindliche Schwierigkeiten darbot. Aus der Halbirung eines beliebigen Winkels folgte die Möglichkeit, den Kreis in eine Anzahl von gleichen Theilen zu theilen, die *eine beliebige Potenz der Zwei ist*, und allgemein die Möglichkeit, sobald der Kreis in eine gewisse Zahl von gleichen Theilen getheilt war, denselben in die doppelte Zahl von gleichen Theilen zu theilen. Von anderen Theilungen wurde die Theilung des Kreises in *drei gleiche Theile*, ferner die Theilung in *fünf gleiche Theile* gefunden, und aus diesen Theilungen die Theilung in *fünfzehn gleiche Theile* abgeleitet.

Das unterscheidende Merkmal für diejenigen geometrischen Aufgaben, welche mit Lineal und Zirkel allein construirt werden können, hat erst *Descartes*, der Begründer der nach ihm benannten oder *analytischen Geometrie*, aufgestellt. Das erste Buch seiner zum ersten Male 1637 erschienenen *Geometrie* handelt von den Problemen, die durch *den ausschliesslichen Gebrauch von geraden Linien und Kreisen construirt werden können.*

Descartes beginnt dieses Buch mit der Bemerkung, dass alle geometrischen Probleme leicht in eine solche Gestalt gebracht werden können, dass zu ihrer Construction nur nothwendig ist, *die Länge von gewissen geraden Linien kennen zu lernen.* Wie die ganze Arithmetik in den Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens und der Wurzelausziehung bestehe, so habe man in der Geometrie, um die gesuchten Linien zu bestimmen, keine anderen Operationen auszuführen, als die Operationen, von Linien, die ihrer Länge nach gegeben sind, die Summe, die Differenz, das durch die Längeneinheit dividirte Product und den mit der Längeneinheit multiplicirten Quotienten zu construiren, und zwischen einer Linie, die als Einheit betrachtet wird, und einer beliebigen anderen Linie eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionalen einzuschalten, was mit der Ausziehung einer Quadratwurzel, Cubikwurzel u. s. f. gleichbedeutend sei.

Nachdem nun *Descartes* von den genannten vier Grundaufgaben und von der Ausziehung einer Quadratwurzel eine geometrische Construction gegeben hat, welche sich nur der ge-

raden Linien und des Kreises bedient, schreibt er vor, dass man bei der Betrachtung eines geometrischen Problems allen für die Construction wesentlichen Linien, seien sie bekannt oder unbekannt, bestimmte Benennungen beilegen, den Inhalt des Problems durch eine oder mehrere Gleichungen ausdrücken, und mit diesen Gleichungen so verfahren solle, bis zuletzt nur *eine Gleichung* mit *einer Unbekannten* übrig bleibt.

Hierauf spricht *Descartes* den Satz aus, dass, wenn das Problem allein durch gerade Linien und Kreise construirbar sein soll, jene letzte Gleichung höchstens eine quadratische zu sein habe. Der Grund dieses Satzes ist der, dass die Auflösung einer quadratischen Gleichung auf die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und die Ausziehung einer Quadratwurzel hinaus kommt, also auf diejenigen Operationen, deren Construction mit Lineal und Zirkel *Descartes* gelehrt hat.

Es darf deshalb das allgemeine Resultat so ausgedrückt werden, *dass ein geometrisches Problem durch gerade Linien und Kreise allein construirt werden kann, sobald es möglich ist, die Länge der zu suchenden geraden Linien vermittelst der Längen der bekannten geraden Linien durch Ausdrücke darzustellen, welche ausser der Addition, Subtraction, Multiplication und Division nur die Ausziehung der Quadratwurzel voraussetzen.*

Von dem jetzt gewonnenen Gesichtspunkte aus lässt sich erkennen, dass die *geometrische Lösung* der Aufgaben, *den Kreis in n gleiche Theile zu theilen,* und *einen gegebenen Winkel in n gleiche Theile zu theilen* in dem Falle *mit ausschliesslicher Anwendung des Lineals und des Zirkels* ausgeführt werden kann, wenn die gleichnamigen Aufgaben der Rechnung, die im Vorigen erörtert worden sind, ausser den vier Species *nur die Ausziehung von Quadratwurzeln* erfordern. Bei der Aufgabe der Kreistheilung ist die Länge der einzigen Linie, von welcher der Kreis abhängt, die Länge des Kreisradius, und diese haben wir gleich der Einheit angenommen. Bei der Aufgabe, einen gegebenen Winkel zu theilen, sind die Längen der Katheten des vorhin mit POR bezeichneten Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich der Einheit ist, gegeben. Die genannten Linien sind, sobald die erwähnte Methode des *Descartes* angewendet werden soll, die für die beiden geometrischen Probleme wesentlichen *Linien von*

bekannter Länge. Gleichzeitig repräsentiren für das erste Problem der reelle und der imaginäre Theil der Grösse

$$(1) \qquad \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

und für das zweite Problem der reelle und der imaginäre Theil der Grösse

$$(2) \qquad \cos\frac{\Phi}{n} + i\sin\frac{\Phi}{n}$$

die *Längen der gesuchten Linien.* Wenn also ein Ausdruck von (1) und (2) gefunden ist, so führt die Trennung des Reellen und des Imaginären geradesweges zu denjenigen Darstellungen der Längen der gesuchten Linien, welche aus der Anwendung der Methode des *Descartes* hervorgehen. Damit das betreffende geometrische Problem mit Lineal und Zirkel allein construirt werden könne, muss der zugeordnete Ausdruck (1), beziehungsweise (2), allein durch Quadratwurzel-Ausziehungen darstellbar sein.

Der in § 34 gelieferte Nachweis, *wie aus dem gegebenen Cosinus und Sinus eines beliebigen Winkels der Cosinus und der Sinus des halben Winkels durch Ausziehung von Quadratwurzeln dargestellt werden kann*, entspricht daher genau der von den Alten gelösten Aufgabe, *einen beliebigen Winkel mit Lineal und Zirkel in zwei gleiche Theile zu theilen.*

Auch die in § 40 entwickelte *Zurückführung der Aufgabe, den Kreis oder respective einen gegebenen Winkel in n gleiche Theile zu theilen*, correspondirt mit *einer Zurückführung der betreffenden geometrischen Aufgabe.* Denn wenn wie an der angeführten Stelle die Zahl n gleich dem Product von Potenzen verschiedener Primzahlen $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ gesetzt ist, und die gesuchten Theilungen resp. in $a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ gleiche Theile vorliegen, so wird nach den dort gegebenen Erörterungen die zu leistende Theilung in n Theile durch die Addition und Subtraction von Vielfachen bekannter Winkel erhalten. *Die Addition und Subtraction bekannter Winkel gehört aber zu den mit Lineal und Zirkel construirbaren Aufgaben.*

Es bleiben jetzt noch diejenigen Theilungen des ganzen Kreises in n gleiche Theile zu besprechen, bei denen die Zahl

n gleich einer *Primzahl* oder gleich der *Potenz einer Primzahl* ist, und die mit Lineal und Zirkel construirt werden können. Wie schon hervorgehoben, ist eine solche Construction dann möglich, wenn die zugeordnete $n$te Wurzel der Einheit $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ fähig ist, allein durch Quadratwurzelausziehungen dargestellt zu werden. Für die hierher gehörigen Fälle, in denen die Zahl n gleich *einer beliebigen Potenz der Zwei* ist, ist das Bildungsgesetz der zugeordneten Einheitswurzeln in § 34 entwickelt worden. Die dortigen Gleichungen (12_a), (12_b), (12_c), (12_d), enthalten die Ausdrücke

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ &\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \\ &\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\, i, \\ &\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+1}{2}} + \sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{1}{2}}+1}{2}}\, i. \end{aligned}\right.$$

Hiebei ist namentlich darauf aufmerksam zu machen, *dass die imaginäre Einheit selbst eine primitive vierte Wurzel der Einheit ist, und dass die in* § 27 *erwähnten in dem Gebiete der complexen Grössen vorhandenen Einheiten, welche durch die ganzen Potenzen der Grösse i dargestellt werden, mit den vier vierten Wurzeln der Einheit zusammenfallen.*

Die geometrische Theilung des Kreises in drei Theile pflegt aus der Theilung in sechs Theile, die Theilung des Kreises in fünf Theile aus der Theilung in zehn Theile abgeleitet zu werden. Es sei n gleich der Zahl Drei oder Fünf, σ gleich der Seite des in den Kreis von dem Radius Eins eingeschriebenen regulären $2n$ Ecks. Wird von dem Centrum des Kreises auf eine Seite dieses regulären Polygons ein Loth herabgelassen, so bildet die Länge dieses Lothes den Cosinus und die Länge der halben Seite des Polygons den Sinus von der Hälfte des Centriwinkels, welcher zu einer Seite des $2n$ Ecks gehört. Dieser Centriwinkel hat das Mass $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, und daher gilt die Gleichung

$$(4)\qquad \cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n} = \sqrt{1-\frac{\sigma^2}{4}} + \frac{\sigma}{2}i.$$

Nun ist für $n=3$ die Seite σ des regulären Sechsecks gleich dem Radius,

$$\sigma = 1;$$

für $n=5$ wird die Seite σ des regulären Zehnecks durch den goldenen Schnitt folgendermassen bestimmt

$$\sigma = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Mithin liefert die Gleichung (4) die Resultate

$$(5)\qquad \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}i. \end{cases}$$

Weil aber

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$$

und

$$\frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}$$

ist, so bestehen die Gleichungen

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \left(\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Die Substitution der gefundenen Ausdrücke ergiebt daher für die betreffende *dritte* und *fünfte Wurzel der Einheit* die Darstellungen

$$(6)\qquad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i,$$

$$(7)\qquad \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,i.$$

Die Frage, ob ausser den im Alterthume gefundenen, mit Lineal und Zirkel ausführbaren Theilungen des Kreises noch andere mit denselben Mitteln ausführbare Theilungen existiren, hat zweitausend Jahre lang geruht, bis *Gauss* die Antwort entdeckte. In der siebenten Section seiner *disquisitiones arithmeticae* beweist *Gauss*, dass die Theilung des Kreises in n gleiche Theile für diejenigen *Primzahlen* n mit Hülfe des Lineals und

Zirkels bewerkstelligt werden kann, oder dass die $n$ten Wurzeln der Einheit dann durch Quadratwurzelzeichen allein darstellbar sind, wenn *die um die Einheit verminderte Primzahl n gleich einer Potenz der Zahl Zwei* ist. Dies trifft bei den Primzahlen 3 und 5 zu; die nächsten Primzahlen von dieser Beschaffenheit sind $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$. Wegen der Begründung des angeführten Resultats und wegen der allgemeinen Theorie der Kreistheilungsgleichung $\omega^n = 1$, aus welcher jenes Resultat hervorgeht, muss auf die *disquisitiones arithmeticae* selbst verwiesen werden.

§ 42. Bestimmung eines Punktes in einer Ebene durch die Geometrie des *Descartes* oder die analytische Geometrie. *Gauss'* geometrische Darstellung der complexen Grössen. Deutung der Addition und Multiplication von complexen Grössen und der Bestimmung der $n$ten Wurzeln aus einer complexen Grösse.

Die erwähnte Aussage des *Descartes*, dass alle geometrischen Probleme leicht in eine solche Gestalt gebracht werden können, dass zu ihrer Construction nur *die Kenntniss von der Länge gewisser gerader Linien* erforderlich ist, hängt auf das Genaueste mit dem *Grundprincip der Geometrie* des *Descartes* oder der *analytischen Geometrie* zusammen, welches er in dem zweiten Buche des angeführten Werkes dargestellt hat. Dieses Princip, vermöge dessen *der Ort eines Punktes in einer Ebene* und *der Ort eines Punktes im Raume durch die Messung der Länge von gewissen geraden Linien bestimmt wird*; werde ich jetzt, soweit es den Ort eines Punktes in einer Ebene anlangt, in Kürze auseinandersetzen. Denn das Verständniss von vielen in der Algebra auftretenden Erscheinungen wird durch die Verknüpfung mit geometrischen Anschauungen wesentlich erleichtert, und die anlaytische Geometrie bietet hierzu eine Handhabe.

Die Bestimmung des Ortes, den ein Punkt in einer Ebene einnimmt, kann auf die geometrischen Vorstellungen gegründet werden, die zuerst in § 30 bei dem Messen eines Winkels eingeführt und hierauf in dem vorigen § weiter entwickelt sind. Durch den festen Punkt O gehen zwei gerade Linien, die sich senkrecht schneiden, und von denen wir wie im vorigen § die

eine horizontal, die andere vertikal annehmen. Zugleich soll wieder die *linke Seite der horizontalen*, und die *obere Seite der vertikalen geraden Linie* einen *Vorzug* erhalten. Gegenwärtig wird die horizontale gerade Linie als *die erste Axe*, die vertikale gerade Linie als *die zweite Axe* bezeichnet werden. Irgend ein Punkt $\mathfrak{R}$ der Ebene kann nun entweder auf der ersten Axe, oder auf der zweiten Axe liegen, oder auf keiner von beiden Axen; nur der Punkt O liegt als der Durchschnittspunkt der beiden Axen auf beiden zugleich. Wenn der Punkt $\mathfrak{R}$ auf der ersten Axe liegt, so ist seine Lage völlig bestimmt, falls man erstens weiss, ob er sich links oder rechts von dem Punkte O befindet, und zweitens das Mass seines Abstandes von dem Punkte O kennt. Um den Abstand O$\mathfrak{R}$ zu messen, muss, wie schon früher geschehen ist, eine an und für sich beliebige aber völlig bestimmte Länge als die Einheit der Länge gewählt sein; das Mass einer gegebenen geraden Linie ist die *Zahlengrösse*, welche ausdrückt, welches Vielfache der Längeneinheit zu nehmen ist, oder welche Theile der Längeneinheit zu nehmen sind, um die zu messende gerade Linie zu erhalten. Wenn der Punkt $\mathfrak{R}$ auf der zweiten Axe liegt, so ist seine Lage genau bestimmt, sobald man erstens weiss, ob derselbe oberhalb oder unterhalb von dem Punkte O liegt, und zweitens das in derselben Längeneinheit ausgedrückte Mass seines Abstandes von dem Punkte O kennt.

Wenn sich dagegen der Punkt $\mathfrak{R}$ auf keiner der beiden Axen befindet, so kann man von demselben auf jede Axe ein Loth herablassen, und zwar möge der Fusspunkt des auf die erste Axe gefällten Lothes $\mathfrak{P}$, der Fusspunkt des auf die zweite Axe gefällten Lothes $\mathfrak{Q}$ genannt werden. Es leuchtet nun ein, dass, wofern die Lage der Fusspunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bekannt ist, der Punkt $\mathfrak{R}$ sogleich durch Construction gefunden werden kann; denn eine durch den Punkt $\mathfrak{P}$ zu der zweiten Axe gezogene Parallele und eine durch den Punkt $\mathfrak{Q}$ zu der ersten Axe gezogene Parallele müssen sich nothwendig schneiden und können sich in keinem anderen Punkte, als in dem Punkte $\mathfrak{R}$ schneiden. Um aber den Ort des Punktes $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, genügt es, wie für den auf der ersten Axe befindlichen Punkt $\mathfrak{R}$ hervorgehoben ist, *die Länge der Linie* O$\mathfrak{P}$ *zu messen, und zu bemerken, ob* $\mathfrak{P}$ *links oder rechts von* O *liegt;* in gleicher Weise genügt es zu der

Bestimmung des Punktes $\mathfrak{Q}$, *die Länge der Linie* $O\mathfrak{Q}$ *zu messen, und zu bemerken, ob* $\mathfrak{Q}$ *oberhalb oder unterhalb* O *liegt.*

Es wird jetzt festgesetzt, dass die *absolute Zahlengrösse*, welche vermöge der angenommenen Längeneinheit die Länge der Linie $O\mathfrak{P}$ ausdrückt, mit *einem positiven Vorzeichen* versehen werde, sobald $\mathfrak{P}$ *links* von O liegt, und mit *einem negativen Vorzeichen*, sobald $\mathfrak{P}$ *rechts* von O liegt; es wird ferner festgesetzt, dass die *absolute Zahlengrösse*, welche vermöge der angenommenen Längeneinheit die Linie $O\mathfrak{Q}$ ausdrückt, mit *einem positiven Vorzeichen* versehen werde, sobald $\mathfrak{Q}$ *oberhalb* O liegt, und mit *einem negativen Vorzeichen*, sobald $\mathfrak{Q}$ *unterhalb* O liegt. Dann giebt das nach der aufgestellten Regel mit einem bestimmten Vorzeichen versehene Mass der Länge $O\mathfrak{P}$ die Lage des Punktes $\mathfrak{P}$, und ebenso giebt das nach der aufgestellten Regel mit einem bestimmten Vorzeichen versehene Mass der Länge $O\mathfrak{Q}$ die Lage des Punktes $\mathfrak{Q}$ vollständig an. Da aber aus der Lage der beiden Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die Lage des Punktes $\mathfrak{R}$ unzweifelhaft folgt, so sind jene positiv oder negativ genommenen Zahlengrössen ausreichend, um die Lage des Punktes $\mathfrak{R}$ in der Ebene zu fixiren. Hierin besteht *das Princip der analytischen Geometrie der Ebene. Das nach der gegebenen Regel positiv oder negativ genommene Mass der Länge* $O\mathfrak{P}$ *heisst die erste Ordinate des Punktes* $\mathfrak{R}$, *das nach der gegebenen Regel positiv oder negativ genommene Mass der Länge* $O\mathfrak{Q}$ *heisst die zweite Ordinate des Punktes* $\mathfrak{R}$. *Wenn der Punkt* $\mathfrak{R}$ *auf der ersten Axe liegt, so ist die zweite Ordinate gleich Null, wenn der Punkt* $\mathfrak{R}$ *auf der zweiten Axe liegt, so ist die erste Ordinate gleich Null. Wenn der Punkt* $\mathfrak{R}$ *in den Punkt* O *fällt, so sind beide Ordinaten gleich Null. Jeder Lage des Punktes* $\mathfrak{R}$ *in der Ebene entspricht eine bestimmte erste und eine bestimmte zweite Ordinate. Zu jedem Paar von positiven oder negativen Zahlengrössen, von denen die erste den Werth der ersten Ordinate und die zweite den Werth der zweiten Ordinate ausdrückt, gehört ein bestimmter Punkt der Ebene.*

Bei der entwickelten Ortsbestimmung des Punktes $\mathfrak{R}$ ist offenbar das auf die erste Axe gefällte Loth $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ gleich der Strecke $O\mathfrak{Q}$, und das auf die zweite Axe gefällte Loth $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ gleich der Strecke $O\mathfrak{P}$. Es kann deshalb zu der Definition der

beiden Ordinaten die Messung der beiden Lothe, oder auch die Messung einer Strecke und eines Lothes benutzt werden. Wenn das letztere geschieht, so pflegt man das nach der aufgestellten Zeichenregel positiv oder negativ genommene Mass der auf einer Axe liegenden Strecke *die Abscisse des Punktes* $\mathfrak{R}$, das nach der Zeichenregel positiv oder negativ genommene Mass des auf dieselbe Axe gefällten Lothes *die Ordinate des Punktes* $\mathfrak{R}$ *zu nennen.* Bezeichnet man *die erste Ordinate irgend eines Punktes* mit x, *die zweite Ordinate desselben Punktes* mit y, so nimmt für *einen bestimmten Punkt* der Ebene die *Variable* x *einen positiven oder negativen bestimmten Werth* und gleichzeitig die *Variable* y *einen positiven oder negativen bestimmten Werth* an. Die Ordinaten x und y zusammengefasst heissen auch *die beiden rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Ebene*, der Punkt O, in welchem sich *die rechtwinkligen Axen der* x *und* y schneiden, wird *der Anfangspunkt der Coordinaten* genannt.

Wenn von dem Anfangspunkte der Coordinaten O nach einem beliebigen Punkte $\mathfrak{R}$ der Ebene, der die Coordinaten x und y haben soll, eine gerade Linie gezogen wird, so findet sich das Mass für die Länge dieser Linie durch den *Pythagoräischen Lehrsatz.* Die Linie O$\mathfrak{R}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten nach der vorhin gebrauchten Bezeichnung die auf der Axe der x liegende Strecke O$\mathfrak{P}$ und das auf diese Axe gefällte Perpendikel $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ sind. Da nun die Länge der Strecke O$\mathfrak{P}$ den absoluten Werth der Ordinate x, und die Länge des Lothes $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ den absoluten Werth der Ordinate y bestimmt, da ferner das Quadrat einer positiven oder negativen Zahlengrösse gleich dem Quadrate ihres absoluten Werthes ist, so wird unter allen Umständen das Quadrat des Masses von O$\mathfrak{P}$ durch x^2 und das Quadrat des Masses von $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ durch y^2 ausgedrückt. Daher gilt für den absoluten Werth r *der Länge der Linie* O$\mathfrak{R}$ allgemein die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Die Betrachtung desselben rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{P}$O$\mathfrak{R}$ dient zu der Bestimmung *des Winkels* Θ, *welchen die von* O *nach dem Punkte* $\mathfrak{R}$ *gezogene gerade Linie mit dem Theil der* x*-Axe bildet, dem die positiven Werthe von* x *zugehören*, und der bei der von uns gewählten Vorstellung nach der linken Seite

gerichtet ist. Stellt man sich vor, dass der Punkt $\mathfrak{R}$ zuerst auf dem positiven Theile der x-Axe angenommen sei, und dass hierauf die Linie O$\mathfrak{R}$ ohne Veränderung ihrer Länge um den Punkt O in dem Sinne gedreht werde, der auf dem kürzesten Wege von dem positiven Theile der x-Axe zu dem positiven Theile der y-Axe, das heisst in unserer Anschauung von der linken zu der rechten Hand geht, so durchläuft $\mathfrak{R}$ alle Punkte eines um den Anfangspunkt O als Centrum beschriebenen Kreises, und zugleich durchläuft der in Rede stehende Winkel Θ, von dem Werthe Null anfangend und fortwährend wachsend, nach einander die vier Quadranten, bis nach Vollendung derselben der Punkt $\mathfrak{R}$ an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt. Wenn man auf der Linie O$\mathfrak{R}$ auf derselben Seite von O, auf der sich der Punkt $\mathfrak{R}$ befindet, und in der Entfernung der Längeneinheit von O einen Punkt R annimmt, von diesem Punkte aus auf die x-Axe ein Loth fällt, und den Fusspunkt desselben P nennt, so sind die Dreiecke POR und $\mathfrak{P}$O$\mathfrak{R}$ wegen der Gleichheit der Winkel einander ähnlich.

Die Katheten OP und RP des Dreiecks POR bestimmen vermöge der Erörterungen des vorigen § den Cosinus und den Sinus des gegenwärtig mit Θ bezeichneten Winkels in der Weise, dass die gemessenen Längen dieser Linien zufolge der dort angegebenen Regel das positive oder negative Vorzeichen erhalten. Diese Regel stimmt genau mit der Regel überein, von welcher die Vorzeichen der Ordinaten x und y abhängen. Daher folgen aus der Proportionalität der Seiten in den ähnlichen Dreiecken POR und $\mathfrak{P}$O$\mathfrak{R}$ für den Cosinus und den Sinus des Winkels Θ die Ausdrücke

$$\cos\Theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\Theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2}$$

Die so eben erklärten Elementarbegriffe der analytischen Geometrie reichen aus, um *die geometrische Darstellung der complexen Grössen* mitzutheilen, welche *Gauss* in der 1832 erschienenen zweiten Abhandlung: *theoria residuorum biquadraticorum* in die Analysis eingeführt hat. Diese Darstellung fliesst aus der Bemerkung, dass es freisteht, bei einer beliebig gegebenen complexen Grösse $x + yi$ die positive oder negative reelle Grösse x als die erste Ordinate, und die positive oder negative reelle

Grösse y als die zweite Ordinate eines Punktes einer unbegrenzten Ebene in einem bestimmten System rechtwinkliger Coordinaten zu betrachten. Alsdann gehört zu jeder complexen Grösse ein bestimmter Punkt der Ebene, und in gleicher Weise gehört zu jedem Punkte der Ebene eine bestimmte complexe Grösse. Man darf jetzt sagen, dass eine complexe Grösse $x+yi$ durch denjenigen Punkt der Ebene repräsentirt werde, dessen erste Ordinate gleich x und dessen zweite Ordinate gleich y ist, und darf ferner diesen Punkt den Punkt $x+yi$ nennen. Der Anfänger erhält von der Darstellung der complexen leicht den Eindruck, als ob hier Begriffe in eine Beziehung zu einander gesetzt werden, die nichts mit einander zu schaffen haben. Doch verschwindet dieser Eindruck, sobald man mit der Darstellung vertrauter wird und Anwendungen derselben kennen lernt.

Bei der *Gauss*'schen Darstellung der complexen Grössen wird *die Null* durch den *Anfangspunkt der Coordinaten* repräsentirt, *die vier Einheiten*

$$+1, i, -1, -i$$

haben zu Vertretern *diejenigen vier Punkte, welche in der Entfernung der Längeneinheit vom Anfangspunkte der Coordinaten beziehungsweise auf der positiven Seite der ersten Axe, der positiven Seite der zweiten Axe, der negativen Seite der ersten Axe und der negativen Seite der zweiten Axe liegen.* Die reellen Werthe werden durch die Punkte der ersten Axe, die rein imaginären Werthe durch die Punkte der zweiten Axe dargestellt. Deshalb wird die erste Axe *die Axe der reellen Werthe*, die zweite Axe *die Axe der imaginären Werthe* genannt.

Zwei *einander conjugirte complexe Grössen* $x+yi$ und $x-yi$ bedeuten Punkte, deren Verbindungslinie auf der Axe der reellen Werthe senkrecht steht, und durch dieselbe halbirt wird. Denkt man sich die Axe der reellen Werthe als einen Spiegel, so wird der eine Punkt das *Spiegelbild* des andern. Zwei complexe Grössen $x+yi$ und $-x-yi$ bezeichnen zwei Punkte, die auf derselben durch den Punkt 0 gehenden geraden Linie, aber auf entgegengesetzten Seiten von diesem Punkte und in gleichen Abständen von demselben liegen.

Wenn von dem Punkte 0 nach dem Punkte $x+yi$ eine gerade Linie gezogen wird, so hat der absolute Werth r der

Länge dieser Linie nach der Gleichung (1) den Ausdruck

(3) $$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

derselbe ist also gleich dem *analytischen Modul der complexen Grösse* $x + yi$. Der analytische Modul wird auch *der absolute Betrag der complexen Grösse* $x + yi$ genannt, oder noch kürzer *der Betrag der complexen Grösse* $x + yi$. Die Gestalt der complexen Grösse $x + yi$, welche der Gleichung (7) des § 30 entspricht, erhält ebenfalls eine anschauliche Bedeutung. Denn vermöge der Gleichungen (3) kommt

(4) $$x + yi = r\,(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

und der Winkel Θ ist derjenige innerhalb eines vollen Kreises genau bestimmte Winkel, welchen die von dem Punkte 0 nach dem Punkte $x + yi$ gezogene gerade Linie mit der positiven Halbaxe der reellen Werthe bildet.

Zwei beliebige complexe Grössen $a + bi$ und $c + di$ können durch die vier Grundoperationen der Rechnung mit einander verbunden werden, und es gewährt ein besonderes Interesse, die geometrische Interpretation dieser Operationen aufzusuchen. Hiebei genügt es, die Addition und die Multiplication zu betrachten, da die Subtraction und die Division sich durch Umkehrung des zugeordneten Verfahrens ergeben. Wenn $a + bi$ und $c + di$ zu einander addirt werden, so dass

(5) $$x + yi = a + bi + c + di$$

ist, so kann man die erste Ordinate des Punktes $x + yi$ hervorbringen, indem man die erste Ordinate des Punktes $a + bi$ um die erste Ordinate des Punktes $c + di$ wachsen lässt und die zweite Ordinate des Punktes $x + yi$ hervorbringen, indem man die zweite Ordinate des Punktes $a + bi$ um die zweite Ordinate des Punktes $c + di$ wachsen lässt. Das Wachsen einer Ordinate ist hier so zu verstehen, dass, wenn zu derselben eine positive Grösse hinzukommt, der Endpunkt der Ordinate um die betreffende Strecke nach der positiven Seite der in Rede stehenden Axe hin fortrückt, dass dagegen, wenn zu der Ordinate eine negative Grösse hinzukommt, der Endpunkt der Ordinate um die betreffende Strecke nach der negativen Seite derselben Axe hin fortrückt. Hieraus ergiebt sich für die Lage des Punktes $x + yi$ die folgende Construction. Man ziehe von dem Punkte 0 eine gerade Linie nach dem Punkte $a + bi$ und eine gerade

Linie nach dem Punkte $c + di$, dann ziehe man von dem Punkte $a + bi$ eine gerade Linie so, dass dieselbe mit der von dem Punkte o nach dem Punkte $c + di$ gezogenen Linie gleich gerichtet, parallel und gleich lang ist, so ist der zweite Endpunkt dieser Linie der durch (5) bestimmte Punkt $x + yi$.

Damit das Product der complexen Grössen $a + bi$ und $c + di$ einen Punkt repräsentiren könne, ist dasselbe durch die Einheit dividirt zu denken, und in diesem Sinne sei

$$x + yi = (a + bi)(c + di). \tag{6}$$

Wir bilden nun für die complexen Grössen $a + bi$ und $c + di$ die Gleichungen (7) und (8) des § 30

$$a + bi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$c + di = \sigma(\cos\chi + i\sin\chi),$$

deren geometrische Bedeutung bei der Einführung des Winkels Θ besprochen ist, und erhalten durch Ausführung der Multiplication, wie an der citirten Stelle, die Gleichung

$$x + yi = \varrho\sigma(\cos(\varphi + \chi) + i\sin(\varphi + \chi)).$$

Wird ausserdem für diese Grösse $x + yi$ die obige Gleichung (4) aufgestellt, so folgt durch einen mehrfach gebrauchten Schluss, dass

$$r = \varrho\sigma, \cos\Theta = \cos(\varphi + \chi), \sin\Theta = \sin(\varphi + \chi)$$

ist.

Diese Gleichungen drücken aus, dass, wenn der Punkt o nach einander mit den Punkten 1, $a + bi$, $c + di$, und dem durch die Gleichung (6) bestimmten Punkte $x + yi$ verbunden wird, die entsprechenden vier Linien respective die Längen

$$1,\ \varrho,\ \sigma,\ \frac{\varrho\sigma}{1}$$

haben, dass ferner der Winkel zwischen der ersten und vierten Linie erhalten wird, indem man zu dem zwischen der ersten und zweiten Linie befindlichen Winkel den zwischen der ersten und dritten Linie befindlichen Winkel hinzuaddirt. Da der Punkt 1 auf der positiven Seite der Axe der reellen Werthe in der Entfernung 1 vom Coordinatenanfangspunkte liegt, so fällt die Richtung der in Rede stehenden ersten Linie mit der Richtung der positiven Halbaxe der reellen Werthe zusammen, und die auftretenden Winkel werden nach dem, was vorhin in Betreff des Winkels Θ gesagt worden ist und ebenso für die Winkel

φ und χ gilt, auf eine Drehung bezogen, die von der positiven Halbaxe der reellen Werthe auf dem kürzesten Wege nach der positiven Halbaxe der imaginären Werthe führt. Sobald von dem Punkte 1 eine gerade Linie nach dem Punkte $a + bi$ und eine zweite gerade Linie nach dem Punkte $c + di$ gezogen wird, und ferner von dem Punkte $a + bi$ eine gerade Linie nach dem durch (6) definirten Punkte $x + yi$, sobald ausserdem ein Dreieck durch die successive Nennung der Oerter seiner drei Eckpunkte bezeichnet wird, so sind *die beiden Dreiecke*

$$1,\ 0,\ c + di$$

und

$$a + bi,\ 0,\ x + yi$$

einander ähnlich wegen der Gleichheit der an dem Punkte 0 liegenden Winkel und wegen der Proportionalität der einschliessenden Seiten 1 und σ im ersten, ϱ und $\frac{\varrho\sigma}{1}$ im zweiten Dreieck. Wird das erste Dreieck um den Punkt 0 so herumgedreht, dass die Seite 1 desselben in die Richtung von der Seite 0 des zweiten Dreiecks fällt, so fällt die Seite 0 des ersten Dreiecks in die Richtung der Seite $\frac{\varrho\sigma}{1}$ des zweiten Dreiecks. Demnach ist an der Verbindungslinie der Punkte 0 und $a + bi$ ein Dreieck anzulegen, das dem Dreiecke $1,\ 0,\ c + di$ ähnlich ist und eine Lage hat, die aus der Lage dieses Dreiecks durch eine um den Punkt 0 ausgeführte Drehung hervorgeht; hierbei ist für das neue ähnliche Dreieck der Punkt 0 festzuhalten und das Dreieck $1,\ 0,\ c + di$ nach einem solchen Massstabe *zu vergrösseren* oder *zu verkleineren*, dass aus der Längeneinheit die Verbindungslinie der Punkte 0 und $a + bi$ wird. Die Ecke des construirten ähnlichen Dreiecks, welche der Verbindungslinie des Punktes 0 mit dem Punkte $a + bi$ gegenüberliegt, ist dann der durch die Gleichung (6) bestimmte Punkt $x + yi$.

Auf gleiche Weise entsteht das Bild derjenigen Punkte, die durch die auf einander folgenden positiven ganzen Potenzen derselben complexen Grösse $a + bi$ bezeichnet werden. Zieht man gerade Linien von dem Punkte 0 nach den Punkten $1,\ a + bi),\ (a + bi)^2,\ (a + bi)^3, \ldots$ und verbindet durch gerade Linien den Punkt 1 mit dem Punkte $a + bi$, diesen mit dem

Punkte $(a + bi)^2$ und überhaupt jeden Punkt mit dem nächstfolgenden, so sind die Dreiecke

$$1,\ 0,\ a + bi$$
$$a + bi,\ 0,\ (a + bi)^2$$
$$(a + bi)^2,\ 0,\ (a + bi)^3$$
$$\cdots\cdots$$

alle unter einander ähnlich, und jedes schliesst sich an das nächstfolgende so an, dass sie eine gemeinschaftliche Seite haben. Man kann sich vorstellen, dass die Verbindungslinien des Punktes 0 mit den Punkten $1, a + bi, (a + bi)^2, ..$ erhalten werden, indem man die positive Halbaxe der reellen Werthe beständig in demselben oben definirten Sinne und um denselben Winkel dreht. Die Abstände des Punktes 0 von den genannten Punkten bilden, wenn der absolute Betrag der complexen Grösse $a + bi$ wieder mit ϱ bezeichnet wird, die Reihe $1, \varrho, \varrho^2, ..$; sie nehmen also fortwährend zu, wenn ϱ die Einheit übertrifft, sie nehmen fortwährend ab, wenn ϱ unter der Einheit liegt, und sie bleiben ungeändert, wenn ϱ gleich der Einheit ist. In dem letzten Falle liegen mithin die sämmtlichen Punkte auf demjenigen Kreise, der mit der Einheit als Radius um den Punkt 0 beschrieben ist.

Man kann jetzt zu den n Wurzeln der reinen Gleichungen des $n$ten Grades übergehen. Die n Wurzeln der Gleichung

$$\omega^n = 1,$$

oder die $n$ten Wurzeln der Einheit repräsentiren nach dem so eben Gesagten diejenigen n Punkte auf der Peripherie des um den Punkt 0 mit der Längeneinheit beschriebenen Kreises, welche, mit dem auf der Axe der reellen Werthe liegenden Punkte 1 beginnend, den Kreis in n gleiche Theile theilen.

Die Verbindung von je zwei auf einander folgenden Theilungspunkten durch gerade Linien bringt das in den Kreis eingeschriebene reguläre n-Eck hervor, und die Beziehung der $n$ten Wurzel der Einheit zu der Aufgabe, den Kreis in n gleiche Theile zu theilen, tritt unmittelbar in Evidenz.

Die Auflösung der allgemeinen reinen Gleichung des $n$ten Grades

$$\omega^n = A + Bi$$

entspricht der geometrischen Aufgabe, zwischen die beiden ge-

raden Linien, welche den Punkt 0 mit dem Punkte 1 und den Punkt 0 mit dem Punkte $A + Bi$ verbinden, dergestalt n einander ähnliche Dreicke einzuschalten, dass alle Dreiecke den Punkt 0 zum Eckpunkt und dass immer je zwei auf einander folgende Dreiecke eine gemeinschaftliche Seite haben, dass die erste Seite des ersten Dreiecks mit der Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 und die zweite Seite des letzten Dreiecks mit der Verbindungslinie der Punkte 0 und $A + Bi$ zusammenfällt, und dass die Lagen der n Dreiecke durch Drehung des ersten dieser Dreiecke um den Punkt 0 hervorgebracht werden können. Der Eckpunkt des ersten dieser Dreiecke, welcher der die Punkte 0 und 1 verbindenden Seite gegenüber liegt, determinirt dann eine Wurzel ω der in Rede stehenden Gleichung.

In der Gleichung (2) des § 33

$$A + Bi = P\,(\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

drückt der absolute Betrag P der complexen Grösse $A + Bi$ die Entfernung des Punktes 0 von dem Punkte $A + Bi$, und Φ den Winkel aus, den diese Linie mit der positiven Axe der reellen Werthe macht. Durch die an dem Punkte 0 liegenden einander gleichen Winkel der erwähnten n Dreiecke wird der Winkel Φ in n gleiche Theile getheilt, und die von dem Punkte 0 ausgehenden Seiten der Dreicke repräsentiren durch ihre Längen die n zwischen der Einheit und dem absoluten Betrage P der Grösse $A + Bi$ eingeschalteten mittleren Proportionalen. Das Vorhandensein der *n von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung* $\omega^n = A + Bi$ correspondirt mit dem Umstande, dass die aufgestellte geometrische Aufgabe *auf n von einander verschiedene Arten* aufgelöst werden kann. Denken wir uns in Uebereinstimmung mit den bisherigen Anschauungen den Winkel Φ als einen solchen, der einen vollen Kreis nicht übertrifft, so lässt sich die betreffende geometrische Aufgabe zunächst so lösen, dass jeder der an dem Punkte 0 liegenden Winkel der erwähnten n ähnlichen Dreiecke der $n$te Theil dieses Winkels Φ ist. Die n Dreieke liegen dann in der Weise neben einander, dass, wenn eine fortwährend in demselben oben näher bezeichneten Sinne gedrehte Linie die an dem Punkte 0 liegenden Winkel der sämmtlichen Dreiecke der Reihe nach durchläuft, diese Linie um den Punkt 0 *Ein Mal* herumgeht. Die geometrische Auf-

gabe gestattet aber insofern andere Auflösungen, als zu dem definirten Winkel Φ ein voller Kreis und allgemein ein ganzes Vielfache eines vollen Kreises hinzugefügt werden darf. Dieses Vielfache möge wieder wie in § 33 als das $s$fache bezeichnet werden; alsdann liegen die zugehörigen n ähnlichen Dreiecke in der Art neben einander, dass, wenn eine fortwährend in demselben oben näher bezeichneten Sinne gedrehte Linie die an dem Punkte 0 liegenden Winkel der sämmtlichen Dreiecke der Reihe nach durchläuft, dieselbe um den Punkt 0 *eine Zahl von Umgängen* machen muss, die durch $s+1$ ausgedrückt wird. Die sämmtlichen n Auflösungen der geometrischen Aufgabe entstehen, indem der Zahl s nach der Reihe die n Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ beigelegt werden.

Das von *Descartes* angegebene in § 41 entwickelte Merkmal für diejenigen geometrischen Aufgaben, die mit Hülfe des *Lineals* und des *Zirkels* allein construirt werden können, findet bei der *Gauss*'schen Darstellung der complexen Grössen durch die Punkte einer Ebene eine directe Anwendung, weil die zu einer complexen Grösse $x+yi$ gehörenden Coordinaten x und y die mit positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Masse der Längen gewisser Linien sind. Da die Addition, Subtraction, Multiplication und Division von zwei complexen Grössen $a+bi$ und $c+di$ nur die Ausführung derselben vier Operationen für die reellen Bestandtheile a, b, c, d voraussetzt, so muss die Construction eines Punktes $x+yi$, bei dem die complexe Grösse $x+yi$ aus den Grössen $a+bi$ und $c+di$ beziehungsweise durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division entstanden ist, wenn die Punkte $a+bi$ und $c+di$ gegeben sind, eine mit Lineal und Zirkel construirbare Aufgabe sein. Deshalb konnten vorhin derartige Constructionen jener Grundaufgaben mitgetheilt werden.

Was die reinen Gleichungen des $n$ten Grades, oder die Bestimmung der $n$ten Wurzeln aus einer complexen Grösse $A+Bi$ anlangt, so ist in § 34 die Auflösung der *reinen quadratischen Gleichung*

$$\omega^2 = A + Bi,$$

oder die *Bestimmung der Quadratwurzeln aus der complexen Grösse* $A+Bi$ auf die Ausziehung von Quadratwurzeln aus po-

sitiven reellen Grössen zurückgeführt worden. Es muss daher die Auflösung der entsprechenden geometrischen Aufgabe, wie die Auflösung jener vier Grundaufgaben mit Lineal und Zirkel construirt werden können. Man gelangt zu einer solchen Construction durch die folgende Ueberlegung.

Denkt man sich, wie früher, das Dreieck

$$1, 0, A+Bi,$$

so kommt es darauf an, den an dem Punkte 0 entstehenden Winkel desselben zu halbiren, die Halbirungslinie von dem Punkte 0 aus nach beiden Seiten durchzuziehen, und auf jeder Seite einen Punkt in derjenigen Entfernung abzuschneiden, welche gleich der Quadratwurzel aus dem absoluten Betrage P der Grösse $A+Bi$ ist. Alsdann repräsentiren die Endpunkte der beiden Strecken die beiden in Rede stehenden Quadratwurzeln aus der complexen Grösse $A+Bi$, nämlich nach (2) des § 34 die beiden complexen Grössen

$$\sqrt{P}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right), -\sqrt{P}\left(\cos\Phi+i\sin\frac{\Phi}{2}\right).$$

Wenn man auf der negativen Seite der Axe der reellen Werthe in der Entfernung P von dem Anfangspunkte einen Punkt annimmt, dem in der eingeführten Sprache die Bezeichnung $-P$ zukommt, so wird der Theil der Axe der reellen Werthe, welcher zwischen dem Punkte 1 und diesem Punkte $-P$ liegt, durch den Punkt 0 in zwei Abschnitte getheilt, deren Product gleich der Grösse P ist. Wenn man ferner die gerade Linie, welche den Punkt 0 mit dem Punkte $A+Bi$ verbindet, über den Punkt 0 hinaus rückwärts verlängert, und hier in der Entfernung 1 von dem Punkte 0 einen Punkt annimmt, dem die Benennung $\frac{-A-Bi}{P}$ zugehört, so wird auch die Strecke, welche zwischen dem Punkte $A+Bi$ und diesem Punkte liegt, durch den Punkt 0 in zwei Abschnitte getheilt, deren Product gleich der Grösse P ist. Da nun die beiden Punkte

$$\sqrt{P}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right), -\sqrt{P}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right)$$

auf derselben durch den Punkt 0 gehenden geraden Linie liegen, und zwar so, dass das Quadrat des Abstandes zwischen jedem der beiden Punkte und dem Punkte 0 ebenfalls gleich der Grösse

P ist, so liegen diese beiden Punkte, deren Construction gesucht wird, sowohl mit den beiden Punkten

$$1,\ -P$$

wie auch mit den beiden Punkten

$$A+Bi,\ \frac{-A-Bi}{P}$$

auf demselben Kreise. Man hat daher durch drei von den letztgenannten vier Punkten, etwa durch die Punkte $1,\ A+Bi,\ -P$ einen Kreis hindurchzulegen, das Centrum dieses Kreises mit dem Punkte 0 zu verbinden, und die auf dieser Verbindungslinie senkrecht stehende Sehne zu ziehen, so trifft diese Sehne den gezeichneten Kreis in den beiden Punkten, deren Construction zu bewerkstelligen war.

Wenn man je zwei aufeinander folgende von den vier Punkten

$$1,\ \sqrt{P}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right),\ A+Bi,\ -\sqrt{P}\left(\cos\frac{\Phi}{2}+i\sin\frac{\Phi}{2}\right)$$

durch gerade Linien, und den letzten dieser Punkte mit dem ersten wieder durch eine gerade Linie verbindet, so sind diese vier Sehnen des angegebenen Kreises die dem Punkte 0 gegenüber liegenden Seiten in den beiden Paaren von ähnlichen Dreiecken, welche nach der allgemeinen über die Gleichung $\omega^n = A+Bi$ angestellten Erörterung für den Fall $n=2$ zwischen den Verbindungslinien der Punkte 0 und 1 und der Punkte 0 und $A+Bi$ eingeschaltet werden sollten.

§ 43. Zusammenhang zwischen einer ganzen Function eines beliebigen Grades einer Variable und den Werthen der Variable, für welche die Function verschwindet, oder den Wurzeln der zugehörigen Gleichung.

Von der Betrachtung der binomischen Gleichungen des $n$ten Grades wenden wir uns zu den *allgemeinen rationalen ganzen Functionen des nten Grades einer Variable* x zurück, deren Bezeichnung, wie in § 23, diese sein möge

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

und zu den *correspondirenden Gleichungen des nten Grades.*

Die Frage nach denjenigen Werthen der Variable x, welche

die Function $f(x)$ zum Verschwinden bringen, wird gegenwärtig, wie es vorhin bei den binomischen Gleichungen geschehen ist, auf alle reellen oder complexen Grössen gerichtet, welche dieser Forderung genügen. Die Einführung der complexen Grössen in die Rechnung entsprang aus der Untersuchung der *rationalen ganzen Functionen des zweiten Grades einer Variable* x, und gab die Möglichkeit, die beiden in § 28 enthaltenen Sätze aufzustellen, *dass jede solche Function als ein Product von zwei Factoren des ersten Grades in Bezug auf die Variable* x *dargestellt werden kann*, und *dass die zugeordnete Gleichung stets zwei Wurzeln hat.* Zugleich zeigten die Erörterungen des § 28 den einfachen Zusammenhang, der zwischen diesen beiden Wurzeln und jenen beiden Factoren Statt findet. Es wird jetzt nachgewiesen werden, dass die Bestimmung der reellen oder complexen Werthe von x, welche die Function $f(x)$ zu Null machen, oder die Bestimmung der *Wurzeln der Gleichung*

(2) $$f(\xi) = 0,$$

zu der *Zerlegung der Function* $f(x)$ *in Factoren, die rationale ganze Functionen von* x *sind,* in einer allgemeinen Beziehung steht.

Sobald die Function $f(x)$ *für ein unbestimmtes* x, *wie hier immer verstanden wird, als ein Product von zwei rationalen ganzen Functionen von* x *dargestellt werden kann, so braucht man von jedem der beiden Factoren den Ausdruck, dass derselbe ein algebraischer Theiler der Function* $f(x)$ *sei, oder dass er in die Function* $f(x)$ *algebraisch aufgehe.*

Nach dieser Redeweise *geht die rationale ganze Function des nullten Grades*, die nach § 23 gleich einer *reinen Constante* ist, *in jede rationale ganze Function* $f(x)$ *auf*, da $f(x)$ eine rationale ganze Function von x bleibt, nachdem die sämmtlichen Coefficienten durch eine Constante dividirt sind. Bei einer Function $f(x)$ wird das Vorhandensein eines *algebraischen Theilers vom ersten Grade* durch den folgenden Satz angegeben:

(1) *Wenn* ξ_1 *eine Wurzel der Gleichung* $f(\xi) = 0$ *ist, so geht die Function* $f(x)$ *durch die Differenz* $x - \xi_1$ *algebraisch auf.*

Setzt man in die Function $f(x)$ statt der variablen Grösse x eine beliebige andere variable Grösse y, so dass nach (1)

$$f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n$$

ist, dann entsteht durch Subtraction dieser Gleichung von (1) die Gleichung

$$(3)\ f(x)-f(y)=a_0\left(x^n-y^n\right)+a_1\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right)+\ldots+a_{n-1}(x-y).$$

Nun gilt für jeden positiven ganzen Exponenten s die durch directe Rechnung zu bestätigende Gleichung

$$(4)\qquad x^s-y^s=(x-y)\left(x^{s-1}+x^{s-2}y+x^{s-3}y^2+\ldots+xy^{s-2}+y^{s-1}\right),$$

wo in der Klammer der rechten Seite die Exponenten von x stets um eine Einheit fallen, die Exponenten von y stets um eine Einheit steigen. Für diese rationale ganze Function von x und y erhält man, wofern nur nicht $x=y$ angenommen wird, da jede von Null verschiedene Grösse als Divisor angewendet werden darf, die Bezeichnung

$$(5)\qquad \frac{x^s-y^s}{x-y}=x^{s-1}+x^{s-2}y+\ldots+xy^{s-2}+y^{s-1}.$$

Mit Hülfe von (4) kann man jede der Differenzen x^n-y^n, $x^{n-1}-y^{n-1}, \ldots$ als das Product der Differenz $x-y$ in eine rationale ganze Function von x und y darstellen, und daher der Gleichung (3) die Gestalt geben

$$(6)\ f(x)-f(y)=(x-y)\left(a_0\frac{x^n-y^n}{x-y}+a_1\frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y}+\ldots+a^{n-1}\right),$$

bei der die sämmtlichen auf der rechten Seite vorkommenden Quotienten $\frac{x^n-y^n}{x-y}, \frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y}, \ldots$ die Bedeutung von rationalen ganzen Functionen der Elemente x und y haben. Die ganze Klammer ist daher gleich einer rationalen ganzen Function der Elemente x und y.

Die höchsten Potenzen von x in den rationalen ganzen Functionen, welche durch die Quotienten $\frac{x^n-y^n}{x-y}, \frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y}, \ldots$ dargestellt werden, sind beziehungsweise x^{n-1}, $x^{n-2}, \ldots$; deshalb ist in der genannten Klammer die höchste Potenz von x die $(n-1)$te; sie erscheint nur in dem ersten Summanden, und zwar mit dem Coefficienten a_0 versehen, da dieser Summand gleich

$$a_0\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$$

ist. Die Gleichung (6) sagt demnach aus, dass die Differenz $f(x)-f(y)$ für beliebige Werthe von x und y gleich dem Pro-

duct der Differenz $x-y$ in eine rationale ganze Function von x und y ist, bei welcher die höchste Potenz von x nur in dem Gliede $a_0\,x^{n-1}$ vorkommt. Wenn jetzt die Variable x *unbestimmt* bleibt, dagegen die Variable y gleich dem *bestimmten* Werthe ξ_1 gesetzt wird, der nach der Annahme des zu beweisenden Satzes (1) die Gleichung $f(\xi)=0$ befriedigt, so verwandelt sich die Differenz $f(x)-f(y)$ in die Function $f(x)$, die Differenz $x-y$ in die Differenz $x-\xi_1$, und die rationale ganze Function der Elemente x und y, welche den zweiten Factor der rechten Seite von (6) ausmacht, in eine rationale ganze Function $f_1(x)$ der Elemente x und ξ_1, bei welcher die höchste Potenz von x nur in dem Gliede $a_0\,x^{n-1}$ vorkommt. Also gilt die Gleichung

$$(7) \qquad f(x)=(x-\xi_1)\,f_1(x),$$

und die Function $f(x)$ wird für ein unbestimmtes x gleich dem Product der Differenz $x-\xi_1$ in eine rationale ganze Function von x, wie behauptet worden war. Das angewendete Verfahren bestimmt ausserdem diese Function $f_1(x)$ als eine Function des $(n-1)$ten Grades, deren höchstes Glied den Ausdruck $a_0\,x^{n-1}$ hat.

Der so eben bewiesene Satz (1) bildet den Ausgangspunkt für mehrere Reihen von Sätzen; es folgt jetzt der Satz:

(2) *Wenn ξ_1 und ξ_2 zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $f(\xi)=0$ sind, so geht $f(x)$ durch das Product der zwei Factoren $(x-\xi_1)(x-\xi_2)$ algebraisch auf, und wenn allgemein $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ lauter von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind und die Zahl ϱ kleiner oder höchstens gleich der Zahl n des Grades der Function $f(x)$ ist, so geht $f(x)$ durch das Product der ϱ Factoren $(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_\varrho)$ algebraisch auf.*

Aus der Gleichung (6) war für eine Wurzel ξ_1 der Gleichung $f(\xi)=0$ die obige Gleichung (7) abgeleitet worden. Wofern nun ξ_2 eine von ξ_1 verschiedene Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$ ist, so ergiebt die Substitution des Werthes ξ_2 für x in (7) die Gleichung

$$(8) \qquad f(\xi_2)=(\xi_2-\xi_1)f_1(\xi_2)=0.$$

Vermöge des Satzes, *dass ein Product von zwei Factoren nur dann verschwinden kann, wenn einer der beiden Factoren gleich Null ist*, muss von den beiden Factoren $\xi_2-\xi_1$ und

$f_1(\xi_2)$ einer gleich Null sein. Der Factor $\xi_2 - \xi_1$ ist nicht gleich Null, da nach der Voraussetzung ξ_2 von ξ_1 verschieden sein soll; also ist nothwendig $f_1(\xi_2) = 0$. Hiermit wird ausgedrückt, dass ξ_2 eine Wurzel der Gleichung $f_1(\xi) = 0$ ist. Weil aber $f_1(x)$ eine ganze Function des $(n-1)$ten Grades ist, die mit dem Gliede $a_0 x^{n-1}$ beginnt, so findet auf dieselbe der Satz (1) Anwendung, und es besteht die der Gleichung (7) nachgebildete Gleichung

(8) $$f_1(x) = (x - \xi_2) f_2(x),$$

in der $f_2(x)$ eine mit dem Gliede $a_0 x^{n-2}$ beginnende rationale ganze Function von x vom $(n-2)$ten Grade ist. Setzt man diesen Ausdruck von $f_1(x)$ in die Gleichung (7) ein, so entsteht die Gleichung

(9) $$f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) f_2(x).$$

Durch dieselbe wird der erste Theil des Satzes (2) bewiesen, und zwar ist der letzte Factor der rechten Seite $f_2(x)$ eine mit dem Gliede $a_0 x^{n-2}$ anfangende rationale ganze Function von x vom $(n-2)$ten Grade.

Der Beweis des allgemeinen Satzes lässt sich auf den Schluss gründen, dass, wenn aus der Gültigkeit des Satzes für $\varrho - 1$ Wurzeln seine Gültigkeit für ϱ Wurzeln folgt, derselbe für jeden gegebenen Werth der Zahl ϱ gelten muss.

Von dem auf zwei Wurzeln ξ_1 und ξ_2 bezüglichen Satze kann man zu dem für auf drei Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezüglichen Satze übergehen, und diesen Schritt so oft wiederholen, bis man zu dem gegebenen Werthe der Zahl ϱ gelangt.

Man habe für $\varrho - 1$ Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varrho-1}$ die Gleichung

(10) $$f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_{\varrho-1}) f_{\varrho-1}(x),$$

wo die Function $f_{\varrho-1}(x)$ eine rationale ganze Function von x vom $(n - \varrho + 1)$ten Grade ist und mit dem Gliede $a_0 x_{n-\varrho+1}$ beginnt. Die Gleichung (10) fällt für $\varrho = 3$ mit der Gleichung (9) zusammen. Da nun die Wurzel ξ_ϱ der Gleichung $f(\xi) = 0$ von den sämmtlichen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varrho-1}$ verschieden sein soll, so ist aus der Gleichung

(11) $$f(\xi_\varrho) = (\xi_\varrho - \xi_1)(\xi_\varrho - \xi_2)(\xi_\varrho - \xi_{\varrho-1}) f_{\varrho-1}(\xi_\varrho) = 0,$$

vermöge des bei der Gleichung (8) angegebenen Grundes zu schliessen, dass, weil die sämmtlichen Differenzen $\xi_\varrho - \xi_1$, $\xi_\varrho - \xi_2, \ldots \xi_\varrho - \xi_{\varrho-1}$ von Null verschieden sind, und weil das Product dieser Differenz in den Ausdruck $f_{\varrho-1}(\xi_\varrho)$ verschwindet dieser Ausdruck verschwinden muss. Hieraus folgt gemäss der Gleichung (7) die Gleichung

(12) $$f_{\varrho-1}(x) = (x - \xi_\varrho) f_\varrho(x),$$

in welcher $f_\varrho(x)$ eine rationale ganze Function von x vom $(n-\varrho)$ten Grade mit dem Anfangsgliede $a_0 x^{n-\varrho}$ ist, und die Substitution des Ausdrucks von $f_{\varrho-1}(x)$ in (10) erzeugt die Gleichung

(13) $$f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_\varrho) f_\varrho(x),$$

welche mit der Gleichung (10) die gleiche Gestalt hat und sich auf ϱ Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ bezieht. Demnach gilt die Gleichung (13) für einen beliebigen Werth der Zahl ϱ, und auf diese Weise ist der Satz (2) vollständig gerechtfertigt.

In dem Satze (2) ist für die Zahl ϱ die Beschränkung angegeben, dass sie kleiner oder höchstens gleich der Zahl n des Grades von $f(x)$ sein soll. Wenn $\varrho = n$ ist, so wird die in (13) erscheinende Function $f_\varrho(x)$ des $(n-\varrho)$ten Grades mit dem Anfangsgliede $a_2 x^{n-\varrho}$ zu einer Function des nullten Grades mit dem Anfangsgliede a_0 und geht daher in die Constante a_0 selbst über. Mithin entsteht in diesem Falle die Gleichung

(14) $$f(x) = a_0 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n).$$

Es ist nothwendig, hier eine allgemeine Bemerkung einzuschalten. Die in der Gleichung (1) des gegenwärtigen § gegebene Definition der rationalen ganzen Function $f(x)$ ist aus dem § 23 entnommen, und dieser § geht der Einführung der complexen Grössen in die Rechnung vorher. Es bedeuten daher in § 23 die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ reelle Grössen, und von dem Coefficienten a_0 ist ausdrücklich gesagt, dass derselbe von der Null verschieden sein soll; durch die letzte Bedingung wird bewirkt, dass $f(x)$ von keinem niedrigeren Grade als dem $n$ten Grade sein kann. Dem entsprechend bezieht sich der Satz (1) dieses § zunächst auf die Voraussetzung, dass a_0, $a_1, \ldots a_n$ reelle Grössen sind und a_0 nicht gleich Null ist.

Für die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind aber reelle und complexe Werthe zugelassen worden, bei der Zerlegung einer rationalen ganzen Function von x in Factoren dürfen die rationalen ganzen Functionen von x, welche die Factoren bilden, complexe Grössen zu Coefficienten haben, und der Satz (1) erstreckt sich gleichmässig auf die Voraussetzung, dass ξ_1 eine reelle Grösse und dass ξ_1 eine complexe Grösse sei. Es möchte dem Anfänger zu rathen sein, dass derselbe den Beweis des Satzes (1) zuerst unter der Annahme eines reellen Werthes von ξ_1 führe, und hierauf unter der Annahme eines complexen Werthes von ξ_1 wiederhole. Hierbei braucht kein Wort des Beweises geändert zu werden, weil alle erforderlichen Operationen für reelle und für complexe Grössen laut § 26 und 27 nach gleichlautenden Gesetzen ausgeführt werden.

Zwischen der Voraussetzung, dass ξ_1 eine *reelle* und dass ξ_1 eine *nicht reelle* Grösse sei, erwächst ein Unterschied nur für die Beschaffenheit der Coefficienten der Function $f_1(x)$, die in der Gleichung (7) auftritt, und deren vollständiger Ausdruck der folgende ist

$$(15) \qquad f_1(x)=a_0\left(x^{n-1}+x^{n-2}\xi_1+\ldots+x\xi_1^{n-2}+\xi_1^{n-1}\right)$$
$$+a_1\left(x^{n-2}+x^{n-3}\xi_1+\ldots+\xi_1^{n-2}\right)+\ldots+a_{n-2}(x+\xi_1)+a_{n-1}.$$

Bei einem *reellen* ξ_1 sind die Coefficienten von $f_1(x)$ vermöge der angenommenen Realität der Grössen a_0, $a_1, \ldots a_n$ selbstverständlich alle ebenfalls reell, bei einem *nicht reellen* ξ_1 darf man dies nicht voraussetzen. Wofern man nun annimmt, *dass die sämmtlichen Grössen* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\varrho$ *reell sein sollen,* so wird bei der Beweisführung des Satzes (2) das Gebiet der reellen Grössen nicht verlassen und es ist wohl zu beachten, *dass man unter dieser Annahme den Satz* (2) *mit Einschluss der Gleichung* (14) *beweisen kann, ohne dass überhaupt die complexen Grössen in die Rechnung eingeführt sind.*

Wenn aber ξ_1 eine *nicht reelle* Grösse und mithin die aus den reellen Grössen $a_0, a_1, \ldots a_n$ nach der Formel (15) gebildete Function $f_1(x)$ eine Function von x ist, bei der man nicht voraussetzen darf, dass alle ihre Coefficienten reell sind, so entsteht das Bedürfniss, sich davon zu überzeugen, dass der

Satz (1) auch für eine Function von x gültig bleibt, deren Coefficienten complexe Grössen sein dürfen.

Das angewendete Beweisverfahren des Satzes (1) bleibt auch für eine solche Function $f(x)$ in Kraft, deren Coefficienten $a_0, a_1, .. a_n$ complexe Grössen sind, und zwar aus dem schon vorhin geltend gemachten Motiv, dass die zur Anwendung kommenden Operationen für reelle und complexe Grössen nach gleichlautenden Gesetzen ausgeführt werden. Es besteht demnach die Gleichung (7) auch für eine Function $f(x)$, deren Coefficienten complexe Grössen sind.

Es lässt sich nun ferner leicht erkennen, dass der geführte Beweis des Satzes (2) und der Gleichung (14) ebenfalls bei der Voraussetzung Stich hält, dass die Coefficienten $a_0, a_1, .. a_n$ von $f(x)$ beliebige complexe Grössen sind. Das eigentliche Fundament dieses Beweises ist der Satz, dass ein Product von zwei Factoren nur dann verschwinden kann, wenn einer der beiden Factoren gleich Null ist, und der Beweis dieses Satzes für complexe Grössen findet sich in § 26. Daher gilt der Satz (2) und die Gleichung (14) in dem so eben bezeichneten Umfange.

Für eine Function $f(x)$, deren Coefficienten complexe Grössen sind, wie für eine Function, deren Coefficienten sämmtlich reell sind, bringt es die Definition mit sich, dass der Coefficient a_0 nicht verschwinden darf, wofern $f(x)$ von *keinem niedrigern als dem nten Grade* sein soll. Erwägt man aber die in dem gegenwärtigen § angestellten Erörterungen, so ist an keiner Stelle die Voraussetzung gebraucht worden, dass a_0 von Null verschieden sein müsse; die nachgewiesenen Sätze gelten daher für solche Functionen des $n$ten Grades, bei denen ein Verschwinden des Coefficienten a_0 oder eine Erniedrigung des Grades *nicht ausgeschlossen* ist. Auf die gleiche Voraussetzung bezieht sich der Satz:

(3) *Wenn eine rationale ganze Function des nten Grades von x, deren Coefficienten reelle oder complexe Grössen sind, für mehr als n von einander verschiedene reelle oder complexe Werthe der Variable x verschwindet, so sind die sämmtlichen Coefficienten der betreffenden Function gleich Null.*

Von den unter einander verschiedenen Werthen der Variable x, welche die gegebene Function $f(x)$ gleich Null machen sollen,

mögen zuerst n genommen werden, $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Dann besteht unter Anwendung der früheren Bezeichnungen die Gleichung (14) $f(x) = a_0 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n)$. Sobald nun noch eine einzige von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ verschiedene Grösse ξ_{n+1} die Eigenschaft hat, die Function $f(x)$ zum Verschwinden zu bringen, so muss

$$f(\xi_{n+1}) = a_0 (\xi_{n+1} - \xi_1)(\xi_{n+1} - \xi_2) \ldots (\xi_{n+1} - \xi_n)$$

gleich Null sein. Da in dem auf der rechten Seite befindlichen Product die Differenzen $\xi_{n+1} - \xi_1, \xi_{n+1} - \xi_2, \ldots \xi_{n+1} - \xi_n$ sämmtlich nach der Annahme von Null verschieden sind, so muss vermöge des mehrfach benutzten Satzes der Factor a_0 gleich Null sein. Daraus folgt aber mit Hülfe der Gleichung (14), dass die Function $f(x)$ für jedes beliebige x den Werth Null haben muss, und das kann nur auf die Weise geschehen, dass die sämmtlichen Coefficienten der Function $f(x)$ gleich Null sind. Wollte man nämlich annehmen, dass irgend ein Coefficient der Function $f(x)$ einen von Null verschiedenen Werth habe, so würde ein Widerspruch entstehen. Da das Verschwinden von a_0 nachgewiesen ist, so könnte nur von einigen der folgenden Coefficienten vorausgesetzt werden, dass sie nicht verschwinden. Gesetzt es wäre a_μ der Coefficient der höchsten Potenz von x, der nicht gleich Null ist, dann würde die Function $f(x)$ die Gestalt haben

$$f(x) = a_\mu x^{n-\mu} + a_{\mu-1} x^{n-\mu-1} + \ldots + a_n$$

Wenn man jetzt von den $n - \mu + 1$ von einander verschiedenen Werthen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-\mu+1}$ Gebrauch macht, welche die Function $f(x)$ zum Verschwinden bringen, so führt die Anwendung des so eben benutzten Verfahrens zu der Consequenz, dass der Coefficient a_μ gleich Null sein muss, während derselbe nach der getroffenen Supposition gerade von Null verschieden sein sollte. Diese Supposition muss also verworfen werden, und damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen, dass unter den in Rede stehenden Bedingungen die sämmtlichen Coefficienten der Function $f(x)$ nothwendig gleich Null sind.

Wofern der Inhalt des Satzes (3) auf das Gebiet der reellen Grössen beschränkt wird, so wird die mitgetheilte

Beweisführung von der Anwendung der complexen Grössen unabhängig, wie dies auch bei dem Satze (2) und der Gleichung (14) der Fall war.

§ 44. Fortsetzung.

Der Satz (3) des vorigen § erlaubt mehrere Folgerungen von grosser Bedeutung.

(1) *Wenn zwei rationale ganze Functionen der Variable x mit reellen oder complexen Coefficienten für ein unbestimmtes x einander gleich sind, so sind in diesen Functionen nothwendig die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x beziehungsweise einander gleich.*

Da nach der im § 23 aufgestellten Definition jede rationale ganze Function einer Variable x von einem *endlichen* Grade sein muss, so darf man bei der Betrachtung von zwei rationalen ganzen Functionen beide als Functionen desselben Grades annehmen, wenn man nur die Möglichkeit offen lässt, dass der Grad der einen Function durch Verschwinden von Coefficienten herabsinke. Es sei demnach die Gestalt der beiden Functionen $p(x)$ und $q(x)$ die folgende

$$(1) \qquad \begin{cases} p(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n, \\ q(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n, \end{cases}$$

wo $b_0, b_1, \ldots b_n$ und $c_0, c_1, \ldots c_n$ bestimmte reelle oder complexe Constanten bedeuten. Durch die Subtraction entsteht für die Differenz $p(x) - q(x)$ der Ausdruck

$$(2) \qquad \begin{aligned} p(x) - q(x) = (b_0 - c_0) x^n + (b_1 - c_1) x^{n-1} + \ldots \\ + (b_{n-1} - c_{n-1}) x + (b_n - c_n). \end{aligned}$$

Weil nun die Functionen $p(x)$ und $q(x)$ für ein *unbestimmtes x* einander gleich sein sollen, so können immer beliebig viele, also auch $n+1$ *von einander verschiedene reelle oder complexe Werthe* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}$ *von x* angegeben werden, für welche

$$p(x) - q(x) = 0$$

wird. Damit es möglich sei, $n+1$ solche Werthe aufzustellen, bedarf es nicht der Voraussetzung, dass für *alle* Werthe der Variable x überhaupt die Gleichung $p(x) - q(x) = 0$ bestehe;

es genügt vielmehr die Voraussetzung, dass diese Gleichung *für alle Werthe eines beschränkten Bereichs* gültig sei, etwa nur *für alle reellen Werthe von x, die zwischen zwei von einander verschiedenen festen reellen Werthen α und β liegen*; denn zwischen den reellen Werthen α und β lassen sich *beliebig viele von einander verschiedene reelle Werthe* annehmen. Hat man nun $n+1$ von einander verschiedene reelle oder complexe Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}$ welche $p(x) - q(x)$ zu Null machen, so findet auf diese Differenz, welche selbst gleich einer rationalen ganzen Function des $n$ten Grades von der Variable x ist, der Satz (3) des vorigen § directe Anwendung, und lehrt, dass die sämmtlichen Coefficienten derselben Function gleich Null sein müssen. Diese Coefficienten sind die Differenzen

$$b_0 - c_0,\; b_1 - c_1, \ldots b_n - c_n,$$

und daher bestehen die Gleichungen

(3) $$b_0 = c_0,\; b_1 = c_1, \ldots b_n = c_n,$$

welche den Inhalt des zu beweisenden Satzes darstellen.

(2) *Sobald eine rationale ganze Function $f(x)$ für ein unbestimmtes x als ein Product von zwei oder mehreren rationalen ganzen Functionen der Variable x dargestellt ist, so beträgt die Summe der Zahlen, welche den Grad der einzelnen Factoren bezeichnen, ebenso viel, als der Grad der Function $f(x)$.*

Es sei, da der Beweis in gleicher Weise für beliebig viele Factoren, wie für drei Factoren geführt werden kann,

$$f(x) = \varphi(x)\,\chi(x)\,\psi(x),$$

dabei habe $f(x)$ die in (1) des § 43 angegebene Gestalt, ferner sei

$$\varphi(x) = e_0 x^\lambda + e_1 x^{\lambda-1} + \ldots + e_\lambda,$$

$$\chi(x) = f_0 x^\mu + f_1 x^{\mu-1} + \ldots + f_\mu,$$

$$\psi(x) = g_0 x^\nu + g_1 x^{\nu-1} + \ldots + g_\nu.$$

Weil es sich hier um die wirklichen Zahlen handelt, die den Grad der vorkommenden Functionen ausdrücken, so ist anzunehmen, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen für alle Functionen, nämlich a_0, e_0, f_0, g_0 von Null verschieden sind. Bei der Multiplication der Factoren $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$ wird das die höchste Potenz von x enthaltende Glied durch die Multipli-

cation der drei Anfangsglieder erhalten, und bekommt demnach den Ausdruck $e_0 f_0 g_0 \, x^{\lambda+\mu+\nu}$.

Die Function $f(x)$ hat das Glied vom höchsten Exponenten $a_0 x^n$. Weil nun nach dem Satz (1) des gegenwärtigen § in den beiden Darstellungen von $f(x)$ die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich sein müssen, so sind in den beiden Darstellungen die wirklich vorhandenen Glieder vom höchsten Exponenten nothwendig einander gleich, und da weder a_0 noch das Product $e_0 f_0 g_0$ gleich Null sein darf, so gelten die Gleichungen

$$n = \lambda + \mu + \nu, \quad a_0 = e_0 f_0 g_0,$$

deren erste bewiesen werden sollte.

Aus dem Satze (2) ergiebt sich das Corollar, *dass eine rationale ganze Function einer Variable x keinen algebraischen Theiler haben kann, der in Bezug auf x von höherem Grade ist, als die bezügliche Function.* Man hat ferner den Satz:

(3) *Eine Gleichung des nten Grades kann niemals mehr als n von einander verschiedene Wurzeln haben.*

Die Function des $n$ten Grades, welche, gleich Null gesetzt, die Gleichung des $n$ten Grades hervorbringt, sei wieder die Function

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

in der a_0 von Null verschieden sein muss, damit der Grad sich nicht erniedrigen kann. Das Vorhandensein von $n+1$ verschiedenen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}$ der Gleichung $f(\xi) = 0$ zieht aber vermöge des Satzes (3) des vorigen § das Verschwinden der sämmtlichen Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ nach sich. Also kann die Gleichung $f(\xi) = 0$ nicht $n+1$ von einander verschiedene Wurzeln haben.

§ 45. Fortsetzung.

Wie in § 43 bemerkt worden ist, lässt sich der dortige Satz (1) auf mehr als eine Art ausdehnen. Nachdem aus dem Vorhandensein einer Wurzel ξ_1 der Gleichung $f(\xi) = 0$ die in jenem § mit (7) bezeichnete Gleichung abgeleitet ist

$$f(x) = (x - \xi_1) f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ eine mit dem höchsten Gliede $a_0 x^{n-1}$ beginnende rationale ganze Function bedeutet, möge ξ_2 eine Wurzel der Gleichung $f_1(x) = 0$ sein. Dann ist aus dem angegebenen Grunde

$$f_1(x) = (x - \xi_2) f_2(x),$$

und $f_2(x)$ eine mit dem höchsten Gliede $a_0 x^{n-2}$ beginnende rationale ganze Function. Es sei ferner ξ_3 eine Wurzel der Gleichung $f_2(x) = 0$, und dieser Process lasse sich immer weiter fortsetzen. Man erhält alsdann eine Reihe von Gleichungen, die mit bestimmten Gleichungen des § 43 den gleichen Ausdruck, jedoch insofern einen verschiedenen Inhalt haben, als dort die Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sämmtlich von einander verschieden angenommen waren, hier aber die Möglichkeit offen bleibt, dass mehrere derselben unter einander gleich sind. Unter der Voraussetzung, dass es zulässig ist, für jede neu auftretende Function eines niedrigeren Grades eine zugehörige Wurzel anzugeben, entsteht zuletzt die *folgende Darstellung der Function* $f(x)$, *die mit der Gleichung* (14) *des* § 43 *gleichlautend ist*

(1) $$f(x) = a_0 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n).$$

Durch dieselbe wird *die rationale ganze Function des nten Grades* $f(x)$ *für ein unbestimmtes* x *gleich einem Product aus* n *Factoren des ersten Grades.* Hieran schliesst sich der Satz:

Eine Zerlegung der Function $f(x)$ *in Factoren des ersten Grades hat die ausgezeichnete Eigenschaft, wenn sie überhaupt möglich ist, nur auf eine einzige Weise möglich zu sein.*

Gesetzt, man habe für die Function $f(x)$, bei der der Coefficient a_0 als von der Null verschieden vorausgesetzt wird, irgend eine andere Zerlegung in Factoren des ersten Grades

(2) $$f(x) = (\alpha_1 x + \beta_1)(\alpha_2 x + \beta_2) \ldots$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ Constanten sind, so muss nach dem Satze (2) des vorigen § die Anzahl der Factoren nothwendig gleich der Zahl n des Grades der Function $f(x)$ sein. Da ferner das Glied vom höchsten Exponenten in der Function $f(x)$, nämlich $a_0 x^n$, und das Glied vom höchsten Exponenten in dem entwickelten Product $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n x^n$ nach dem Satze (1) des vo-

rigen § nothwendig in Bezug auf ihre Coefficienten übereinstimmen, so ist

$$a_0 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

und weil a_0 nach der Annahme von Null verschieden ist, so kann auch keine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ gleich Null sein. Es ist daher gestattet, die Ausdrücke des ersten Grades $\alpha_1 x + \beta_1$, $\alpha_2 x + \beta_2, \ldots \alpha_n x + \beta_n$ beziehungsweise durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zu dividiren, und für $f(x)$ den Ausdruck zu bilden

$$(3) \qquad f(x) = a_0 \left(x + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left(x + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right).$$

Offenbar wird die Function $f(x)$ gleich Null, sobald man der Variable x einen der n Werthe

$$(4) \qquad -\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \; -\frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots -\frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

beilegt. Diese Werthe sind demnach *Wurzeln der Gleichung* $f(\xi) = 0$. *Es können nun die n Werthe* (4) *von den n vorhin angenommenen Werthen*

$$(5) \qquad \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$$

nur in der Anordnung verschieden sein, und, was damit zusammen fällt, *die Darstellung von* $f(x)$ *in* (1) *kann sich von der Darstellung von* $f(x)$ *in* (3) *nur durch die Anordnung der Factoren des ersten Grades unterscheiden.* Denn wollte man annehmen, dass der Werth $-\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ keiner der Grössen (5) gleich wäre, so würde daraus ein Widerspruch folgen. Auf der einen Seite müsste das vermöge der Darstellung (1) den Werth $f\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)$ ausdrückende Product

$$a_0 \left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \xi_1\right)\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \xi_2\right) \cdot\cdot \left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \xi_n\right)$$

gleich Null sein, weil $-\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ ist. Auf der anderen Seite könnte dieses Product nicht verschwinden, weil keiner seiner Factoren verschwinden darf. Es muss daher $-\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ nothwendig mit einer der Grössen (5) zu-

sammenfallen, und da auf die Anordnung derselben nichts ankommt, so darf vorausgesetzt werden, dass $-\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \xi_1$ sei. Damit ist für die Darstellungen von $f(x)$ in (1) und (3) die Uebereinstimmung des ersten Factors nachgewiesen. Dividirt man beide Darstellungen durch diesen Factor, so entstehen für die Function $f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\xi_1}$ die beiden Darstellungen

$$f_1(x) = a_0(x-\xi_2) \ldots (x-\xi_n),$$
$$f_1(x) = a_0\left(x+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \cdots \left(x+\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right).$$

Auf dieselben kann die gleiche Schlussweise angewendet werden, und führt zu dem Ergebniss, dass der Werth $-\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ nothwendig einem bestimmten unter den $(n-1)$ Werthen $\xi_2, \ldots \xi_n$ gleich sein muss. Dieses Verfahren ist nun so lange zu wiederholen, bis die n Werthe $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ sämmtlich erschöpft sind; da aber die Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ in derselben Anzahl vorhanden sind, so sind gleichzeitig auch die letzten erschöpft und darin liegt der Beweis des in Rede stehenden Satzes, *dass die Zerlegung einer rationalen ganzen Function des nten Grades von x in Factoren des ersten Grades, wenn sie überhaupt möglich ist, nur auf eine einzige Weise möglich ist.*

Man wird in diesem Satze, welcher für eine Function des zweiten Grades am Schlusse des § 28 aufgestellt ist, eine genaue Uebereinstimmung mit dem Satze (2) des § 7 erkennen, dass jede ganze Zahl nur auf eine einzige Weise als ein Product von Primzahlen dargestellt werden kann. Während aber im Eingange des § 7 gezeigt worden ist, dass es immer möglich ist, eine gegebene ganze Zahl als ein Product von lauter Primzahlen auszudrücken, so haben wir bis jetzt noch nicht festgestellt, ob es immer möglich sei, eine gegebene rationale ganze Function einer Veränderlichen x in Factoren des ersten Grades zu zerlegen, und werden uns mit der Entscheidung dieser Frage an einer späteren Stelle beschäftigen.

Bei der rationalen ganzen Function $f(x)$, für welche die

Zerlegung in Factoren des ersten Grades gegeben ist, kann man solche Factoren des ersten Grades, welche einander gleich sind, zu einer positiven ganzen Potenz vereinigen.

Es sei bei der Darstellung (1) der Function $f(x)$ die Bezeichnung der Wurzeln so gewählt, dass $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ die *von einander verschiedenen Werthe* unter den Werthen (5) ausdrücken, es sei gleichzeitig α_1 die Anzahl der Factoren $x-\xi_1$, α_2 die Anzahl der Factoren $x-\xi_2, \ldots$ endlich α_λ die Anzahl der Factoren $x-\xi_\lambda$, welche in $f(x)$ enthalten sind, dann ist die Summe $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\lambda$ gleich der Zahl n und es entsteht für die Function $f(x)$ die *vollkommen bestimmte Darstellung*

$$(6) \qquad f(x) = a_0(x-\xi_1)^{\alpha_1}(x-\xi_2)^{\alpha_2} \ldots (x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda}.$$

Die Zahl α_1 bezeichnet hier *die höchste Potenz von $x-\xi_1$, welche in $f(x)$ aufgeht*; denn sollte $f(x)$ auch durch $(x-\xi_1)^{\alpha_1+1}$ theilbar sein, so müsste ξ_1 einer der Grössen $\xi_2, \ldots \xi_\lambda$ gleich sein, was der Annahme widerstreitet. Das entsprechende gilt für die anderen Factoren.

Die Benennung einer Wurzel ξ der Gleichung $f(\xi)=0$ richtet sich nach dem Exponenten der höchsten Potenz des Factors $x-\xi$, welche *vermöge der vorliegenden Darstellung* in die Function $f(x)$ aufgeht. *Bei dem Exponenten Eins heisst ξ eine einfache, bei dem Exponenten* 2, 3, 4, .. *eine zweifache, dreifache, vierfache Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$.* Auf diese Weise werden die n *Wurzeln dieser Gleichung* durch die n Grössen (5) so vertreten, dass jede Wurzel in der ihr zugehörigen Anzahl von Malen erscheint.

§ 46. Symmetrische Verbindungen der gegebenen sämmtlichen Wurzeln einer Gleichung. Binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Eine der wesentlichsten Anwendungen des Satzes (1) aus § 44 besteht darin, dass man in der Gleichung (1) des vorigen § das Product der rechten Seite entwickelt, und die auf beiden Seiten auftretenden Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x einander gleich setzt. Da das erwähnte Product den von Null

verschiedenen Coefficienten a_0 als Factor enthält, so darf man auf beiden Seiten durch diesen Coefficienten dividiren, und erhält dann die Darstellung

$$(1) \qquad \frac{1}{a_0} f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n).$$

Die Wurzeln der Gleichung $f(\xi) = 0$ fallen mit den Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{a_0} f(\xi) = 0$ zusammen. Demgemäss werden die in dem Ausdrucke

$$(2) \qquad \frac{1}{a_0} f(\xi) = \xi^n + \frac{a_1}{a_0} \xi^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \xi + \frac{a_n}{a_0}$$

erscheinenden Quotienten

$$(3) \qquad \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots \frac{a_n}{a_0}$$

die Coefficienten der Gleichung $f(\xi) = 0$ genannt. Bei der Entwickelung des Products $(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n)$ wird der Factor von x^n gleich der Einheit, der Factor von x^{n-1} gleich der negativ genommenen Summe aller n Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, der Factor von x^{n-2} gleich der positiv genommenen Summe aller Producte aus je zwei verschiedenen von diesen Grössen, allgemein der Factor von x^{n-q} gleich der mit der Einheit $(-1)^q$ multiplicirten Summe aller Producte aus je q von einander verschiedenen von den betreffenden n Grössen, und der Factor von x^0 oder das von x freie Glied gleich dem mit der Einheit $(-1)^n$ multiplicirten Product $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$.

Die so eben definirten Aggregate lassen sich in der Weise bezeichnen, dass ein Summenzeichen Σ eingeführt wird, welches beziehungsweise mit einem Zeiger α, mit zwei Zeigern α, β, mit drei Zeigern α, β, γ, u. s. f. versehen ist, und wo die Zeiger die Bedeutung haben, dass α alle ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft, dass α und β alle Paare unter einander verschiedener ganzer Zahlen aus der Reihe von 1 bis n durchlaufen, u. s. f. Bei diesen Notationen bringt die in (1) auszuführende Gleichsetzung der gleich hohen Potenzen von x *das folgende System von Gleichungen* hervor

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
-\frac{a_1}{a_0} &= \Sigma_\alpha\, \xi_\alpha \\
\frac{a_2}{a_0} &= \Sigma_{\alpha,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta \\
-\frac{a_3}{a_1} &= \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \xi_\gamma \\
&\;\vdots \\
(-1)^n \frac{a_n}{a_0} &= \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n .
\end{aligned}
\right.
$$

Dasselbe geht für die allgemeine Gleichung des zweiten Grades in die beiden Gleichungen (8) des § 28 über.

Die Verbindungen, welche auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen erscheinen, sind *rationale ganze Ausdrücke* der n Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, welche ausser diesen Elementen keine anderen Elemente enthalten, und deren *Coefficienten* lauter *ganze Zahlen* nämlich sämmtlich gleich der Einheit sind. Unter diesen Verbindungen ist die *erste* gleich der *Summe*, die *letzte* gleich dem *Product* der *n Elemente.* Nach einer allgemeinen Grundeigenschaft der Grössen, welche für die positiven ganzen Zahlen im Anfange des ersten Abschnittes, für die reellen Grössen im Verlaufe desselben Abschnittes und für die complexen Grössen in § 26 dieses Abschnittes entwickelt ist, sind *die Summe und das Product von der Anordnung ihrer Bestandtheile unabhängig.* Man kann aber aus einer bestimmten Anzahl von gegebenen Elementen noch andere *rationale ganze Ausdrücke* bilden, *die sich bei einer beliebigen Vertauschung der Elemente unter einander nicht ändern.* Diese werden *symmetrische Ausdrücke* genannt, und man überzeugt sich leicht, dass die *sämmtlichen aus den Elementen* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *zusammengesetzen Verbindungen in* (4) jene Eigenschaft besitzen, und desshalb *symmetrische Verbindungen der n Elemente* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sind.

Das Bildungsgesetz der Aggregate $\Sigma_\alpha\, \xi_\alpha$, $\Sigma_{\alpha,\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta \; \ldots$ schreibt vor, die Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ auf gewisse Arten zu *combiniren.* Die *Anzahl der in jedem Aggregate enthaltenen Glieder* wird deshalb durch *combinatorische Betrachtung* gefunden. Wenn n Elemente auf n Plätze vertheilt werden sollen, und eine be-

stimmte Vertheilung als die erste angesehen wird, so heisst im eigentlichen Sinne jede Aenderung dieser Vertheilung eine *Permutation*; man pflegt aber diejenige Vertheilung, bei der jedes Element seinen ursprünglichen Platz behält, als eine Permutation mit zu zählen, und dann fällt die Frage nach der Zahl der sämmtlichen Permutationen mit der Zahl der sämmtlichen verschiedenen Anordnungen der n Elemente zusammen. Da jedes einzelne Element auf jeden der n Plätze gebracht werden darf, so bleiben, wenn man mit einem bestimmten Element beginnt, und dieses als das erste auffasst, für das nächste oder zweite Element noch $n-1$ Plätze verfügbar, für das folgende oder dritte Element $n-2$ Plätze, und so fort, bis das letzte Element nur noch einen Platz frei findet. *Die Zahl der sämmtlichen Permutationen ist daher gleich dem Product* $n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$. Dieses Product der natürlichen Zahlen von 1 bis n wird *n-Facultät* genannt, und durch das Zeichen

$$n!$$

angedeutet. Die *Combination* der gegebenen Elemente kann damit begonnen werden, dass man das Element selbst als eine Verbindung auffasst. Jedes der n Elemente, einzeln genommen, heisst eine *Union*, und die Anzahl der Unionen ist selbstverständlich gleich der Zahl n. Wenn ein Element *mit einem andern combinirt* wird, so heisst die Verbindung eine *Ambe*, eine Verbindung von *je drei verschiedenen* heisst eine *Terne*, u. s. f.

Bei den vorzunehmenden Verbindungen wird jetzt vorausgesetzt, dass dieselben von der Reihenfolge der Combination der Elemente unabhängig sind. Um die sämmtlichen Amben zu bekommen, ist jedes der n Elemente mit einem der $(n-1)$ übrigen zu verbinden; dadurch entstehen $n(n-1)$ Verbindungen. Weil aber jede Verbindung durch Vertauschung ihrer Elemente ungeändert bleiben soll, und weil jede Verbindung von 2 Elementen 1.2 Permutationen erlaubt, so beträgt die *Zahl der gesuchten Amben* $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Allgemein wird jede Verbindung von q Elementen erhalten, indem man respective das erste Element n mal, dass zweite Element $(n-1)$ mal, und in derselben Weise fortfahrend das $q$te Element $(n-q+1)$ mal abwechselt.

Dies giebt $n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$ Verbindungen; jede von diesen Verbindungen lässt aber $1.2.3\ldots q$ Permutationen zu, und diese Permutationen sollen auf die betreffende Verbindung keinen Einfluss ausüben, also ist die *Zahl der gesuchten Verbindungen von q Elementen* gleich

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}.$$

Man kann dieser Zahl auch den Ausdruck geben

$$\frac{1.2.3\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots(n-q)}=\frac{n!}{q!(n-q)!},$$

und derselbe lehrt, dass die Anzahl der Verbindungen von q Elementen, und die Anzahl der Verbindungen von $(n-q)$ Elementen einander gleich sind. Aus diesen Erörterungen ergiebt sich für die Frage nach der Anzahl der Glieder, die in den Aggregaten $\Sigma_\alpha \xi_\alpha, \Sigma_{\alpha,\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \ldots$ enthalten sind, die folgende Antwort:

Die Summe der Elemente $\Sigma_\alpha\xi_\alpha$ enthält n Glieder, die Summe der Producte aus je zwei verschiedenen Elementen $\Sigma_{\alpha,\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$ enthält $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Glieder, und allgemein die Summe der Producte aus je q verschiedenen $\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_q}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_q}$ enthält $\frac{n!}{q!(n-q)!}$ Glieder.

Mit Hülfe des Systems von Gleichungen (4) wird es möglich, *diejenige Function des nten Grades einer Variable x zu bestimmen, welche ein gegebenes System von n Werthen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ zu ihren n Wurzeln hat, sobald die n symmetrischen Functionen der Wurzeln $\Sigma_\alpha\xi_\alpha$, $\Sigma_{\alpha,\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \ldots \xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ gegeben sind. Durch die n symmetrischen Functionen $\Sigma_\alpha\xi_\alpha, \Sigma_{\alpha,\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \ldots \xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ werden die Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots \frac{a_n}{a_0}$ mit abwechselnden Vorzeichen unmittelbar ausgedrückt, und man erhält die Darstellung der Function*

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{a_0}.$$

Wenn man voraussetzt, dass die sämmtlichen Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ einem einzigen Werthe gleich sein sollen und

diesen mit $-h$ bezeichnet, so verwandelt sich das Product $(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)$ in die *nte Potenz* des zweigliedrigen Ausdruckes oder *Binomiums* $x+h$. Gleichzeitig verwandelt sich jedes Glied der Summe $\Sigma_\alpha \xi_\alpha$ in die Grösse $-h$, jedes Glied der Summe $\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_q} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha q}$ in die Grösse $(-1)^q h^q$. Die betreffenden Summen werden daher gleich Producten aus der Anzahl der vorhandenen Glieder in den Werth des jedesmaligen einzelnen Gliedes, und es entsteht für die *positive ganze nte Potenz des Binomiums* $x+h$ die nach den Potenzen der Grösse x und h fortschreitende Entwickelung

(5) $$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^{n-2} h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots q} x^{n-q} h^q + \ldots + h^n;$$

diese Gleichung heisst *der binomische Lehrsatz.* Die Coefficienten der Producte aus den Potenzen von x und h, welche *Binomialcoefficienten* genannt werden, sind vermöge der mitgetheilten Ableitung *Anzahlen von gewissen Combinationen*, folglich *positive ganze Zahlen*, und zwar fällt der Coefficient des Gliedes $x^{n-q} h^q$ mit dem Coefficienten des Gliedes $x^q h^{n-q}$ zusammen.

§ 47. Reelle und complexe Factoren des ersten Grades einer Function einer Variable.

Die Betrachtungen, welche bis jetzt in Betreff der ganzen Functionen einer Variable und der zugeordneten Gleichungen angestellt sind, bezogen sich gleichmässig auf reelle und complexe Grössen. Doch war es nicht nothwendig, bei der Bezeichnung der complexen Grössen den reellen und den imaginären Theil zu trennen. Indem dies gegenwärtig geschieht, mögen die Coefficienten der Function $f(x)$ die Ausdrücke

(1) $$a_0 = C_0 + D_0 i,\ a_1 = C_1 + D_1 i \ldots a_n = C_n + D_n i,$$

und die nach einander eingeführten Wurzeln der Gleichung $f(\xi) = 0$ die Ausdrücke

(2) $$\xi_1 = \varrho_1 + \sigma_1 i,\ \xi_2 = \varrho_2 + \sigma_2 i, \ldots \xi_n = \varrho_n + \sigma_n i$$

erhalten. Substituirt man eine Wurzel, etwa ξ_1, in die Function $f(x)$, so muss bei dem resultirenden Ausdruck

(3) $(C_0 + D_0 i)(\varrho_1 + \sigma_1 i)^n + (C_1 + D_1 i)(\varrho_1 + \sigma_1 i)^{n-1} + \ldots$
$$+ C_n + D_n i = r + si$$

der reelle und der imaginäre Theil für sich gleich Null werden. Nun ist der Ausdruck (3) aus den Elementen $C_0 + D_0 i$, $C_1 + D_1 i, \ldots C_n + D_n i$ und dem Element $\varrho_1 + \sigma_1 i$ mit Hülfe von Additionen und Multiplicationen abgeleitet, und daher folgt aus einem in § 27 bewiesenen Satze, dass, wenn jedes dieser Elemente durch die entsprechende ihm conjugirte Grösse ersetzt wird, das hervorgehende Resultat gleich der zu $r + si$ conjugirten Grösse $r - si$ werden muss. Weil aber in dem vorliegenden Falle $r = 0$ und $s = 0$ ist, so wird auch die Grösse $r - si$ nothwendig gleich Null.

Werden die zu den Grössen in (1) und (2) conjugirten Grössen durch Hinzufügung eines Striches characterisirt, so dass

(4) $a'_0 = C - Di, \; a'_1 = C_1 - D_1 i, \ldots a'_n = C_n - D_n i,$

(5) $\xi'_0 = \varrho_1 - \sigma_1 i, \; \xi'_2 = \varrho_2 - \sigma_2 i, \ldots \xi'_n = \varrho_n - \sigma_n i$

ist, und wird die Function

(6) $$g(x) = a'_0 x^n + a'_1 x^{n-1} + \ldots + a'_{n-1} x + a'_n$$

gebildet, so kann das gefundene Resultat den Ausdruck erhalten, dass

(3*) $$g(\xi'_1) = 0,$$

oder, *dass* ξ'_1 *eine Wurzel der Gleichung* $g(\xi') = 0$ ist. Es folgt daraus vermöge der Gleichung (7) des § 43 die Gleichung

(7) $$g(x) = (x - \xi'_1)\, g_1(x),$$

wo aufs neue vermöge des angeführten Satzes die Coefficienten der Function $g_1(x)$ zu den Coefficienten der Function $f_1(x)$ beziehungsweise conjugirt sind. Wenn daher ein Werth ξ_2 die Function $f_1(x)$ zum Verschwinden bringt, so wird aus den entwickelten Gründen die Function $g_1(x)$ durch Substitution des conjugirten Werthes ξ'_2 zu Null gemacht. Dieser Vorgang wiederholt sich mit jeder neu auftretenden Wurzel $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und es entsteht schliesslich für die Function $g(x)$ die Gleichung

(8) $$g(x) = a'_0 (x - \xi'_1)(x - \xi'_2) \ldots (x - \xi'_n),$$

welche der Gleichung (14) des § 43 und der Gleichung (1) des § 45 zugeordnet ist. Es ist hiermit nachgewiesen, *dass die n Wurzeln* $\xi'_1, \xi'_2 \ldots \xi'_n$ *der Gleichung* $g(\xi') = 0$ *den n Wurzeln*

$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *der Gleichung* $f(\xi) = 0$ *in der Weise entsprechen, dass zu je einer Wurzel der letztern je eine Wurzel der erstern conjugirt ist.*

Ein Beispiel für diesen allgemeinen Satz haben uns die binomischen Gleichungen geliefert. Um dieselben hervorzubringen, ist die Function $f(x)$ durch den Ausdruck

$$f(x) = x^n - (A + Bi)$$

zu definiren. Die Function $g(x)$, deren Coefficienten die respective conjugirten Werthe haben sollen, erhält dann die Gestalt

$$g(x) = x^n - (A - Bi).$$

Am Ende des § 39 wird nun nachgewiesen, dass je eine $n$te Wurzel der Grösse $A - Bi$ je einer $n$ten Wurzel der Grösse $A + Bi$ so zugeordnet werden kann, dass die entsprechenden Wurzeln einander conjugirt sind. Dies ist aber der Inhalt des in Rede stehenden Satzes, da die vorliegende Function $f(x)$ durch die n von einander verschiedenen $n$ten Wurzeln der Grösse $A + Bi$, und die correspondirende Function $g(x)$ durch die n von einander verschiedenen $n$ten Wurzeln der Grösse $A - Bi$ zum Verschwinden gebracht wird.

In der gegenwärtigen Erörterung macht sich für *diejenigen Functionen* $f(x)$, *bei denen die sämmtlichen Coefficienten* $a_0, a_1, \ldots a_n$ *reelle Grössen sind*, ein besonderer Umstand geltend. Ist eine Wurzel $\xi_1 = \varrho_1 + \sigma_1 i$ der zugehörigen Gleichung eine *nicht reelle Grösse*, also *der Factor* σ_1 *der Grösse* i *von der Null verschieden*, so fällt die Function, deren Coefficienten beziehungsweise mit den Coefficienten der Function $f(x)$ conjugirt sind, mit der Function $f(x)$ selbst zusammen, dagegen ist der zu ξ_1 conjugirte Werth $\xi'_1 = \varrho_1 = \sigma_1 i$ von ξ_1 nothwendig verschieden, und die obige Gleichung (3*) nimmt die Gestalt an

(9) $$f(\xi'_1) = 0.$$

Das heisst in Worten:

Wenn eine rationale ganze Function $f(x)$, *deren sämmtliche Coefficienten reelle Grössen sind, durch einen nicht reellen Werth* $\varrho_1 + \sigma_1 i$ *von* x *zum Verschwinden gebracht wird, so wird die Function* $f(x)$ *auch durch den conjugirten Werth* $\varrho_1 - \sigma_1 i$ *von* x *zum Verschwinden gebracht.*

Da also bei einer in ihren Coefficienten reellen Function $f(x)$ der nicht reelle Werth $\varrho_1 + \sigma_1 i$ und der demselben con-

jugirte Werth *zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung* $f(\xi) = 0$ darstellen, so muss nach dem ersten Theile des Satzes (2) in § 43 die Function $f(x)$ das Product der beiden Factoren des ersten Grades

(10) $$(x - \varrho_1 - \sigma_1 i)\,(x - \varrho_1 + \sigma_1 i)$$

zum algebraischen Theiler haben.

Dieses Product ist aber gleich einer Function von x vom zweiten Grade

(11) $$(x - \varrho_1)^2 + \sigma_1^2,$$

deren Coefficienten reell sind.

Die Gleichung (9) des § 43 wird demnach zu der folgenden

(12) $$f(x) = ((x - \varrho_1)^2 + \sigma_1^2)\,f_2(x),$$

wo die Function des $(n-2)$ten Grades $f_2(x)$, wie die Function $f(x)$, lauter reelle Coefficienten haben muss. Die Function des zweiten Grades (11) gehört, weil die reelle Grösse σ_1 nach der Voraussetzung nicht gleich Null ist, zu denjenigen Functionen des zweiten Grades, welche für keinen reellen Werth der Variable x zum Verschwinden gebracht werden können, und für die nach einem in § 25 bewiesenen Satze eine *Darstellung als Product von Factoren des ersten Grades auf dem Gebiete der reellen Grössen unmöglich* ist. Die Rechnung mit complexen Grössen ist gerade eingeführt worden, um mit deren Hülfe für diejenigen Functionen des zweiten Grades, welche für keinen reellen Werth der Variable x gleich Null werden, die Zerlegung in zwei Factoren des ersten Grades zu bewerkstelligen. Es darf daher mit Benutzung der gegebenen Entwickelungen der Satz ausgesprochen werden:

Wenn eine rationale ganze reelle Function $f(x)$ durch einen nicht reellen Werth $\varrho_1 + \sigma_1 i$ von x zu Null gemacht wird, so ist dieselbe durch die auf dem Gebiete der reellen Grössen unzerlegbare Function des zweiten Grades $(x - \varrho_1)^2 + \sigma_1^2$ algebraisch theilbar. Wenn umgekehrt die betreffende Function $f(x)$ einen auf dem Gebiete der reellen Grössen unzerlegbaren Factor des zweiten Grades $x^2 + b_1 x + b_2$ hat, so zerfällt dieser bei der Anwendung der complexen Grössen in das Product

$$\left(x + \frac{b_1}{2} - i\sqrt{\frac{4b_2 - b_1^2}{4}}\right)\left(x + \frac{b_1}{2} + i\sqrt{\frac{4b_2 - b_1^2}{4}}\right),$$

und die Gleichung $f(x) = 0$ wird durch die beiden complexen conjugir-

ten Wurzeln $-\frac{b_1}{2} + i\sqrt{\frac{4b_2 - b_1^2}{4}}$ *und* $-\frac{b_1}{2} - i\sqrt{\frac{4b_2 - b_1^4}{4}}$ *erfüllt.*

Es kann nicht zweifelhaft sein, dass, wenn bei einer rationalen ganzen Function $f(x)$ mit lauter reellen Coefficienten eine reelle Wurzel ξ der Gleichung $f(\xi) = 0$ gegeben ist, nach Abtrennung des zugeordneten Factors $x - \xi$ als zweiter Factor eine rationale ganze Function des $(n-1)$ten Grades mit lauter reellen Coefficienten zurück bleibt. Wenn daher für eine solche Function $f(x)$ das in § 45 auseinandergesetzte Verfahren ausgeführt werden kann, so erzeugt jede auftretende reelle Wurzel einen entsprechenden reellen Factor des ersten Grades, jede auftretende nicht reelle Wurzel wird aber immer von der zu ihr conjugirten Wurzel begleitet, und bringt deshalb einen reellen Factor des zweiten Grades hervor. Somit *wird unter der angegebenen Voraussetzung die rationale ganze Function $f(x)$ in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt, von denen die letztern auf dem Gebiete der reellen Grössen unzerlegbar sind.*

Unter den Factoren des ersten Grades können mehrere unter einander gleiche vorkommen und zu einer Potenz vereinigt werden; für die betreffenden Factoren des zweiten Grades gilt das gleiche. Weil aber die letztern auf dem Gebiete der reellen Grössen unzerlegbar sind, so bleiben sie von den genannten Factoren des ersten Grades völlig getrennt. *Die Darstellung der Function $f(x)$ in* (6) des § 45 darf von der so eben beschriebenen Darstellung nur in der Anordnung der Factoren verschieden sein und *erhält demnach vermöge der obwaltenden Bedingung, dass die Coefficienten der Function $f(x)$ sämmtlich reell sind, die Eigenschaft, dass neben jeder nicht reellen Wurzel der Gleichung $f(\xi)$ eine zu ihr conjugirte Wurzel steht, und dass für je zwei conjugirte Factoren des ersten Grades die zugeordneten Potenzexponenten einander gleich sind.*

§ 48. Aus dem Gebiete der reinen Gleichungen entnommene Beispiele für die Zerlegung einer Function einer Variable in Factoren des ersten Grades.

Die Function des $n$ten Grades

$$x^n = 1 \tag{1}$$

kann vermöge des Satzes (2) in § 43 in n Factoren des ersten Grades zerlegt werden, weil die zugeordnete Gleichung

(2) $$\omega^n - 1 = 0$$

n von einander verschiedene Wurzeln hat, nämlich *die nten Wurzeln der Einheit*, deren Ausdrücke in (2) des § 35 gegeben sind. Da die Coefficienten der genannten Function reell sind, so müssen die nicht reellen Wurzeln der Gleichung (2) einander paarweise conjugirt sein, was auch schon am Schlusse des § 35 bemerkt worden ist. Es sei die eine Wurzel

(3) $$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

so lassen sich die sämmtlichen n Wurzeln als Potenzen von ω_1 ausdrücken; der Potenzexponent t durchläuft die Reihe der ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$, und zwei Wurzeln ω^t und ω^{n-t} sind zu einander conjugirt. Demnach entsteht für die Function (1) die Zerlegung

(4) $$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_1^2)\,..\,(x-\omega_1^{n-1}).$$

Der reelle Factor $x-1$ lässt sich stets von den übrigen Factoren absondern; wenn in der Gleichung (4) des § 43 die Zahl s durch die Zahl n und die Grösse y durch die Einheit ersetzt wird, so kommt

(5) $$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \,..\, + x + 1)$$

und die so eben gebildete Function des $(n-1)$ten Grades, deren Coefficienten wieder ganze Zahlen sind, wird gleich dem Product der übrigen Factoren

(6) $$x^{n-1} + x^{n-2} + \,..\, + x + 1 = (x-\omega_1)(x-\omega_1^2)\,..\,(x-\omega_1^{n-1}).$$

Es genügen desshalb die sämmtlichen nten Wurzeln der Einheit, mit Ausnahme der positiven Einheit selbst, der Gleichung

(6*) $$\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \,..\, + \omega + 1 = 0.$$

In dem auf der rechten Seite von (6) stehenden Producte sind vermöge der in Betreff der Wurzeln der Gleichung angeführten Regel der erste und letzte Factor einander conjugirt, ebenso der zweite und der vorletzte, und so fort; bei einem ungeraden Werthe der Zahl n ordnen sich auf diese Weise alle Factoren zu Paaren, bei einem geraden Werthe der Zahl n bleibt der Factor $x-\omega_1^{\frac{n}{2}}$, welcher gleich $x+1$ und somit reell ist,

in der Mitte übrig. Die Multiplication von zwei conjugirten Factoren erzeugt den auf dem Gebiete der complexen Grössen nicht zerlegbaren Factor des zweiten Grades

(7) $$\left(x-\omega_1^{t}\right)\left(x-\omega_1^{n-t}\right)=\left(x-\cos\frac{2t\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{2t\pi}{n},$$

welcher auch die Gestalt annehmen kann

(7*) $$x^2-2x\cos\frac{2t\pi}{n}+1.$$

Die Function $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots x+1$ wird daher, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, auf die folgende Weise als ein *Product von reellen Factoren* dargestellt, das Zeichen Π möge die Bildung eines Products andeuten, bei dem t für den einzelnen Factor innerhalb der beigefügten Grenzen die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft,

(8) $$\left\{\begin{aligned}&\text{für } n \text{ ungerade, } x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1\\&\qquad=\prod_{t=1}^{t=\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2t\pi}{n}+1\right),\\&\text{für } n \text{ gerade, } x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1\\&\qquad=\prod_{t=1}^{t=\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2t\pi}{n}+1\right)(x+1).\end{aligned}\right.$$

Wenn in der Gleichung (6) die Variable x durch die *Einheit* ersetzt wird, so bildet die rechte Seite das Product aller Differenzen zwischen der Einheit und den übrigen Wurzeln der Gleichung (2) oder den übrigen $n$ten Wurzeln der Einheit. Die linke Seite wird gleich der Zahl n selbst, und es entsteht das Resultat

(9) $$n=(1-\omega_1)(1-\omega_1^2)\ldots(1-\omega_1^{n-1}).$$

Dieselbe Substitution, auf die Gleichungen (8) angewendet, führt zu Resultaten, in denen nur reelle Grössen auftreten. Der allgemeine Factor der Producte darf den Ausdruck erhalten

$$2-2\cos\frac{2t\pi}{n}=4\sin^2\frac{t\pi}{n},$$

und es leuchtet ein, dass im ersten Falle die Zahl 4 in der $\frac{n-1}{2}$ten Potenz, im zweiten Falle die Zahl 4 in der $\frac{n-2}{2}$ten Potenz vorkommt; diese Potenz ist in dem zweiten Falle noch mit der Zahl 2, die aus dem Factor $x+1$ hervorgeht, zu multipli-

ciren. Hierdurch ergiebt sich für beide Fälle der Zahlen-Coefficient 2^{n-1}, und man erhält

$$
(10) \quad \begin{cases} \text{für } n \text{ ungerade, } n = 2^{n-1} \prod\limits_{t=1}^{t=\frac{n-1}{2}} \sin^2 \dfrac{t\pi}{n}, \\[2ex] \text{für } n \text{ gerade, } n = 2^{n-1} \prod\limits_{t=1}^{t=\frac{n-2}{2}} \sin^2 \dfrac{t\pi}{n}. \end{cases}
$$

Diese Formeln sind dadurch besonders merkwürdig, dass die sämmtlichen Sinusfunctionen $\sin \dfrac{t\pi}{n}$, welche hier vorkommen, sich auf Winkel beziehen, die positiv sind und höchstens den Werth $\dfrac{n-1}{2n}\pi$ oder $\dfrac{n-2}{2n}\pi$ haben, folglich unter dem Werthe $\dfrac{\pi}{2}$ liegen. Die Sinusfunctionen sind deshalb lauter positive Grössen, und darum erzeugt die Ausziehung der positiven Quadratwurzel aus den auf beiden Seiten befindlichen positiven Grössen die Gleichung

$$
(10^*) \quad \begin{cases} \text{für } n \text{ ungerade, } \sqrt{n} = 2^{\frac{n-1}{2}} \prod\limits_{t=1}^{t=\frac{n-1}{2}} \sin \dfrac{t\pi}{n}, \\[2ex] \text{für } n \text{ gerade, } \sqrt{n} = 2^{\frac{n-1}{2}} \prod\limits_{t=1}^{t=\frac{n-2}{2}} \sin \dfrac{t\pi}{n}. \end{cases}
$$

Die Ergebnisse, welche den speciellen Werthen $n = 3$ und $n = 5$ entsprechen, nämlich

$$\sqrt{3} = 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

und

$$\sqrt{5} = 4 \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5},$$

können durch die in § 41 entwickelten Ausdrücke der betreffenden Einheitswurzeln bestätigt werden. Aus den dortigen Gleichungen (5) folgen durch Erhebung auf das Quadrat die Gleichungen

$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i,$$

$$\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\, i.$$

Die erste derselben liefert unmittelbar die in Rede stehende

Darstellung der Grösse $\sin\frac{\pi}{3}$; mit der zweiten ist die Gleichung (7) des § 41 zu verbinden

$$\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,i,$$

um die Gleichung

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

zu erhalten, deren rechte Seite den angegebenen Werth $\frac{1}{4}\sqrt{5}$ liefert.

§ 49. Transformation einer ganzen Function einer Variable durch Einführung einer neuen Variable. Entwickelung, die nach den Potenzen der neuen Variable geordnet ist. Ableitungen einer ganzen Function.

Eines der wirksamsten Hülfsmittel zum Studium der algebraischen rationalen Functionen besteht darin, dass angenommen wird, bei einer solchen Function oder bei mehreren solcher Functionen solle die Variable, von der sie abhängen, oder sollen die Variabeln, von denen sie abhängen, als bestimmte rationale Functionen von einer oder von mehreren neuen Variabeln betrachtet werden. Das Ersetzen der ursprünglichen Variabeln durch die bezeichneten Functionen der neuen Variabeln heisst eine *Substitution;* die ursprünglich gegebenen Functionen der ursprünglichen Variabeln werden dadurch in bestimmte Functionen der neuen Variabeln verwandelt, oder erfahren *eine Transformation.*

Für eine rationale ganze Function einer Variable x wird eine sehr einfache Transformation erhalten, indem man vorschreibt, die Variable x möge gleich dem Aggregat einer neuen Variable z und einer Constante k sein. Bei der Gleichung

(1) $$x=z+k$$

gehört zu jedem beliebig gegebenen Werthe der neuen Variable z ein völlig bestimmter Werth der Variable x, und da aus (1) die Gleichung

(2) $$z=x-k$$

folgt, so entspricht umgekehrt jedem beliebig gegebenen Werthe

der ursprünglichen Variable x ein völlig bestimmter Werth der neuen Variable z. Durch die Substitution (1) geht die wie früher zu notirende Function des $n$ten Grades $f(x)$ in die Function

(3) $\varphi(z) = f(z+k) = a_0 (z+k)^n + a_1 (z+k)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z+k) + a_n$

über, welche eine rationale ganze Function von z ist. Die einzelnen Potenzen des Binomiums $z+k$ können durch den in § 46 angegebenen binomischen Lehrsatz nach den Potenzen der Variable z entwickelt werden. Da nur die Potenz $(z+k)^n$ das Glied z^n enthält, so ist die rationale ganze Function $\varphi(z)$ eine Function des $n$ten Grades und liefert deshalb die nach den Potenzen der Variable z geordnete Entwickelung

(4) $$\varphi(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n .$$

Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf (3) giebt die Darstellung

$$\begin{aligned}\varphi(z) = a_0 \Big(z^n + \frac{n}{1} z^{n-1} k + \frac{n(n-1)}{1.2} z^{n-2} k^2 + \ldots + \frac{n}{1} z k^{n-1} + k^n \Big) \\ + a_1 \Big(z^{n-1} + \frac{(n-1)}{1} z^{n-2} k + \ldots + \frac{n-1}{1} z k^{n-2} + k^{n-1} \Big) \\ + a_2 \Big(z^{n-2} + \ldots + \frac{n-2}{1} z k^{n-3} + k^{n-2} \Big) \\ + \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + a_{n-1} (z+k) \\ + a_n .\end{aligned}$$

Demnach bestimmen sich die Coefficienten $c_0, c_1, \ldots c_n$ der Potenzen von z in $\varphi(z)$ folgendermassen:

(5) $$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_1 = \frac{n}{1} a_0 k + a_1 \\ c_2 = \frac{n(n-1)}{1.2} a_0 k^2 + \frac{n-1}{1} a_1 k + a_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{n-2} = \frac{n(n-1)}{1.2} a_0 k^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_1 k^{n-3} + \ldots + a_{n-2} \\ c_{n-1} = \frac{n}{1} a_0 k^{n-1} + \frac{n-1}{1} a_1 k^{n-2} + \frac{n-2}{1} a_2 k^{n-3} + \ldots + a_{n-1} \\ c_n = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n . \end{cases}$$

Die erste von diesen Gleichungen lehrt, dass der Coefficient von z^n in $\varphi(z)$ dem Coefficienten von x^n in $f(x)$ gleich ist, dass folglich, wenn die Function $f(x)$ in Bezug auf x von keinem niedrigeren Grade als dem $n$ten ist, die Function $\varphi(z)$ in Bezug auf z ebenfalls von keinem niedrigeren Grade als dem $n$ten sein kann. Die rechte Seite der letzten Gleichung entsteht offenbar aus der Function $f(x)$, indem der Variable x der Werth $x = k$ beigelegt wird. Von dieser Beobachtung ausgehend soll jetzt das Bildungsgesetz der sämmtlichen Coefficienten in der Entwickelung von $\varphi(z)$ untersucht werden.

Aus dem Coefficienten c_n lässt sich der Coefficient c_{n-1} dergestalt ableiten, dass mit jedem Summanden $a_\mu k^{n-\mu}$ von c_n auf dieselbe Weise verfahren wird. Man bildet aus der Potenz $k^{n-\mu}$ den Ausdruck $(n-\mu)\, k^{n-\mu-1}$ und fügt den Factor a_μ hinzu, so dass das Glied $(n-\mu)\, a_\mu k^{n-\mu-1}$ entsteht. Nach dieser Regel ist auch der letzte Summand von c_n, nämlich $a_n k^0$ zu behandeln und giebt dann für c_{n-1} den Betrag Null. Ich werde diejenige Function von x, welche bei der Einsetzung des Werthes $x = k$ den Coefficienten c_{n-1} hervorbringt, mit $f'(x)$ bezeichnen, diese Function die *erste Ableitung der Function* $f(x)$ nennen und ihren Ausdruck neben die Function $f(x)$ stellen, so ist

$$(6) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \\ f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1)\, a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}. \end{cases}$$

Die erste Ableitung $f'(x)$ der Function $f(x)$ ist eine rationale ganze Function von x von einem um eine Einheit niedrigeren Grade als $f(x)$. Man kann nun von dieser Function abermals nach derselben Definition die erste Ableitung nehmen, und erhält eine rationale ganze Function $f''(x)$ von x, die um zwei Einheiten niedriger ist, als $f(x)$. Durch jede Wiederholung der eingeführten Operation entsteht eine um eine Einheit niedrigere Function von x, so dass zuletzt eine Function des nullten Grades oder eine Constante erhalten wird. Man bekommt auf diese Weise die Reihe von Functionen

$$(7)\begin{cases} f''(x) = n(n-1)a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + \ldots + 2.1 a_{n-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{(n-2)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 a_0 x^2 \\ \qquad + (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 a_1 x + (n-2)(n-3)\ldots 1 a_2 \\ f^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2 a_0 x + (n-1)(n-2)\ldots 2.1 a_1 \\ f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1 a_0. \end{cases}$$

Dieselben mögen respective die *zweite, dritte,* . . $(n-2)$te, $(n-1)$te, n te *Ableitung der Function* $f(x)$ genannt werden. Diese Functionen von x zeigen zu den in (5) dargestellten Coefficienten c_{n-2}, c_{n-1}, . . c_0 die Beziehung, dass, wenn in den ersteren der Reihe nach der Werth $x = k$ eingeführt wird, nur die Division durch einen Zahlenfactor erforderlich ist, um aus denselben der Reihe nach die in Rede stehenden Coefficienten zu erhalten. Die betreffenden Zahlenfactoren bestimmten sich dadurch, dass die in (5) enthaltenen Ausdrücke der Coefficienten c_n, c_{n-1}, . . ., c_1, c_0 respective mit den Gliedern a_n, a_{n-1}, . . ., a_1, a_0 schliessen, während die Endglieder von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,. . $f^{(n)}(x)$ respective die folgende sind

$$a_n,\ 1!\,a_{n-1},\ 2!\,a_{n-2}\ \ldots\ (n-2)!\,a_2,\ (n-1)!\,a_1,\ n!\,a_0.$$

Demnach entstehen für die genannten Coefficienten die Ausdrücke

$$(8)\begin{cases} c_0 = \dfrac{f^{(n)}(k)}{n!} \\ c_1 = \dfrac{f^{(n-1)}(k)}{(n-1)!} \\ c_2 = \dfrac{f^{(n-2)}(k)}{(n-2)!} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n-2} = \dfrac{f''(k)}{2!} \\ c_{n-1} = f'(k) \\ c_n \quad = f(k). \end{cases}$$

Die Einführung derselben in (4) *giebt, wenn die Glieder in der umgekehrten Weise geordnet werden, die Darstellung*

$$(9)\quad \varphi(z) = f(z+k) = f(k) + f'(k)z + \frac{f''(k)}{2!}z^2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}z^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(k)}{n!}z^n.$$

Vermöge der mit (1) *bezeichneten Substitution* $x = z + k$ *gilt somit die Transformation*

$$(10)\qquad f(x) = \varphi(z) = f(z+k).$$

Aus der Gleichung (9) kann sogleich dadurch Nutzen gezogen werden, dass man die Voraussetzung erwägt, es sei die Grösse k eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$. Dann verschwindet auf der rechten Seite von (9) das erste Glied $f(k)$, und da die übrigen Glieder respective in die erste, zweite, . . $n$te Potenz von z multiplicirt sind, so sind sie sämmtlich durch z algebraisch theilbar, und daher ist es auch die Function $\varphi(z)$ selbst. Dieser Satz ist seinem Inhalte nach nicht neu, sondern fällt mit dem Satze (1) des § 43 zusammen. Der letztere bezieht sich auf eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$, und lehrt, wofern eine solche Wurzel jetzt k genannt wird, dass die Function $f(x)$ gleich dem Producte der Differenz $x - k$ in eine rationale ganze Function von x ist. Nun geht durch die Substitution $x = z + k$ für jeden beliebigen Werth von x die Function $f(x)$ in die Function $\varphi(z)$, die Differenz $x - k$ in die Variable z, und die rationale ganze Function von x, welche den zweiten Factor des erwähnten Products bildet, nach den gegebenen Erörterungen in eine ganze rationale Function von z des gleichen Grades über. Also wird $\varphi(z)$ gleich dem Product von z in eine rationale ganze Function von z, wie es sich so eben gezeigt hat.

Wir sind aber auch darauf aufmerksam geworden, dass, nachdem eine Wurzel k den Factor $x - k$ angezeigt hat, die von diesem Factor befreite Function $f(x)$, welche durch den Bruch $\frac{f(x)}{x-k}$ angedeutet werden darf, unter gewissen Verhältnissen nochmals durch den Werth k zu Null gemacht werden kann. In diesem Falle wird $\frac{f(x)}{(x-k)^2}$ eine ganze Function von x, und die Beurtheilung der in der gleichen Weise auf einander folgend erhaltenen Functionen von x lässt sich fortsetzen, bis man zu *der höchsten Potenz des Factors* $x - k$ gelangt, durch welche

$f(x)$ algebraisch theilbar ist. Diese Potenz, welche die αte sein möge, wird durch eine Gleichung

(11) $$f(x) = (x-k)^\alpha f_\alpha(x)$$

charakterisirt, wo $f_\alpha(x)$ eine rationale ganze Function von x und zwar nach dem Satze (2) des § 44 eine Function vom $(n-\alpha)$ten Grade ist, und die Eigenschaft haben muss, *für den Werth $x=k$ nicht zu verschwinden.* Denn wäre dies der Fall, so würde $f_\alpha(x)$ wieder durch $x-k$ algebraisch theilbar sein und mithin $f(x)$ durch die Potenz $(x-k)^{\alpha+1}$ aufgehen, so dass die Potenz $(x-k)^\alpha$ nicht die höchste Potenz von $x-k$ bezeichnete, durch die $f(x)$ algebraisch aufgeht. Wenn jetzt auf die beiden Seiten der Gleichung (11) die Substitution $x=z+k$ angewendet wird, so verwandelt sich $f_\alpha(x)$ in eine rationale ganze Function von z vom $(n-\alpha)$ten Grade, welche für den Werth $x=k$, das ist, für den Werth $z=0$, nicht verschwinden darf, und $\varphi_\alpha(z)$ heissen möge, und es kommt

(12) $$\varphi(z) = z^\alpha \varphi_\alpha(z).$$

Bei der Vergleichung dieser Darstellung der Function $\varphi(z)$ mit der allgemeinen in (9) enthaltenen Darstellung folgt aus dem Satze (1) des § 44, dass in den beiden Darstellungen die Coefficienten der gleich hohen Potenzen der Variable z einander gleich sein müssen. Unter den obwaltenden Bedingungen verschwinden daher mit dem ersten Gliede $f(k)$ zusammen die Coefficienten der sämmtlichen niedrigsten Potenzen von z bis zu dem Coefficienten von $z^{\alpha-1}$ einschliesslich; dagegen darf der Coefficient von z^α nicht verschwinden. Damit nämlich das Aggregat der in (9) noch übrig bleibenden Glieder mit dem Ausdrucke $z^\alpha \varphi_\alpha(z)$ zusammenfalle, muss der erwähnte Coefficient von z^α in (9) gleich dem von z freien Gliede in der rationalen ganzen Function $\varphi_\alpha(z)$ sein und wenn dieses Glied gleich Null wäre, so würde $\varphi_\alpha(z)$ gegen die Annahme für $z=0$ verschwinden.

Es müssen also in dem vorliegenden Falle die Gleichungen gelten

(13) $f(k) = 0,\ f'(k) = 0,\ f''(k) = 0, \ldots f^{(\alpha-1)}(k) = 0,$

und gleichzeitig darf $f^{(\alpha)}(k)$ nicht gleich Null sein.

Die Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ durch die Potenz $(x-k)^\alpha$ und durch keine höhere Potenz der Differenz $x-k$ algebraisch theilbar sei, ist in § 45 mit dem Namen bezeichnet worden, dass k eine αfache Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$ sei. Für das Eintreten dieser Erscheinung besteht, wie wir soeben gesehen haben, die nothwendige und hinreichende Bedingung darin, dass durch den betreffenden Werth k ausser der Function $f(x)$ auch die Aleitungen derselben

$$f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(\alpha-1)}(x)$$

zum Verschwinden gebracht werden, dagegen die Ableitung $f^{(\alpha)}(x)$ nicht zum Verschwinden gebracht wird.

§ 50. Besondere Transformation.

Die Ableitungen $f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ der Function $f(x)$ sind rationale ganze Functionen von x, deren Grad respective der $(n-1)$te, $(n-2)$te, .. nullte ist, und dem entsprechend enthalten die Coefficienten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}, c_n$ der Function $\varphi(z)$ die Grösse k im nullten, ersten, zweiten, .. $(n-1)$ten, $n$ten Grade. Es lässt sich deshalb die in der Substitution (1) des vorigen § auftretende *Constante k eindeutig durch die Forderung bestimmen, dass der Coefficient von z^{n-1} in der Function $\varphi(z)$*

(1) $$c_1 = n a_0 k + a_1$$

gleich Null werde. Die Grösse a_0 ist nothwendig von Null verschieden, wenn $f(x)$ in der That vom $n$ten Grade sein soll, und *die Constante k erhält den bestimmten Werth*

(2) $$k = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

Die Grösse $\frac{a_1}{a_0}$ ist gleich dem Coefficienten von x^{n-1} in der durch a_0 dividirten Function $f(x)$

(3) $$\frac{1}{a_0} f(x) = x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0},$$

diese geht durch die Substitution $x = z + k$, weil nach (5) des vorigen § die Grösse $c_0 = a_0$ ist, allgemein in die Function von z

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{c_0}\varphi(z) = z^n + \frac{c_1}{c_0} z^{n-1} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{c_0} z + \frac{c_n}{c_0}$$

über. Durch die in (2) enthaltene Bestimmung der Constante k verschwindet nun der Coefficient $\frac{c_1}{c_0}$ und erhalten die folgenden Coefficienten vermöge der Gleichungen (8) des vorigen § die Ausdrücke

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{c_2}{c_0} = \dfrac{1}{a_0} \dfrac{f^{(n-2)}\left(-\dfrac{a_1}{n a_0}\right)}{(n-2)!} = b_2 \\[2ex] \dfrac{c_3}{c_0} = \dfrac{1}{a_0} \dfrac{f^{(n-3)}\left(-\dfrac{a_1}{n a_0}\right)}{(n-3)!} = b_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{c_n}{c_0} = \dfrac{1}{a_0} f\left(-\dfrac{a_1}{n a_0}\right) \qquad = b_n. \end{cases}$$

Es entsteht somit aus (4) die Darstellung

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{c_0}\varphi(z) = z^n + b_2 z^{n-2} + b_3 z^{n-3} + \ldots + b_n,$$

und auf Grund der Gleichung (10) des vorigen § *die zugehörige für jede rationale ganze Function $f(x)$ geltende Transformation*

$$\frac{1}{a_0} f(x) = \frac{1}{c_0}\varphi(z).$$

Wenn die rationale ganze Function $f(x)$ irgendwie durch die Substitution $x = z + k$ in die rationale ganze Function $\varphi(z)$ transformirt ist, so gehört offenbar zu jedem Werthe von z, der die Function $\varphi(z)$ zum Verschwinden bringt, ein solcher Werth von x, welcher $f(x)$ zu Null macht, und umgekehrt. *Man erhält deshalb aus jeder Wurzel ζ der Gleichung $\varphi(\zeta) = 0$ eine bestimmte Wurzel ξ der Gleichung $f(\xi) = 0$ vermittelst der Gleichung*

$$\text{(7)} \qquad \xi = \zeta + k,$$

und umgekehrt aus jeder Wurzel ξ der Gleichung $f(\xi) = 0$ eine bestimmte Wurzel ζ der Gleichung $\varphi(\zeta) = 0$.

Aus diesem Grunde ist es zulässig, bei der Untersuchung der Wurzeln einer Gleichung $f(\xi) = 0$ die Function $f(x)$ in eine Function $\varphi(z)$ zu transformiren, und die Wurzeln der zugehörigen Gleichung $\varphi(\zeta) = 0$ zu studiren. Die Coefficienten

der in (3) entwickelten Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ sind *die Coefficienten der Gleichung* $f(\xi)=0$, die Coefficienten der in (4) entwickelten Function $\frac{1}{c_0}\varphi(z)$ *die Coefficienten der Gleichung* $\varphi(\zeta)=0$.

Durch die Gleichung (2) wird die Constante k gleich dem negativ genommenen $n$ten Theile des Coefficienten der $(n-1)$ten Potenz der Unbekannten in der Gleichung $f(\xi)=0$. Wir können also bei einer Erörterung der allgemeinen Gleichung des $n$ten Grades $f(\xi)=0$ von der Gleichung $\varphi(\zeta)=0$ ausgehen, bei welcher die betreffende Function durch die obige Gleichung (6) definirt ist, dass heisst, bei welcher die $(n-1)$te Potenz der Unbekannten den Coefficienten Null hat.

§ 51. Allgemeine Auflösung der Gleichung des dritten Grades mit einer Unbekannten.

Wenn man die besprochene Transformation auf die *Function des zweiten Grades* anwendet, so giebt die Gleichung (2) des vorigen § die Bestimmung

$$k = -\frac{a_1}{2a_0},$$

ferner das System (5) den Ausdruck

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0^2} = b_2.$$

Es wird daher die zu gebrauchende Substitution diese

$$x = z - \frac{a_1}{2a_0},$$

und die Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ verwandelt sich in die Function

$$z^2 + \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0^2}.$$

Diese Transformation fällt mit der Darstellung der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ *in* (4) *des* § 24 *zusammen, und erinnert zugleich daran, in welcher Weise die Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichung* $\zeta^2 + \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0^2} = 0$ *abhängt.*

Indem wir uns jetzt zu *der Auflösung der allgemeinen Gleichung des dritten und vierten Grades* wenden, setzen wir voraus, dass die allgemeine Function des dritten oder vierten Grades $f(x)$ nach den Vorschriften des vorigen § in die Function $\varphi(z)$ transformirt sei, deren Gestalt daselbst in (6) angegeben ist, und beschäftigen uns mit der zugeordneten Gleichung

$$(1) \qquad \zeta^n + b_2 \zeta^{n-2} + b_3 \zeta^{n-3} + \ldots + b_n = 0,$$

in der n nach einander gleich *Drei* und gleich *Vier* zu setzen ist.

Hier muss über den Sinn, in welchem *das Auflösen einer Gleichung* zu verstehen sei, eine Bemerkung gemacht werden. Wir sahen, dass *die Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung* in einer *Zurückführung auf die Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung* besteht. Das heisst, nachdem die bezeichnete reine quadratische Gleichung aufgelöst ist, werden die Wurzeln der vorgelegten allgemeinen quadratischen Gleichung durch die Coefficienten derselben und durch die Wurzeln jener reinen quadratischen Gleichung mit ausschliesslicher Hülfe *von rationalen Operationen*, nämlich von *Addition*, *Subtraction*, *Multiplication* und *Division* ausgedrückt. *Die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades*, welche jetzt entwickelt werden soll, wird ebenfalls in *einer Zurückführung auf reine Gleichungen bestehen.* Wir stützen uns hierbei auf die Lehre von den reinen Gleichungen, wie sie von § 29 ab vorgetragen ist, und sehen die n Wurzeln jeder reinen Gleichung des $n$ten Grades als Grössen an, die auf eine bekannte Weise dargestellt werden können.

Indem wir in (1) die Zahl $n = 3$ nehmen, erhalten wir die zu untersuchende *Gleichung des dritten Grades* oder die *cubische Gleichung*

$$(2) \qquad \zeta^3 + b_2 \zeta + b_3 = 0.$$

Es werde ζ gleich dem Aggregate von zwei Grössen gesetzt

$$(3) \qquad \zeta = p + q,$$

so giebt die Einführung dieses Ausdruckes in (2) die Gleichung

$$(4) \qquad p^3 + 3p^2 q + 3pq^2 + q^3 + b_2(p+q) + b_3 = 0.$$

Da die Summe der beiden Glieder $3p^2 q + 3pq^2$ gleich dem Producte der Verbindung $3pq$ in die Summe $p + q$ ist, so kann man die drei Glieder $3p^2 q + 3pq^2 + b_2(p+q)$ zu dem Ausdrucke

$$(5) \qquad (3pq + b_2)(p + q)$$

vereinigen, und die Gleichung (4) in der Weise erfüllen, dass vorgeschrieben wird, es solle erstens die Summe der übrig bleibenden drei Glieder für sich gleich Null sein, und es solle zweitens der Ausdruck (5) zum Verschwinden gebracht werden, indem sein erster Factor verschwindet. Auf diese Weise bekommt man für die beiden Grössen p und q, deren Aggregat die Wurzel ζ giebt, die beiden Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} p^3 + q^3 + b_3 = 0, \\ 3pq + b_2 = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten derselben folgt für die Grössen p und q, dass *die Summe ihrer dritten Potenzen* $p^3 + q^3$ gleich dem Werthe $-b_3$, und dass ihr *Product* pq gleich dem Werthe $-\frac{b_2}{3}$ sein muss. Man darf deshalb von *den dritten Potenzen* p^3 und q^3 sagen, dass *ihre Summe* gleich $-b_3$, und dass *ihr Product* gleich der dritten Potenz des Werthes $-\frac{b_2}{3}$ oder gleich $-\frac{b_2^3}{27}$ gegeben sei.

Nun ist im § 46 hervorgehoben, dass, wenn für n Grössen *die Summe, die Summe der Producte zu je zweien* und so fort, bis zu *dem Producte der n Grössen* gegeben ist, vermöge des dortigen Systems von Gleichungen (4) diejenige Function des $n$ten Grades gebildet werden kann, welche, gleich Null gesetzt, jene n Grössen zu ihren n Wurzeln hat. In dem gegenwärtigen Falle *kann demnach diejenige Function des zweiten Grades einer Variable t gebildet werden, welche gleich Null gesetzt, die Grössen p^3 und q^3 zu ihren beiden Wurzeln hat.*

Der Coefficient von t ist gleich dem negativ gesetzten Werthe der Summe, also gleich b_3, und das von t freie Glied gleich dem Werthe des Products $-\frac{b_2^3}{27}$ zu nehmen, so dass die betreffende Function von t die folgende wird

$$(7) \qquad t^2 + b_3 t - \frac{b_2^3}{27}.$$

Die beiden Grössen p^3 und q^3 sind demnach als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung bestimmt, die verlangt, dass der vorstehende Ausdruck (7) gleich Null werde. Das Charakteristische dieser Bestimmung liegt in dem Umstande,

dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung, zusammen genommen, zwei völlig determinirte Grössen sind, dass aber kein Anhalt gegeben ist, zwischen denselben einen Unterschied zu machen, und dass daher, wenn die eine Wurzel τ_1 und die andere Wurzel τ_2 genannt wird, die Voraussetzungen

(8) $$p^3 = \tau_1,\ q^3 = \tau_2$$

und die Voraussetzungen

(8*) $$p^3 = \tau_2,\ q^3 = \tau_1$$

durchaus gleichberechtigt sind. Dasselbe Sachverhältniss spricht sich aus, wenn man die reine quadratische Gleichung einführt, von deren Auflösung die Darstellung der Wurzeln τ_1 und τ_2 abhängt. Es sei ω *eine Wurzel der reinen quadratischen Gleichung*

(9) $$\omega^2 = \frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4},$$

so ist $-\omega$ die andere Wurzel derselben, und die Grössen τ_1 und τ_2 haben die Ausdrücke

(10) $$-\frac{b_3}{2} + \omega \text{ und } -\frac{b_3}{2} - \omega.$$

Sobald unter ω eine *bestimmte* von den beiden Wurzeln der reinen Gleichung (9) verstanden, und von den beiden Ausdrücken (10) der erste τ_1, der zweite τ_2 genannt wird, so sind dieselben vollständig definirt. Wenn dagegen hierauf unter ω diejenige Wurzel der reinen Gleichung (9) verstanden wird, welche von der früher ins Auge gefassten verschieden, und daher derselben entgegengesetzt gleich ist, und wenn zugleich, wie vorhin, der erste Ausdruck in (10) τ_1 und der zweite τ_2 genannt wird, so haben diese beiden Grössen im Vergleich zu der früher getroffenen Definition ihre Bedeutung unter einander vertauscht.

Wesentlich ist es, nachdem für ω ein bestimmter Werth unter den beiden zulässigen Werthen gewählt ist, diesen durch die ganze Untersuchung fest zu halten. Auf Grund dieser Voraussetzung liefern die Gleichung (8) und (8*) für p^3 und q^3 entweder die Bestimmung

(11) $$p^3 = -\frac{b_3}{2} + \omega,\ q^3 = -\frac{b_3}{2} - \omega,$$

oder die Bestimmung

(11*) $$p^3 = -\frac{b_3}{2} - \omega,\ q^3 = -\frac{b_3}{2} + \omega.$$

Die erste Gleichung (11) bildet jetzt für die Grösse p selbst eine *reine Gleichung des dritten Grades*

$$\varphi^3 = -\frac{b_3}{2} + \omega. \tag{12}$$

Nun haben nach § 39 die reinen Gleichungen des dritten Grades stets *drei Wurzeln*, welche aus einer beliebigen von diesen Wurzeln erhalten werden, indem man dieselbe mit den drei dritten Wurzeln der Einheit multiplicirt. Die drei dritten Wurzeln der Einheit sind nach § 35 die drei Grössen

$$1, \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$$

oder nach § 41 Formel (6) beziehungsweise die drei Grösssen

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

Ferner sind die beiden nicht reellen dritten Wurzeln der Einheit nach §48 Formel (6*) zugleich die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 + \varrho + 1 = 0.$$

Da die Zahl *Drei* eine Primzahl ist, so ist nach einer am Ende des § 36 gemachten Bemerkung, *jede der beiden nicht reellen dritten Wurzeln der Einheit* zugleich *eine primitive dritte Wurzel der Einheit*, das heisst, *wenn eine der beiden nicht reellen dritten Wnrzeln der Einheit mit ϱ bezeichnet wird, so sind*

$$1, \varrho, \varrho^2$$

die drei dritten Wurzeln der Einheit. Man sieht dies übrigens sofort ein, da bei der Annahme $\varrho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ die drei angeführten Werthe

$$1, \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$$

und bei der Annahme $\varrho = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ die drei Werthe

$$1, \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}, \cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}$$

erhalten werden, während

$$\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \text{ ist.}$$

Wenn demnach mit φ eine bestimmte von den drei Wurzeln der reinen Gleichung (12) und, wie schon bemerkt, mit ϱ eine bestimmte der beiden nicht reellen dritten Wurzeln der Einheit bezeichnet wird, so entsteht für die drei Wurzeln der Gleichung (12) die Darstellung

$$\varphi,\ \varphi\,\varrho,\ \varphi\,\varrho^2. \tag{13}$$

Hiermit sind dann zu gleicher Zeit die drei Werthe der Grösse p gefunden, welche aus der ersten Gleichung (11) abgeleitet werden können. Für die Grösse q, welche einer bestimmten Grösse p zugehört, hat man vermöge der zweiten Gleichung in (6) die Vorschrift

$$p\,q = -\frac{b_2}{3},$$

während zu der Determination von p^3 und q^3 nur die Gleichung

$$p^3\,q^3 = -\frac{b_2^3}{27}$$

verwendet worden war. Es ergiebt sich also zu jedem von der Null verschiedenen Werthe der Grösse p ein einziger zugeordneter Werth q durch die Gleichung

$$q = -\frac{b_2}{3}\,\frac{1}{p}, \tag{14}$$

und die drei in (13) angegebenen Werthe der Grösse p führen der Reihe nach respective zu den folgenden Werthen der Grösse q, bei denen $\varrho^{-1} = \varrho^2$, $\varrho^{-2} = \varrho$ gesetzt ist

$$-\frac{b_2}{3\varphi},\ -\frac{b_2}{3\varphi}\,\varrho^2 - \frac{b_2}{3\varphi}\,\varrho. \tag{15}$$

Diese drei Werthe repräsentiren dann zugleich die drei Wurzeln der reinen Gleichung des dritten Grades in (11), welcher die Grösse q genügen muss,

$$\psi^3 = -\frac{b_3}{2} - \omega. \tag{16}$$

Die Voraussetzung, dass kein der Grösse p beigelegter Werth gleich Null sei, ist stets erfüllt, sobald die Grösse b_2 einen von Null verschiedenen Werth hat. Es darf aber, ohne der Allgemeinheit der Betrachtung zu schaden, angenommen werden, dass b_2 nicht gleich Null sei; denn wofern b_2 gleich Null ist, wird die vorliegende Gleichung (2) zu einer reinen cubischen Gleichung und ihre Auflösung ist bekannt.

Die Verbindung eines jeden der drei Werthe von p aus (13) mit dem zugeordneten Werthe von q aus (15) bringt nunmehr vermöge der Gleichung $\zeta = p + q$ für *die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung* (2) die Ausdrücke hervor

$$(17)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \varphi \quad - \dfrac{b_2}{3\varphi} \\ \zeta_2 = \varphi\varrho - \dfrac{b_2}{3\varphi}\varrho^2 \\ \zeta_3 = \varphi\varrho^2 - \dfrac{b_2}{3\varphi}\varrho. \end{cases}$$

Es bleiben jetzt noch die Gleichungen (11*) in Rücksicht zu ziehen. Die Werthe von p, welche aus der ersten der beiden in Rede stehenden Gleichungen folgen, sind die drei Wurzeln der reinen Gleichung (16). Wenn man eine derselben mit ψ bezeichnet, so werden nach dem schon benutzten Satze alle drei Wurzeln durch Multiplication mit den drei Einheitswurzeln dargestellt und sind daher

$$(18)\qquad \psi,\ \psi\varrho^2,\ \psi\varrho.$$

Nun müssen aber diese drei Wurzeln mit den drei Ausdrücken (15) zusammenfallen, und zwar geschieht dies der Reihe nach, wofern $\psi = -\dfrac{b_2}{3\varphi}$ genommen wird. Da ausserdem für jeden Werth von p das zugehörige q durch die Gleichung $pq = -\dfrac{b_3}{2}$ gefunden wird, so leuchtet es ein, dass für die drei Werthe von p in (18) der Reihe nach die zugehörigen Werthe von q in (13) angegeben sind. Es vertauschen deshalb in dem Ausdrucke $\zeta = p + q$ der gesuchten Wurzeln die Grössen p und q ihre Rollen mit einander, und die Gleichungen (11*) erzeugen dieselben drei Werthe ζ_1, ζ_2, ζ_3, deren Ausdrücke in (17) mitgetheilt sind.

Mit Hinzuziehung der Bedingung $\varphi\psi = -\dfrac{b_2}{3}$ kann man denselben ferner die Gestalt geben

$$(19)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = \varphi \quad + \psi \\ \zeta_2 = \varphi\varrho \ + \psi\varrho^2 \\ \zeta_3 = \varphi\varrho^2 + \psi\varrho. \end{cases}$$

Diese Darstellung gilt auch in dem Falle, dass $b_2 = 0$ ist;

denn alsdann muss entweder φ^3 oder ψ^3 gleich Null sein, und wenn zum Beispiel $\psi^3 = 0$ ist, so verschwinden alle drei Werthe, die für ψ genommen werden können und es bedarf keiner Auswahl durch die Gleichung $\varphi\psi = -\frac{b_2}{3}$.

Um aus den drei Grössen ζ_1, ζ_2, ζ_3 drei Werthe von x abzuleiten, welche *die allgemeine Function des dritten Grades*

$$\frac{1}{a_0} f(x) = x^3 + \frac{a_1}{a_0} x^2 + \frac{a_2}{a_0} x + \frac{a_3}{a_0}$$

zu Null machen, ist zu berücksichtigen, dass dieselbe durch die Substitution

$$x = z - \frac{a_1}{3a_0}$$

in die Function

$$\frac{1}{c_0} \varphi(z) = z^3 + b_2 z + b_3$$

übergeht. Die Coefficienten b_2 und b_3 erhalten vermöge der Gleichungen (5) des vorigen § die Ausdrücke

$$(20) \quad \begin{cases} b_2 = -\dfrac{a_1^2}{3a_0^2} + \dfrac{a_2}{a_0} \\[2ex] b_3 = \dfrac{2a_1^3}{27a_0^3} - \dfrac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

und *die drei Wurzeln der Gleichung* $f(\xi) = 0$ werden folgendermassen dargestellt

$$(21) \quad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{a_1}{3a_0} + \varphi \quad + \psi \\[2ex] \xi_2 = -\dfrac{a_1}{3a_0} + \varphi\varrho + \psi\varrho^2 \\[2ex] \xi_3 = -\dfrac{a_1}{3a_0} + \varphi\varrho^2 + \psi\varrho. \end{cases}$$

§ 52. Fortsetzung.

Die Aussage, mit der wir den vorigen § geschlossen haben, bedarf noch einer Rechtfertigung. Durch den Satz (3) des § 44 ist festgestellt, dass *die Gleichung des dritten Grades niemals mehr als drei von einander verschiedene Wurzeln haben kann.* Man muss sich also die Sicherheit verschaffen, dass die drei gefundenen Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 nicht blos der Form nach,

sondern in der That unter einander verschieden sind, wenn aus dem erwähnten Satze geschlossen werden soll, dass die Gleichung des dritten Grades durch diese drei Werthe und *nur* durch diese drei Werthe befriedigt wird.

Um zu untersuchen, ob zwei der Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 zusammenfallen oder nicht, bilden wir die *drei Differenzen*

$$\xi_1 - \xi_2,\ \xi_1 - \xi_3,\ \xi_2 - \xi_3$$

und nehmen von diesen das *Product*. Sobald dieses Product von Null verschieden ist, kann keine der Differenzen gleich Null und daher auch keine der drei Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 einer anderen gleich werden. Aus (21) des vorigen § folgt

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = \varphi(1-\varrho) + \psi(1-\varrho^2) \\ \xi_1 - \xi_3 = \varphi(1-\varrho^2) + \psi(1-\varrho) \\ \xi_2 - \xi_3 = \varphi(\varrho-\varrho^2) + \psi(\varrho^2-\varrho). \end{cases}$$

Die Factoren von φ und ψ sind hier *Differenzen aus dritten Wurzeln der Einheit*, und deshalb einer Vereinfachung fähig. Wegen der im vorigen § angeführten Gleichung

$$\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$$

findet sich

$$1-\varrho^2 = (1-\varrho)(1+\varrho) = -\varrho^2(1-\varrho),$$

und daher auch

$$1-\varrho = -\varrho(1-\varrho^2).$$

Es ist deshalb

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = (1-\varrho)\ (\varphi - \varrho^2\psi) \\ \xi_1 - \xi_3 = (1-\varrho^2)(\varphi - \varrho\psi) \\ \xi_2 - \xi_3 = (\varrho-\varrho^2)(\varphi - \psi). \end{cases}$$

Nun haben wir, wenn in (4) des § 48 die Zahl $n = 3$ gesetzt wird, für die Function $x^3 - 1$ die Zerlegung in Factoren des ersten Grades

$$x^3 - 1 = (x-1)(x-\varrho)(x-\varrho^2).$$

Ersetzt man die unbestimmte Variable x durch den Werth $\frac{\varphi}{\psi}$ und multiplicirt auf beiden Seiten mit ψ^3, so entsteht die Relation

$$(3)\qquad \varphi^3 - \psi^3 = (\varphi-\psi)(\varphi-\varrho\psi)(\varphi-\varrho^2\psi).$$

Wenn daher die drei Differenzen $\xi_1 - \xi_2$, $\xi_1 - \xi_3$, $\xi_2 - \xi_3$ mit einander multiplicirt werden, so ergiebt das System (2) die Bestimmung

$$(4)\quad (\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_3) = (1-\varrho)(1-\varrho^2)(\varrho-\varrho^2)(\varphi^3-\psi^3).$$

Die drei ersten Factoren der rechten Seite sind drei Differenzen aus den verschiedenen dritten Wurzeln der Einheit, und ihr Product hat einen nothwendig von Null verschiedenen Zahlenwerth; in Folge der Gleichung (9) des § 48 ist $(1-\varrho)(1-\varrho^2)=3$, ferner wird $\varrho-\varrho^2$ gleich der in i oder $-i$ multiplicirten $\sqrt{3}$, mithin $(1-\varrho)(1-\varrho^2)(\varrho-\varrho^2)$ gleich $\pm 3\sqrt{3}\,i$. Die linke Seite von (4) kann somit nur verschwinden, sobald die Differenz $\varphi^3-\psi^3$ gleich Null wird. In Folge der Gleichungen (12) und (16) des vorigen § ist aber

(5) $$\varphi^3-\psi^3=2\omega.$$

Weil nun die Grösse ω als eine Wurzel der dort mit (9) bezeichneten reinen quadratischen Gleichung

$$\omega^2=\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$$

definirt ist, so kann dieselbe niemals verschwinden, wofern nicht die Verbindung

(6) $$\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$$

gleich Null ist. *Unter der Voraussetzung, dass diese Verbindung einen von Null verschiedenen Werth hat, sind daher die drei gefundenen Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 nothwendig von einander verschieden,* Damit die Verbindung (6) gleich Null werde, muss zwischen den Coefficienten der in Rede stehenden Gleichung eine bestimmte Beziehung eintreten. Wofern diese Beziehung nicht obwaltet, repräsentiren die drei Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 *die drei von einander verschiedenen Wurzeln der allgemeinen cubischen Gleichung*, und führen nach dem Satze (2) und der Gleichung (14) des § 43 zu der *Zerlegung der betreffenden Function des dritten Grades in drei Factoren des ersten Grades*

(7) $$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3).$$

Die Gleichungen zwischen den Coefficienten der gleichhohen Potenzen von x,

(8) $$\left\{\begin{aligned} -\frac{a_1}{a_0}&=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\ \frac{a_2}{a_0}&=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3\\ -\frac{a_3}{a_0}&=\xi_1\xi_2\xi_3,\end{aligned}\right.$$

welche gelten müssen, sobald die Verbindung (6) einen beliebigen von Null verschiedenen Werth hat, können aber ihre Gültigkeit nicht verlieren, sobald diese Verbindung den Werth Null annimmt. Daher besteht die in (7) angegebene Zerlegung der Function des dritten Grades und die zugehörige Darstellung der drei Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3 für alle Fälle.

Wie im vorigen § im voraus bemerkt worden ist, erfolgt die Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichung durch die Zurückführung auf reine Gleichungen. Die betreffenden reinen cubischen Gleichungen werden aus den Coefficienten der gegebenen cubischen Gleichung und der Wurzel einer reinen quadratischen Gleichung durch rationale Operationen gebildet, und hierauf werden die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung vermöge der Wurzeln der reinen cubischen Gleichungen und vermöge der Coefficienten der gegebenen cubischen Gleichung rational dargestellt. Der bessern Uebersicht wegen möge der ganze Hergang noch einmal zusammengefasst werden. Aus den Coefficienten der Function

$$\frac{1}{a_0} f(x) = x^3 + \frac{a_1}{a_0} x^2 + \frac{a_2}{a_0} x + \frac{a_3}{a_0}$$

sind nach (20) des vorigen § die Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} b_2 &= -\frac{a_1^2}{3a_0^2} + \frac{a_2}{a_0} \\ b_3 &= \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0} \end{aligned}\right.$$

abzuleiten. Dann ist nach (9) desselben § die reine quadratische Gleichung

$$\omega^2 = \frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$$

aufzustellen, und für eine bestimmte aber beliebig zu wählende Wurzel ω derselben nach (12) und (16) desselben § die reine cubische Gleichung

$$\varphi^3 = -\frac{b_3}{2} + \omega$$

und die reine cubische Gleichung

$$\psi^3 = -\frac{b_3}{2} - \omega$$

zu bilden. Mit einer bestimmten aber beliebig zu wählenden

Wurzel der einen von diesen beiden reinen Gleichungen hat man hierauf diejenige Wurzel der anderen zu verbinden, für welche die Gleichung

$$\varphi\psi = -\frac{b_2}{3}$$

erfüllt ist, und erhält mit Hülfe einer nicht reellen dritten Wurzel der Einheit ϱ für die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $f(\xi)$ die Ausdrücke (21) des vorigen §:

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + \varphi \quad + \psi$$

$$\xi_2 = -\frac{a_1}{3a_0} + \varphi\varrho + \psi\varrho^2$$

$$\xi_3 = -\frac{a_1}{3a_0} + \varphi\varrho^2 + \psi\varrho.$$

§ 53. Discussion der Beschaffenheit der Wurzeln bei einer cubischen Gleichung, deren Coefficienten reell sind.

Es sollen jetzt die Ausdrücke der drei Wurzeln der cubischen Gleichung angewendet werden, um bei einer *Gleichung, deren Coefficienten reelle Grössen sind*, zu beurtheilen, *unter welchen Bedingungen drei reelle Wurzeln oder eine reelle Wurzel und zwei complexe conjugirte Wurzeln auftreten.* Denn nach § 47 existiren keine anderen Möglichkeiten, da mit einer nicht reellen Wurzel zugleich stets die conjugirte Grösse als Wurzel vorkommt. Aus der reellen Beschaffenheit der Coefficienten bei der Gleichung $f(\xi) = 0$, oder, was dasselbe ist, bei der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ folgt die gleiche Eigenschaft der Coefficienten b_2 und b_3 bei der zugeordneten Function $\frac{1}{c_0}\varphi(z)$. Ein Unterschied zwischen dem Reellen und Imaginären macht sich erst bei der Auflösung der reinen quadratischen Gleichung

$$\omega^2 = \frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$$

geltend, und zwar dadurch, dass die *Verbindung* $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$, *welche nach der Voraussetzung einen reellen Werth hat, entweder positiv oder negativ oder gleich Null sein kann.* Diese Unter-

scheidung lässt sich auch so ausdrücken, dass die quadratische Gleichung, welche in dem Nullsetzen des Ausdruckes (7) in § 51 besteht, in dem ersten Falle zwei reelle und verschiedene, in dem zweiten Falle zwei complexe conjugirte, und in dem dritten Falle zwei reelle einander gleiche Wurzeln liefert.

Es sei erstens $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ *positiv*, dann wird ω durch die Ausziehung einer Quadratwurzel aus einer positiven Grösse erhalten, und hat zwei numerisch gleiche und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte reelle Werthe; bei der Fortsetzung des Auflösungsverfahrens darf jeder von beiden genommen werden. Was nun die reinen cubischen Gleichungen

$$\varphi^3 = -\frac{b_3}{2} + \omega,\ \psi^3 = -\frac{b_3}{2} - \omega$$

anlangt, so weiss man durch § 29, dass aus jeder positiven oder negativen reellen Grösse eine und nur eine reelle dritte Wurzel gezogen werden kann, während ausser dieser nur zwei nicht reelle Wurzeln vorhanden sind. Wenn daher für φ die reelle dritte Wurzel des ersten, und für ψ die reelle dritte Wurzel des zweiten Ausdruckes genommen wird, so liefern dieselben ein reelles Product, und genügen deshalb der Bedingung $\varphi\psi = -\frac{b_2}{3}$. Bei dieser Verfügung wird der für ξ_1 angegebene Ausdruck

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + \varphi + \psi$$

gleich einer reellen Grösse. In den für ξ_2 und ξ_3 aufgestellten Ausdrücken kann der reelle und imaginäre Theil leicht getrennt werden, indem man für die nicht reelle dritte Wurzel der Einheit ϱ ihren Ausdruck setzt.

Es ist dann aber nothwendig, zwischen den beiden zulässigen Werthen von ϱ zu wählen, und man nehme

$$\varrho = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

mithin

$$\varrho^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Demgemäss kommt

$$\xi_2 = -\frac{a_1}{3a_0} - \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi - \psi)\, i$$

$$\xi_3 = -\frac{a_1}{3a_0} - \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi - \psi)\, i.$$

Diese beiden Grösssen sind complex und zu einander conjugirt; der Factor von i kann nicht verschwinden, weil aus der Gleichung $\varphi = \psi$ die Gleichung $\varphi^3 = \psi^3$ folgen würde, und weil diese Gleichung nicht eintreten kann, ohne dass ω gleich Null würde, was gegen die Annahme $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4} > 0$ verstösst. *Die gegebene cubische Gleichung hat daher, sobald die Verbindung* $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ *positiv ist, eine reelle und zwei complexe conjugirte Wurzeln.*

Es sei zweitens $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ *negativ*. In diesem Falle ist ω rein imaginär, nämlich gleich einer in $+i$ oder in $-i$ multiplicirten Quadratwurzel aus einer positiven Grösse, und die reinen cubischen Gleichungen

$$\varphi^3 = -\frac{b_3}{2} + \omega,\ \psi^3 = -\frac{b_3}{2} - \omega$$

enthalten die beiden complexen und zu einander conjugirten Grössen $-\frac{b_3}{2} + \omega$ und $-\frac{b_3}{2} - \omega$. Es wird daher nothwendig, die Auflösung der reinen cubischen Gleichungen in demjenigen Umfange anzuwenden, in welchem dieselbe oben entwickelt worden ist.

Nach der Vorschrift des § 33 ist die complexe Grösse $-\frac{b_3}{2} + \omega$ in die Gestalt zu bringen

$$-\frac{b_3}{2} + \omega = P(\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

wo mit P *der absolute Betrag der complexen Grösse*, mit Φ *ein innerhalb des Intervalls einer ganzen Kreisperipherie vollständig bestimmter Winkel* bezeichnet wird. Hieraus folgt für die conjugirte complexe Grösse die Gleichung

$$-\frac{b_3}{2} - \omega = P(\cos \Phi - i \sin \Phi).$$

Die reelle positive Grösse P ist durch die Gleichung

$$\frac{b_3^2}{4} - \omega^2 = P^2$$

bestimmt. Weil aber $\omega^2 = \frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ ist, so kommt

$$-\frac{b_2^3}{27} = P^2,$$

und es leuchtet ein, dass in dem gegenwärtigen Falle b_2 eine *negative Grösse* sein muss. Um die drei dritten Wurzeln aus der Grösse $-\frac{b_3}{2} + \omega$ darzustellen, hat man erstens die positive Cubikwurzel aus der positiven Grösse P zu bestimmen, und zweitens die Theilung des Winkels Φ in drei gleiche Theile auszuführen. Nun ist gegenwärtig P^2 gleich der dritten Potenz der positiven Grösse $-\frac{b_2}{3}$, folglich wird die positive Cubikwurzel aus der positiven Grösse P gleich der positiven Quadratwurzel aus der positiven Grösse $-\frac{b_2}{3}$. Die drei Werthe der Grösse φ werden deshalb mit Hülfe der nicht reellen dritten Wurzel der Einheit ϱ folgendermassen dargestellt

$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3} + i\sin\frac{\Phi}{3}\right),\ \sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3} + i\sin\frac{\Phi}{3}\right)\varrho,$$
$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3} + i\sin\frac{\Phi}{3}\right)\varrho^2.$$

In § 39 ist gezeigt worden, dass die $n$ten Wurzeln einer complexen Grösse $A + Bi$ zu den $n$ten Wurzeln der conjugirten Grösse $A - Bi$ paarweise conjugirt sind. Demzufolge hat die Grösse ψ die folgenden drei Werthe, welche den aufgestellten Werthen der Grösse φ der Reihe nach conjugirt sind

$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3} - i\sin\frac{\Phi}{3}\right),\ \sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3} - i\sin\frac{\Phi}{3}\right)\varrho^2,$$
$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3} - i\sin\frac{\Phi}{3}\right)\varrho.$$

Auf diese Weise wird, indem man den ersten Werth der ersten Reihe für φ, den ersten Werth der zweiten Reihe für ψ nimmt, der Forderung Genüge geleistet, dass das Product $\varphi\psi$ den reellen Werth $-\frac{b_2}{3}$ haben soll; denn dieser Werth fällt hier

mit der *gemeinsamen Norm* der complexen conjugirten Grössen φ und ψ zusammen. Weil nun sowohl die Grössen φ und ψ, wie auch die Grössen $\varphi\varrho$ und $\psi\varrho^2$, wie auch die Grössen $\varphi\varrho^2$ und $\psi\varrho$ einander conjugirt sind, so heben sich die imaginären Theile in den drei Ausdrücken ξ_1, ξ_2 ξ_3, fort und die drei Wurzeln der cubischen Gleichung erweisen sich als reell. Man erkennt hieraus, *dass die gegebene cubische Gleichung, wofern die Verbindung* $\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$ *negativ ist, drei reelle Wurzeln hat.* Für die Darstellung der drei Wurzeln ist es zweckmässig, wieder einen bestimmten unter den beiden zulässigen Werthen der dritten Wurzel der Einheit ϱ in die Rechnung einzuführen. Es sei wie oben $\varrho=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, dann nehmen die zusammengehörigen Wurzeln der beiden reinen cubischen Gleichungen diese Gestalt an

$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3}+i\sin\frac{\Phi}{3}\right), \sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\left(\frac{\Phi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\Phi+2\pi}{3}\right)\right),$$

$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\left(\frac{\Phi+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\Phi+4\pi}{3}\right)\right),$$

$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\frac{\Phi}{3}-i\sin\frac{\Phi}{3}\right), \sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\left(\frac{\Phi+2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\Phi+2\pi}{3}\right)\right),$$

$$\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\left(\cos\left(\frac{\Phi+4\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\Phi+4\pi}{3}\right)\right);$$

wofern der Winkel Φ in dem Intervall zwischen 0 und 2π gewählt ist, so fällt der Winkel $\Phi+2\pi$ in das Intervall zwischen 2π und 4π, der Winkel $\Phi+4\pi$ in das Intervall zwischen 4π und 6π. Die drei Ausdrücke ξ_1 ξ_2, ξ_3 gehen somit in die folgenden über

$$\xi_1=-\frac{a_1}{3a_0}+2\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\cos\frac{\Phi}{3}$$

$$\xi_2=-\frac{a_1}{3a_0}+2\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\cos\left(\frac{\Phi+2\pi}{3}\right)$$

$$\xi_3=-\frac{a_1}{3a_0}+2\sqrt{-\frac{b_2}{3}}\cos\left(\frac{\Phi+4\pi}{3}\right).$$

Es ist aber auch gestattet, dem Winkel Φ ein anderes

eine ganze Kreisperipherie betragendes Intervall anzuweisen; schreibt man zum Beispiel vor, dass der Winkel Φ in dem Intervall von 2π bis 4π enthalten sein soll, so tritt die Aenderung ein, dass das frühere ξ_2 zu dem neuen ξ_1, das frühere ξ_3 zu dem neuen ξ_2 und das frühere ξ_1 zu dem neuen ξ_3 wird. Durch eine neue Verfügung über den Winkel Φ kann nur eine Vertauschung der Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 unter einander hervorgerufen werden.

Sowohl in dem Falle, dass die Verbindung $\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$ *positiv, wie auch in dem Falle, dass dieselbe negativ ist, müssen die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung unter einander verschieden sein.* Denn es ist im vorigen § bewiesen worden, dass ein Gleichwerden von je zweien der Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur dann eintreten kann, wenn die betreffende Verbindung gleich Null wird. Weil aber aus dem am Schlusse des vorigen § angeführten Grunde die drei Wurzeln der cubischen Gleichung in allen Fällen durch die drei Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3 dargestellt werden, so wird eine vollständige Discussion der cubischen Gleichung mit reellen Coefficienten erhalten, indem wir die Beschaffenheit der Ausdrücke ξ_1, ξ_2 ξ_3 noch für den Fall erörtern, in welchem die *Verbindung* $\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$ *gleich Null* ist.

Unter dieser Annahme hat die Grösse ω nur den *einen Werth Null*, und für die Grössen φ und ψ entstehen die mit einander zusammenfallenden Gleichungen

$$\varphi^3=-\frac{b_3}{2},\ \psi^3=-\frac{b_3}{2}.$$

Es erhält demnach φ als einzigen reellen Werth die reelle Cubikwurzel aus der reellen Grösse $-\frac{b_3}{2}$, welche vermöge der Gleichung $\frac{b_3^2}{4}=-\frac{b_2^3}{27}$ gleich der mit dem Vorzeichen der Grösse $-b_3$ zu versehenden Quadratwurzel aus der positiven Grösse $-\frac{b_2}{3}$ ist, und der zugeordnete Werth von ψ muss wegen der Gleichung $\varphi\psi=-\frac{b_2}{3}$ derselbe sein.

Um diesen Werth der Grössen φ und ψ in die Ausdrücke

ξ_1, ξ_2, ξ_3 einzuführen, notiren wir denselben durch das gemeinsame Zeichen und erinnern uns daran, dass $\varrho + \varrho^2 = -1$ ist. Dann nehmen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Gestalt an

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\varphi$$

$$\xi_2 = -\frac{a_1}{3a_0} - \varphi$$

$$\xi_3 = -\frac{a_1}{3a_0} - \varphi.$$

Es findet sich somit das Resultat, *dass, wenn die Verbindung* $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ *gleich Null ist, die gegebene cubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat, von denen zwei einander gleich sind.*

Die drei Fälle, welche bei der Beurtheilung der Realität der drei Wurzeln einer cubischen Gleichung, deren Coefficienten reell sind, zu sondern waren, unterscheiden sich auch durch die zur Darstellung der Wurzeln der Gleichung erforderlichen Hülfsoperationen. In dem ersten Falle, in dem $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ positiv ist, muss zuerst eine Quadratwurzel aus einer gegebenen positiven Grösse, dann eine Cubikwurzel aus einer gegebenen positiven Grösse gezogen werden; in dem zweiten Falle, in dem $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ negativ, muss zuerst eine Quadratwurzel aus einer gegebenen positiven Grösse gezogen, dann ein gegebener Winkel in drei gleiche Theile getheilt werden, in dem dritten Falle, in dem $\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}$ gleich Null ist, genügt es, eine Quadratwurzel aus einer gegebenen positiven Grösse zu ziehen.

§ 54. Ausdrücke der Wurzeln einer cubischen Gleichung durch Anwendung von Wurzelzeichen. Allgemeine Deutung der Wurzelzeichen.

Bei Gelegenheit der Auflösung der reinen Gleichung $\omega^n = A + Bi$ ist in § 39 erwähnt, dass die n Wurzeln dieser Gleichung mit dem Namen *der nten Wurzeln aus der complexen Grösse $A + Bi$* bezeichnet werden. Es ist aber an jener Stelle

nicht angeführt, dass auch für die Notation dieser $n$ten Wurzeln *das Wurzelzeichen*

$$\sqrt[n]{A+Bi}$$

gebraucht wird. In der That liegt darin ein gewisser Missstand, dass das Wurzelzeichen in einer *doppelten Weise* zur Anwendung kommt. Ich habe bis jetzt das Wurzelzeichen nur in dem Sinne angewendet, welcher in § 18 und § 20 definirt ist, so dass *für einen reellen positiven Werth C* die *eindeutig bestimmte reelle positive Wurzel der reinen Gleichung*

$$\omega^n = C$$

durch $\sqrt[n]{C}$ dargestellt wird. Die *zweite Art der Anwendung*, von der gegenwärtig zum ersten Male gesprochen wird, besteht darin, *dass durch das Zeichen $\sqrt[n]{A+Bi}$ jede beliebige von den n Wurzeln der reinen Gleichung $\omega^n = A+Bi$ ausgedrückt werden soll.* Nach der ersten Art der Anwendung wird durch das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{}$ nur *eine bestimmte Grösse* repräsentirt, nach der zweiten Art der Anwendung wird durch das Wurzelzeichen *eine beliebige unter n bestimmten Grössen* repräsentirt. Man sagt deshalb, dass das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{}$ in dem ersten Falle *ein eindeutiges*, in dem zweiten Falle *ein mehrdeutiges und zwar n-deutiges* sei. Hierbei muss aber festgehalten werden, dass ein Zeichen, insofern es in einer Rechnung vorkommt, jedes Mal immer nur *eine* Grösse bedeuten kann, und dass, wenn ein Zeichen, das mehrdeutig ist, in einer Rechnung vorkommt, damit vorgeschrieben wird, die Rechnung mehrere Male auszuführen, und dabei jenes Zeichen nach einander durch die verschiedenen Grössen zu ersetzen, welche das Zeichen vertritt.

Dieses Sachverhältniss richtig zu erfassen, ist für den Anfänger meistens schwierig; die an und für sich vorhandene Schwierigkeit wird aber bei der Anwendung des Wurzelzeichens durch die Möglichkeit der Verwechselung zwischen den beiden angegebenen Definitionen noch vergrössert. Eine solche Verwechselung tritt vorzugsweise dann leicht ein, wenn es sich um eine reine Gleichung $\omega^n = A+Bi$ handelt, in der die Grösse $A+Bi$ gleich einer reellen positiven Grösse C ist. Dasselbe

Zeichen $\sqrt[n]{C}$ hat alsdann nach der ersten Definition nur *eine Bedeutung*, nach der zweiten Definition dagegen *n verschiedene Bedeutungen.* Dieser Unterschied läuft bei der Quadratwurzel darauf hinaus, dass $\sqrt{C}$ vermöge der ersten Definition einen bestimmten postitiven Werth, vermöge der zweiten Definition entweder den erwähnten positiven oder den gleichen und entgegen gesetzten Werth bedeutet.

Unter Zugrundelegung der zweiten Definition des Wurzelzeichens entstehen für die beiden Wurzeln der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$\xi^2 + \frac{a_1}{a_0}\xi + \frac{a_2}{a_0} = 0$$

nach § 28 die Ausdrücke

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\frac{-4a_0a_2 + a_1^2}{4a_0^2}},$$

$$\xi_2 = -\frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\frac{-4a_0a_2 + a_1^2}{4a_0^2}}.$$

Ferner nehmen die drei Wurzeln der allgemeinen cubischen Gleichung

$$\xi^3 + \frac{a_1}{a_0}\xi^2 + \frac{a_2}{a_0}\xi + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

nach § 52 diese Gestalt an, indem ω mit $\sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}$, ferner φ mit $\sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} + \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}}$, ψ mit $\sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} - \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}}$ bezeichnet wird und $\varphi\psi = -\frac{b_2}{3}$ sein muss,

$$\xi_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + \sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} + \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} - \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}}$$

$$\xi_2 = -\frac{a_1}{3a_0} + \varrho\sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} + \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}} + \varrho^2\sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} - \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}}$$

$$\xi_3 = -\frac{a_1}{3a_0} + \varrho^2\sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} + \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}} + \varrho\sqrt[3]{-\frac{b_3}{2} - \sqrt{\frac{b_2^3}{27} + \frac{b_3^2}{4}}}.$$

Für die im vorigen § erörterte Annahme, dass *die Coeffi-*

cienten der cubischen Gleichung reelle Grössen sind, enthält der vorstehend mit ξ_1 bezeichnete Ausdruck *die Auflösung der cubischen Gleichung durch die Cardanische Regel.* Das Quadratwurzelzeichen und das Cubikwurzelzeichen sind hierbei im reellen Sinne zu interpretiren. Damit dann der in Rede stehende Ausdruck reell sei, muss die Verbindung $\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$ positiv oder gleich Null sein, was dem ersten und dritten Falle des vorigen § entspricht. Der Fall, in dem die genannte Verbindung einen negativen Werth hat, und der mit dem zweiten Falle des vorigen § zusammentrifft, schien anfangs der *Cardanischen Regel* zu wiederstehen, und wurde deshalb der *casus irreducibilis* genannt. Nachdem eine vollständigere Erkenntniss in die Auflösung der reinen Gleichungen gewonnen war, fügte sich auch dieser Fall dem allgemeinen Gesetze.

Zum Schlusse mögen für die Auflösung der cubischen Gleichung zwei Beispiele behandelt werden. Es sei erstens

$$f(x)=x^3-6x^2+15x-13;$$

dann geht durch die Substitution

$$x=2+z$$

die Function $f(x)$ in die Function

$$\varphi(z)=z^3+3z+1$$

über, indem $b_2=3$, $b_3=1$ wird. Jetzt kommt die Gleichung

$$\omega^2=\frac{5}{4},$$

mithin ist $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{5}$, und daher

$$\varphi^3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\ \psi^3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Die cubische Gleichung $f(\xi)=0$ hat demnach eine reelle und zwei complexe conjugirte Wurzeln, und deren Werthe sind

$$\xi_1=2+\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\xi_2=2+\varrho\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\varrho^2\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\xi_3=2+\varrho^2\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\varrho\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Man habe zweitens

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3.$$

Durch die Substitution

$$x = -2 + z$$

verwandelt sich $f(x)$ in die Function

$$\varphi(z) = z^3 - 3z + 1,$$

wobei $b_2 = -3$, $b_3 = 1$ ist. Es findet sich nun die Gleichung

$$\omega^2 = -\frac{3}{4},$$

so dass $\omega = \frac{i}{2}\sqrt{3}$ wird. Deshalb ist

$$\varphi^3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3},\ \psi^3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Die cubische Gleichung $f(\xi) = 0$ hat demnach drei von einander verschiedene reelle Wurzeln, welche durch Radikale folgendermassen dargestellt werden:

$$\xi_1 = -2 + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\xi_2 = -2 + \varrho\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \varrho^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\xi_3 = -2 + \varrho^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \varrho\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}.$$

Um dieselben in reeller Gestalt auszudrücken, bemerken wir, dass

$$-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

ist, dass also bei der in § 53 gebildeten Gleichung $-\frac{b_3}{2} + \omega = P(\cos\Phi + i\sin\Phi)$ die Grösse $P = 1$, der Winkel Φ gleich $\frac{2\pi}{3}$ wird. Man bekommt daher die Bestimmung $\frac{\Phi}{3} = \frac{2\pi}{9}$, $\frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$, $\frac{\Phi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$, und für die drei reellen Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung die Darstellung

$$\xi_1 = -2 + 2\cos\frac{2\pi}{9}$$

$$\xi_2 = -2 + 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

$$\xi_3 = -2 + 2\cos\frac{14\pi}{9}.$$

§ 55. Allgemeine Auflösung der Gleichung des vierten Grades mit einer Unbekannten.

Wir wenden uns jetzt zu der Behandlung der *Gleichung des vierten Grades oder der biquadratischen Gleichung*, welche aus (1) des § 51 durch die Annahme $n=4$ hervorgeht, nämlich

$$(1) \qquad \zeta^4 + b_2\zeta^2 + b_3\zeta + b_4 = 0,$$

und setzen ζ gleich einem Aggregat von drei Grössen

$$(2) \qquad \zeta = p + q + r.$$

Das Ergebniss der Einführung dieses Ausdruckes in die Gleichung (1) lässt sich in einer dem vorliegenden Zwecke angemessenen Weise ordnen, wenn man für die folgenden *symmetrischen Verbindungen* der Grössen p, q, r und der Grössen p^2, q^2, r^2 besondere Zeichen anwendet

$$(3) \qquad \begin{aligned} p+q+r &= s_1 \\ pq+pr+qr &= s_2 \\ pqr &= s_3, \end{aligned}$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} p^2+q^2+r^2 &= u_1 \\ p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2 &= u_2 \\ p^2q^2r^2 &= u_3. \end{aligned}$$

Die Erhebung von $p+q+r$ auf das Quadrat giebt

$$\zeta^2 = p^2+q^2+r^2+2pq+2pr+2qr,$$

das ist

$$\zeta^2 = u_1 + 2s_2.$$

Hieraus fogt

$$\zeta^4 = u_1^2 + 4u_1s_2 + 4s_2^2.$$

Man hat aber

$$s_2^2 = p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2+2pqr(p+q+r),$$

oder

$$s_2^2 = u_2 + 2s_3s_1,$$

und deshalb

$$\zeta^4 = u_1^2 + 4u_1s_2 + 4u_2 + 8s_3s_1.$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (1) in die folgende

$$(5) \quad u_1^2 + 4u_1s_2 + 4u_2 + 8s_3s_1 + b_2(u_1+2s_2) + b_3s_1 + b_4 = 0.$$

Dieselbe kann in der Weise erfüllt werden, dass erstens das Aggregat der Glieder, welche in s_1 multiplicirt sind, zweitens das Aggregat der Glieder, welche in s_2 multiplicirt sind, und drittens das Aggregat der noch übrigen Glieder zum Verschwinden gebracht wird. So erhält man die drei Gleichungen

(6) $8s_3 + b_3 = 0,\ 4u_1 + 2b_2 = 0,\ u_1^2 + 4u_2 + b_2 u_1 + b_4 = 0,$
durch welche sich die Verbindungen u_1, u_2, s_3 folgendermassen bestimmen:

$$(7)\qquad \begin{cases} u_1 = p^2 + q^2 + r^2 = -\dfrac{b_2}{2} \\ u_2 = p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = \dfrac{b_2^2}{16} - \dfrac{b_4}{4} \\ s_3 = pqr = -\dfrac{b_3}{8} \end{cases}$$

Hierzu kommt durch Quadriren der letzten Gleichung die Bestimmung

$$(8)\qquad u_3 = p^2q^2r^2 = \frac{b_3^2}{64}.$$

Vermöge des Umstandes, dass die drei symmetrischen Verbindungen u_1, u_2, u_3 der drei Grössen p^2, q^2, r^2 durch die Coefficienten der Gleichung (1) ausgedrückt vorliegen, lässt sich jetzt nach dem auch für die Auflösung der cubischen Gleichung benutzten Satze des § 46 *diejenige Function des dritten Grades einer Variable u* aufstellen, *die, gleich Null gesetzt, die Grössen* p^2, q^2, r^2 *als ihre drei Wurzeln liefert.* Es ist dies die Function

$$(9)\qquad u^3 + \frac{b_2}{2}u^2 + \left(\frac{b_2^2}{16} - \frac{b_4}{4}\right)u - \frac{b_3^2}{64}.$$

Demnach hängt die Bestimmung der drei Grössen p^2, q^2, r^2 von der *Auflösung der zugeordneten cubischen Gleichung* ab. Durch das vorhin entwickelte Verfahren werden die drei Wurzeln η_1, η_2, η_3 dieser *cubischen Gleichung* vermittelst der successiven Auflösung von *reinen Gleichungen des zweiten und dritten Grades* dargestellt, und man hat p^2 gleich der einen, q^2 gleich einer zweiten, r^2 gleich der dritten Wurzel zu nehmen. Es sei

$$(10)\qquad p^2 = \eta_1,\ q^2 = \eta_2,\ r^2 = \eta_3,$$

dann ist zu der Determination von p, q, r selbst nur noch die *Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen*

$$(11)\qquad \Theta_1^2 = \eta_1,\ \Theta_2^2 = \eta_2,\ \Theta_3^2 = \eta_3$$

zu bewirken. Hierbei ergeben sich für die erste Gleichung zwei Werthe, die mit Θ_1 und $-\Theta_1$ bezeichnet werden können und auf gleiche Art für die zweite Gleichung zwei Werthe Θ_2 und $-\Theta_2$, für die dritte Gleichung zwei Werthe Θ_3 und $-\Theta_3$. Weil nun für das Product pqr durch die letzte Gleichung (7) der

Werth $-\frac{b_3}{8}$ vorgeschrieben ist, so kann man von den je zwei Werthen, die sowohl für p, wie auch für q, wie auch für r zulässig sind, bei der ersten Grösse p und bei der zweiten Grösse q eine beliebige Wahl treffen, erhält aber den Werth der dritten Grösse r durch die Gleichung $p\,q\,r = -\frac{b_3}{8}$, wofern b_3 nicht gleich Null ist und in Folge dessen weder p noch q noch r gleich Null sein kann.

Von der Grösse b_3 darf hier ohne Verletzung der Allgemeinheit angenommen werden, dass dieselbe von Null verschieden sei; wenn nämlich $b_3 = 0$ ist, so geht die Gleichung (1) in eine quadratische Gleichung für ζ^2 über, und die Lösung folgt aus dem bisher Mitgetheilten. Es möge nun Θ_1 und Θ_2 beliebig gewählt, und der Werth Θ_3, dessen Vorzeichen verfügbar ist, so angenommen sein, dass die drei Werthe Θ_1, Θ_2, Θ_3 die Bedingung

$$\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 = -\frac{b_3}{8} \tag{12}$$

erfüllen, dann lassen sich die zusammengehörigen Werthe von p, q, r, deren Product unverändert den Werth $\Theta_1\ \Theta_2\ \Theta_3$ haben muss, nach dem so eben Gesagten auf die folgenden vier Arten determiniren

$$\left\{\begin{array}{lll} p = +\Theta_1, & q = +\Theta_2, & r = +\Theta_3 \\ p = -\Theta_1, & q = -\Theta_2, & r = -\Theta_3 \\ p = -\Theta_1, & q = +\Theta_2, & r = -\Theta_3 \\ p = -\Theta_1, & q = -\Theta_2, & r = +\Theta_3. \end{array}\right. \tag{13}$$

Hierdurch liefert die Gleichung $\zeta = p + q + r$ *für die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung* (1) *die folgenden vier Ausdrücke*

$$\left\{\begin{array}{l} \zeta_1 = +\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \\ \zeta_2 = +\Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3 \\ \zeta_3 = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \\ \zeta_4 = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3. \end{array}\right. \tag{14}$$

Man erkennt zugleich, dass, wofern die drei Wurzeln η_1, η_2, η_3 der aufgestellten cubischen Gleichung auf irgend eine Art unter einander vertauscht werden, was auf 6 verschiedene Arten möglich ist, hieraus eine entsprechende Vertauschung der

drei Werthe Θ_1, Θ_2, Θ_3 hervorgeht, dass bei jeder dieser Vertauschungen ζ_1 ungeändert bleibt, dagegen ζ_2, ζ_3, ζ_4 unter sich die Bedeutung wechseln, und dass deshalb dieses Verfahren keinen neuen Ausdruck einer Wurzel zu den vier gefundenen hinzufügt.

Aehnlich wie bei der cubischen Gleichung ist hier die Bemerkung hinzuzufügen, dass die Ausdrücke ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 auch bei der Annahme $b_3 = 0$ anwendbar bleiben. Durch diese Annahme verschwindet das Product $\Theta_1^2 \Theta_2^2 \Theta_3^2$ und deshalb einer seiner Factoren. Wenn etwa $\Theta_3^2 = 0$ ist, so verschwindet $+\Theta_3$ und $-\Theta_3$, und es wird überflüssig und unmöglich durch die Gleichung $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 = -\frac{b_3}{8}$ zwischen den Werthen $+\Theta_3$ und $-\Theta_3$ eine Entscheidung zu treffen.

Die Werthe von x, welche *die allgemeine Function des vierten Grades*

$$\frac{1}{a_0} f(x) = x^4 + \frac{a_1}{a_0} x^3 + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \frac{a_3}{a_0} x + \frac{a_4}{a_0}$$

zum Verschwinden bringen, werden aus den gefundenen Ausdrücken abgeleitet, nachdem diese Function durch die Substitution

$$x = z - \frac{a_1}{4 a_0}$$

in die Function

$$\frac{1}{c_0} \varphi(z) = z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4$$

transformirt ist. Die Coefficienten b_2, b_3, b_4 bekommen nach den Gleichungen (5) des § 50 die Ausdrücke

$$(15) \quad \begin{cases} b_2 = -\dfrac{3 a_1^2}{8 a_0^2} + \dfrac{a_2}{a_0} \\[2ex] b_3 = \dfrac{a_1^3}{8 a_0^3} - \dfrac{a_1 a_2}{2 a_0^2} + \dfrac{a_3}{a_0} \\[2ex] b_4 = -\dfrac{3 a_1^4}{256 a_0^4} + \dfrac{a_1^2 a_2}{16 a_0^3} - \dfrac{a_1 a_3}{4 a_0^2} + \dfrac{a_4}{a_0}. \end{cases}$$

Demnach haben *die vier Wurzeln der Gleichung* $f(\xi) = 0$ diese Ausdrücke

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\xi_1 &= -\frac{a_1}{4a_0}+\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3\\
\xi_2 &= -\frac{a_1}{4a_0}+\Theta_1-\Theta_2-\Theta_3\\
\xi_3 &= -\frac{a_1}{4a_0}-\Theta_1+\Theta_2-\Theta_3\\
\xi_4 &= -\frac{a_1}{4a_0}-\Theta_1-\Theta_2+\Theta_3,
\end{aligned}
$$

welche sich aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung und den drei Wurzeln von reinen quadratischen Gleichungen Θ_1, Θ_2, Θ_3 *rational* zusammensetzen; die Grössen $\Theta_1^2=\eta_1$, $\Theta_2^2=\eta_2$, $\Theta_3^2=\eta_3$ sind die Wurzeln einer cubischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Verbindungen aus den Coefficienten der gegebenen biquadratischen Gleichung $f(\xi)=0$ sind, und lassen sich in der angegebenen Weise darstellen.

Die biquadratische Gleichung kann ausser diesen vier Ausdrücken keine andere Wurzel haben, wofern diese vier Ausdrücke von einander verschieden sind.

Damit dies festgestellt werde, betrachten wir, wie dies bei der cubischen Gleichung geschehen ist, das *Product der sämmtlichen aus den Ausdrücken ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 zu bildenden Differenzen $\xi_\alpha-\xi_\beta$, bei denen der Zeiger α kleiner ist als der Zeiger β*, so dass von den beiden aus denselben Elementen entstandenen Differenzen $\xi_\alpha-\xi_\beta$ und $\xi_\beta-\xi_\alpha$ immer nur die eine auftritt. Aus den Gleichungen (16) folgen die Gleichungen

$$
(17)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\xi_1-\xi_2=2\Theta_2+2\Theta_3,\ \xi_1-\xi_3=2\Theta_1+2\Theta_3,\ \xi_1-\xi_4=2\Theta_1+2\Theta_2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\xi_2-\xi_3=2\Theta_1-2\Theta_2,\ \xi_2-\xi_4=2\Theta_1-2\Theta_3\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\xi_3-\xi_4=2\Theta_2-2\Theta_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Daher erhält das in Rede stehende Product $\Pi(\xi_\alpha-\xi_\beta)$ die Darstellung

$$
(18)\qquad \Pi(\xi_\alpha-\xi_\beta)=2^6(\Theta_1^2-\Theta_2^2)(\Theta_1^2-\Theta_3^2)(\Theta_2^2-\Theta_3^2).
$$

Wir werden dadurch auf die merkwürdige Erscheinung hingewiesen, dass das betreffende Differenzenproduct gleich dem Product aus der Zahl 2^6 in das Differenzenproduct der drei Wurzeln Θ_1^2, Θ_2^2, Θ_3^2 derjenigen cubischen Gleichung ist, durch deren Auflösung die Darstellung der Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 gewonnen ist, und die durch das Nullsetzen der obigen Function (9) entsteht. Das Differenzenproduct der Wurzeln einer

cubischen Gleichung ist aber nach der Formel (4) des § 52 gleich dem Product des Zahlenfactors $\pm 3\sqrt{3}\, i$ in die Differenz $\varphi^3 - \psi^3$ der beiden Wurzeln von derjenigen quadratischen Gleichung, von der die Lösung der cubischen Gleichung abhängt. Die Differenz der beiden Wurzeln der betreffenden quadratischen Gleichung ist endlich gleich dem doppelten Werthe der Quadratwurzel aus einer rationalen Verbindung der Coefficienten dieser quadratischen Gleichung. Also wird das aus den vier Ausdrücken ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 gebildete Differenzenproduct $\Pi(\xi_\alpha - \xi_\beta)$ gleich dem Product aus dem Zahlenfactor 2^6, dem Zahlenfactor $\pm 3\sqrt{3}\, i$, dem Zahlenfactor 2 und der Quadratwurzel aus der zuletzt bezeichneten Verbindung, die durch eine Reihenfolge von rationalen Operationen aus den Coefficienten der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ abzuleiten ist. Diese Verbindung erhält für beliebige Werthe dieser Coefficienten einen von Null verschiedenen Werth, und deshalb sind die gefundenen Ausdrücke ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, sobald die genannte Verbindung nicht verschwindet, von einander verschieden. Diese vier Ausdrücke repräsentiren also, wofern die in Rede stehende Verbindung nicht gleich Null ist, *die vier von einander verschiedenen Wurzeln der biquadratischen Gleichung* $f(\xi) = 0$, und vermitteln daher nach dem Satze (2) und der Gleichung (14) des § 43 *die Zerlegung der Function* $\frac{1}{a_0} f(x)$ *in vier Factoren des ersten Grades*

$$x^4 + \frac{a_1}{a_0} x^3 + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \frac{a_3}{a_0} x + \frac{a_4}{a_0} = (x - \xi_1)(x - \xi_2)(x - \xi_3)(x - \xi_4). \tag{19}$$

Auch hier findet eine Bemerkung ihren Platz, die in ähnlicher Weise für die Function des dritten Grades gemacht worden ist. Aus (19) folgen die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{a_1}{a_0} &= \Sigma_\alpha\, \xi_\alpha \\ \frac{a_2}{a_0} &= \Sigma_{\alpha,\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta \\ -\frac{a_3}{a_0} &= \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\, \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \\ \frac{a_4}{a_0} &= \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \end{aligned}\right. \tag{20}$$

unter derjenigen Voraussetzung, unter der die Zerlegung abgeleitet worden ist, dass nämlich die characterisirte Verbindung der Coefficienten der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$, deren von Null verschiedener Werth die Verschiedenheit der vier Ausdrücke $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ zur Folge hat, nicht gleich Null sei. Weil aber die Gleichungen (20) auch dann gültig bleiben, wenn jene Verbindung den Werth Null annimmt, so besitzt die in (19) ausgedrückte Zerlegung der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ und die zugehörige Darstellung der vier Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ eine unbedingte Gültigkeit.

§ 56. Discussion der Beschaffenheit der Wurzeln bei einer biquadratischen Gleichung, deren Coefficienten reell sind.

Sobald die *Coefficienten der Function des vierten Grades* $\frac{1}{a_0} f(x)$ *reelle Grössen* sind, so kann die zugeordnete Gleichung des vierten Grades $f(\xi) = 0$ vermöge § 47 nur entweder *vier reelle Wurzeln*, oder *zwei reelle und ein Paar von complexen conjugirten Wurzeln*, oder *zwei Paare von complexen conjugirten Wurzeln* haben. Die reelle Beschaffenheit der Coefficienten $\frac{1}{a_0} f(x)$ zieht die reelle Beschaffenheit der Coefficienten der Function $\frac{1}{c_0} \varphi(z)$, in welche $\frac{1}{a_0} f(x)$ transformirt worden ist, nach sich, und *die Criterien dafür, ob die Wurzeln einer gegebenen biquadratischen Gleichung mit reellen Coefficienten in die erste, zweite oder dritte Kategorie gehören,* sind von *der cubischen Gleichung* zu entnehmen, deren Wurzeln im vorigen § mit η_1, η_2, η_3, bezeichnet worden sind, und die aus dem *Nullsetzen der Function*

$$u^3 + \frac{b_2}{2} u^2 + \left(\frac{b_2^2}{16} - \frac{b_4}{4}\right) u - \frac{b_3^2}{64}$$

hervorgeht. Da die Grösse b_3 gegenwärtig reell angenommen ist, so kann das von u freie Glied $-\frac{b_3^2}{64}$ niemals einen positiven Werth haben, und muss, wenn wir in Uebereinstimmung mit einer im vorigen § gemachten Bemerkung von jetzt ab den

Werth $b_3 = 0$ ausschliessen, negativ sein. Das Glied $-\frac{b_3^2}{64}$ ist stets gleich dem negativ genommenen Product der drei Wurzeln η_1, η_2, η_3 der vorliegenden cubischen Gleichung. Wenn daher diese Gleichung *drei reelle Wurzeln* hat, so müssen dieselben, um ein Product von positivem Vorzeichen zu liefern, *entweder alle drei positiv sein*, *oder zwei derselben negativ, und eine positiv*; wenn jene Gleichung dagegen *eine reelle* und *zwei complexe conjugirte Wurzeln* hat, so muss die reelle Wurzel zugleich *positiv* sein; denn das Product der beiden complexen conjugirten Wurzeln ist gleich der gemeinsamen Norm derselben und deshalb stets positiv, und bei einer negativen reellen Wurzel würde das Product der drei Wurzeln negativ ausfallen, was mit der geltenden Voraussetzung im Widerspruche steht. Aus diesen Gründen hat die betreffende cubische Gleichung stets wenigstens *eine reelle und positive Wurzel*; nennen wir diese η_1, so ist Θ_1 immer eine *reelle Grösse*. Die gesuchte Entscheidung ergiebt sich nun folgendermassen:

Wenn η_1, η_2, η_3 sämmtlich positiv sind, so werden Θ_1, Θ_2, Θ_3 sämmtlich reell, und die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 alle reell.

Wenn η_1 positiv ist, dagegen η_2 und η_3 negativ und von einander verschieden sind, so werden Θ_2 und Θ_3 rein imaginär und nothwendig von einander verschieden, folglich die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung complex, und zwar wird nach der eingeführten Bezeichnung ξ_1 mit ξ_2 conjugirt, und ξ_3 mit ξ_4 conjugirt.

Wenn η_1 positiv ist, η_2 und η_3 negativ und einander gleich sind, so kommt ein Paar von complexen conjugirten, und ein Paar von einander gleichen reellen Wurzeln.

Wenn η_1 positiv ist, η_2 und η_3 complex und conjugirt sind, so können Θ_2 und Θ_3 so gewählt werden, dass sie einander ebenfalls conjugirt sind, und damit ist das Vorzeichen der reellen Grösse Θ_1 bestimmt. Dann werden in der eingeführten Bezeichnung ξ_1 und ξ_2 reelle, dagegen ξ_3 und ξ_4 complexe und conjugirte Grössen, so dass die biquadratische Gleichung zwei reelle und zwei complexe conjugirte Wurzeln erhält.

Ausserdem erlaubt die Gleichung (18) des vorigen § die Fol-

gerung, dass die Wurzeln der biquadratischen Gleichung ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 unter einander verschieden sind oder zwei einander gleiche enthalten, je nachdem die drei Wurzeln der zugehörigen cubischen Gleichung η_1, η_2, η_3 unter einander verschieden sind, oder zwei einander gleiche enthalten.

§ 57. Verbindungen der Wurzeln einer Gleichung des zweiten, dritten und vierten Grades, die eine bestimmte Beziehung zu der Auflösung der betreffenden Gleichung haben. Anzahl der Werthe dieser Verbindungen bei vollständiger Vertauschung der Wurzeln unter einander.

Nachdem die allgemeine Auflösung der Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades in der Weise entwickelt worden ist, dass die Wurzeln der betreffenden Gleichung mit Hülfe der Wurzeln von reinen Gleichungen dargestellt sind, gewährt es ein Interesse, nach einander die Wurzeln der Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades als gegeben zu betrachten, und durch die gegebenen Wurzeln die bei der Auflösung der zugehörigen Gleichung eingeführten Hülfsgrössen auszudrücken.

Die allgemeine Auflösung der *quadratischen Gleichung* ist in den Gleichungen (6) des § 28 enthalten

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{a_1}{2a_0}+\omega \\ \xi_2 &= -\frac{a_1}{2a_0}-\omega, \end{aligned}\right.$$

wo ω die Wurzel *einer reinen quadratischen Gleichung* bedeutet. Vermittelst der Addition und der Subtraction dieser Gleichungen werden $\frac{a_1}{a_0}$ und ω durch ξ_1 und ξ_2 folgendermassen ausgedrückt

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{a_1}{a_0} &= \xi_1+\xi_2 \\ 2\omega &= \xi_1-\xi_2. \end{aligned}\right.$$

Die erste dieser Gleichungen enthält den schon bekannten Satz, dass die *Summe der beiden Wurzeln*, die erste der in § 46 auftretenden *symmetrischen Verbindungen*, gleich dem negativ

genommenen Coefficienten $\frac{a_1}{a_0}$ ist. Die zweite Gleichung lehrt, dass der doppelte Werth der Grösse ω gleich der *Differenz der beiden Wurzeln* $\xi_1 - \xi_2$ ist. Nun sind die gegebenen Wurzeln einer Gleichung immer als unter einander gleichberechtigte Grössen aufzufassen. Man darf daher in den Gleichungen (1) mit den Wurzeln ξ_1 und ξ_2 die einzige Vertauschung vornehmen, deren zwei Grössen fähig sind, und ξ_1 mit ξ_2 verwechseln. Diese Verwechselung äussert sich bei der Darstellung von $\frac{a_1}{a_0}$ und ω in (2) auf die Weise, dass die Summe $\xi_1 + \xi_2$ als *symmetrische Verbindung* ungeändert bleibt, dass dagegen die Differenz $\xi_1 - \xi_2$ sich in die Differenz $-\xi_1 + \xi_2$, das heisst in den mit der negativen Einheit multiplicirten früheren Werth verwandelt. Wenn bei einer aus einer gegebenen Anzahl von Elementen gebildeten Verbindung, die wir uns als *eine rationale ganze Verbindung der Elemente* denken wollen, alle möglichen Vertauschungen der Elemente vorgenommen werden, und wenn die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe, welche die Verbindung hierbei annehmen kann, mit m bezeichnet wird, so heisst diese Verbindung *eine m-werthige Verbindung.* Nach dieser Definition wird jede *symmetrische Verbindung* der Elemente auch *eine einwerthige Verbindung* der Elemente genannt. Die *Differenz* $\xi_1 - \xi_2$ ist aber *eine zweiwerthige Verbindung*, bei welcher der eine Werth durch Multiplication mit der negativen Einheit in den anderen Werth übergeht. Durch diese *zweiwerthige Verbindung* $\xi_1 - \xi_2$ wird in (2) die Grösse $2\,\omega$ dargestellt.

Das *Quadrat der Verbindung* $\xi_1 - \xi_2$ kann nur *einwerthig* sein, da die positive wie die negative Einheit, auf das Quadrat erhoben, gleich der positiven Einheit ist. Bildet man daher die Gleichung

$$(3) \qquad 4\,\omega^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2,$$

so folgt aus derselben, dass $4\,\omega^2$ gleich einer *einwerthigen* oder *symmetrischen Verbindung* der Grössen ξ_1 und ξ_2 sein muss. Es ist aber ω die Wurzel einer reinen quadratischen Gleichung, und zwar hat ω^2 nach (7) des § 28 die Bestimmung

$$4\,\omega_2^2 = \frac{-4\,a_0 a_2 + a_1^2}{a_0^2}.$$

Folglich ist die symmetrische Verbindung $(\xi_1 - \xi_2)^2$ gleich dem vorstehenden rationalen ganzen Ausdrucke der Coefficienten der betreffenden quadratischen Gleichung

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 = \frac{-4\,a_0 a_2 + a_1^2}{a_0^2}. \tag{4}$$

Die allgemeine Auflösung der *cubischen Gleichung* wird durch die Gleichungen (21) des § 51 dargestellt, in denen ϱ eine nicht reelle dritte Wurzel der Einheit, φ eine dritte Wurzel aus einer gewissen Grössenverbindung, ψ ebenfalls eine dritte Wurzel aus einer gewissen Grössenverbindung bedeutet, ferner ψ mit φ durch die Gleichung $\varphi\,\psi = -\frac{b_2}{3}$ verbunden ist,

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{a_1}{3\,a_0} + \varphi + \psi \\ \xi_2 &= -\frac{a_1}{3\,a_0} + \varphi\,\varrho + \psi\varrho^2 \\ \xi_3 &= -\frac{a_1}{3\,a_0} + \varphi\,\varrho^2 + \psi\varrho \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Sobald diese drei Gleichungen zu einander addirt werden, so verschwindet sowohl der Factor von φ wie von ψ wegen der Gleichung $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$. Wenn die erste mit 1, die zweite mit ϱ^2, die dritte mit ϱ multiplicirt und hierauf die Addition vorgenommen wird, so wird der Factor von $-\frac{a_1}{3a_0}$ aus der angegebenen Ursache gleich Null, der Factor von ψ, da $1 + \varrho^2 + \varrho^4 = 1 + \varrho + \varrho^2$ ist, ebenfalls gleich Null, und der Factor von φ gleich der Zahl 3. Wenn die erste Gleichung mit 1, die zweite mit ϱ, die dritte mit ϱ^2 multiplicirt und dann die Addition ausgeführt wird, so verschwinden der Factor von $-\frac{a_1}{3a_0}$ und von φ, während der Factor von ψ den Werth 3 erhält. Man findet somit die drei Bestimmungen

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{a_1}{a_0} &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ 3\,\varphi &= \xi_1 + \varrho^2\xi_2 + \varrho\,\xi_3 \\ 3\,\psi &= \xi_1 + \varrho\,\xi_2 + \varrho^2\xi_3, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

von denen die erste die von früher her bekannte Eigenschaft

der *symmetrischen Verbindung* $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ ausspricht. Wir denken uns jetzt die 3 Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 auf alle Arten unter einander vertauscht, und untersuchen die Verwandlungen, welche dadurch bei der Verbindung $\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3$ hervorgerufen werden. Um einem Missverständniss vorzubeugen, erinnere ich hierbei daran, dass zwar für ϱ jede der beiden nicht rellen dritten Wurzeln der Einheit genommen werden darf, dass aber, nachdem eine bestimmte gewählt ist, während des Ganges der Betrachtung diese *eine* nothwendig beibehalten werden muss.

Man kann die sechs möglichen Permutationen von drei Elementen in der folgenden Weise hervorbringen. Es seien die drei Elemente etwa auf drei in einem Kreise liegende Plätze vertheilt, und man nehme mit denselben eine Permutation vor, bei der jedes Element an die Stelle des nächstfolgenden, das letzte an die Stelle des ersten rückt; eine solche Permutation heisst eine *cyclische Permutation.* Durch eine nochmalige Wiederholung dieser Permutation wird eine neue Anordnung erhalten; wendet man aber die Permutation ein drittes Mal an, so kehrt die ursprüngliche Anordnung wieder. Durch *cyclische Permutation derselben Anordnung von drei Elementen* werden also *drei verschiedene Anordnungen und nur diese* erzeugt. So entstehen aus der Anordnung ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur die folgenden

$$\begin{gathered} \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_1 \\ \xi_3,\ \xi_1,\ \xi_2. \end{gathered}$$

Nimmt man jetzt mit der ersten Anordnung eine Aenderung vor, welche nicht diesem Cyclus angehört, wählt also zum Beispiel die Permutation ξ_1, ξ_3, ξ_2, und wendet auf diese die cyclische Permutation an, so erhält man die drei Anordnungen eines zweiten Cyclus, welche von den drei Anordnungen des ersten Cyclus verschieden sind, und deshalb mit jenen zusammengenommen die 6 vorhandenen Permutationen erschöpfen.

Nach dieser Methode mögen die drei Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3 in der Verbindung $\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3$ permutirt werden. Durch cyclische Permutation kommen die Ausdrücke

$$\begin{gathered} \xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3 \\ \xi_2 + \varrho^2 \xi_3 + \varrho \xi_1 \\ \xi_3 + \varrho^2 \xi_1 + \varrho \xi_2. \end{gathered}$$

Durch Vertauschung der Elemente ξ_2 und ξ_3 und eine hierauf erfolgende cyclische Permutation ergeben sich die ferneren Ausdrücke

$$\begin{gathered} \xi_1 + \varrho^2 \ \xi_3 + \varrho \xi_2 \\ \xi_2 + \varrho^2 \ \xi_1 + \varrho \xi_3 \\ \xi_3 + \varrho^2 \ \xi_2 + \varrho \xi_1 . \end{gathered}$$

Diese sechs Ausdrücke sind sämmtlich von einander verschieden, und daher ist *die Verbindung* $\xi_1 + \varrho^2 \ \xi_2 + \varrho \xi_3$ *eine sechswerthige.* Allein zwischen den drei Ausdrücken des ersten Cyclus findet ein merkwürdiger Zusammenhang statt, und das gleiche gilt von den drei Ausdrücken des zweiten Cyclus. Die nicht reellen dritten Wurzeln der Einheit haben vermöge ihrer Definitionsgleichung $\varrho^3 = 1$ die Eigenschaft, dass in der Reihe der Potenzen

$$1, \varrho, \varrho^2, \varrho^3, \varrho^4, \varrho^5, \ldots$$

das vierte Glied dem ersten gleich ist, und dass von da ab sich die Glieder regelmässig wiederholen. Aus dieser Ursache können die drei Ausdrücke des ersten Cyclus so dargestellt werden

$$\begin{gathered} \xi_1 + \varrho^2 \ \xi_2 + \varrho \xi_3 \\ \varrho (\xi_1 + \varrho^2 \ \xi_2 + \varrho \xi_3) \\ \varrho^2 (\xi_1 + \varrho^2 \ \xi_2 + \varrho \xi_3), \end{gathered}$$

und die Ausdrücke des zweiten Cyclus, wie folgt,

$$\begin{gathered} \xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3 \\ \varrho^2 (\xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3) \\ \varrho (\xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3). \end{gathered}$$

Die Ausdrücke, welche aus der Verbindung $\xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3$ durch cyclische Vertauschung der Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3 hervorgehen, werden also auch dadurch erhalten, dass man die Verbindung beziehungsweise mit den drei dritten Wurzeln der Einheit

$$1, \varrho, \varrho^2$$

multiplicirt. Durch die Vertauschung der Elemente ξ_2 und ξ_3 geht die ursprüngliche Verbindung $\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3$, die in (6) den Werth 3φ ausdrückt, in diejenige Verbindung über, welche in (6) den Werth von 3ψ darstellt, und die Anwendung der cyclischen Permutation auf diese letztere Verbindung hat abermals dieselbe Wirkung, wie eine Multiplication mit den drei dritten Wurzeln der Einheit. Es fallen daher die sechs durch

alle möglichen Vertauschungen der Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3 aus der Verbindung $\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3$ abzuleitenden Ausdrücke mit denjenigen Ausdrücken zusammen, durch welche nach (6) respective die sechs Grössen

$$3\varphi,\ 3\varrho\varphi,\ 3\varrho^2\varphi;\ 3\psi,\ 3\varrho^2\psi,\ 3\varrho\psi$$

dargestellt werden. Jetzt lässt sich der Schluss ziehen, dass *der Cubus*

$$(7)\qquad (\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3)^3,$$

bei allen möglichen Vertauschungen der Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur *zwei von einander verschiedene Werthe* annehmen kann. Durch eine *cyclische Permutation* der Elemente bleibt der Cubus ungeändert, da zu der Basis nur eine dritte Wurzel der Einheit als Factor hinzutritt, und jede dritte Wurzel der Einheit durch die Erhebung auf den Cubus zur positiven Einheit wird. Durch die Vertauschung von ξ_2 mit ξ_3 geht dieser Cubus in den Cubus

$$(8)\qquad (\xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3)^3$$

über, welcher bei einer cyclischen Permutation sich ebenfalls nicht ändert. Offenbar wird durch (7) die Grösse $27\varphi^3$, durch (8) die Grösse $27\psi^3$ ausgedrückt.

Die Bestimmung der Grössen φ^3 und ψ^3 erfolgt in § 51 durch die Auflösung einer *quadratischen Gleichung*, welche man aufstellen kann, weil bekannt ist, dass die *Summe* $\varphi^3 + \psi^3$ gleich der Grösse $-b_3$, und dass das Product $\varphi\psi$, wie schon in dem gegenwärtigen § erwähnt worden, gleich der Grösse $-\frac{b_2}{3}$ sein muss. Nun liefert das Aggregat

$$(9)\qquad (\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3)^3 + (\xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3)^3$$

eine Darstellung der Summe $27\varphi^3 + 27\psi^3 = -27 b_3$, und das Product

$$(10)\qquad (\xi_1 + \varrho^2 \xi_2 + \varrho \xi_3)\,(\xi_1 + \varrho \xi_2 + \varrho^2 \xi_3)$$

eine Darstellung des Products $9\varphi\psi = -3b_2$. *Die Verbindungen* (9) *und* (10) *der Elemente* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *erweisen sich aber als einwerthig oder symmetrisch.* Denn in (9) bleibt bei einer cyclischen Permutation jeder Cubus ungeändert, und geht bei einer nicht cyclischen Permutation der eine Cubus wechselsweise in den anderen über. In (10) bewirkt eine cyclische Permutation, dass zu jedem der beiden Factoren eine dritte Wurzel der Einheit als Factor hinzukommt, jedoch so, dass das Product der beiden

dritten Wurzeln der Einheit immer gleich der positiven Einheit ist; eine nicht cyclische Permutation, wie die Permutation von ξ_2 mit ξ_3, bewirkt dagegen eine gegenseitige Verwandlung des einen Factors in den andern. Indem die Grössen b_2 und b_3 nach (20) des § 51 durch die Coefficienten der zugehörigen allgemeinen cubischen Gleichung ausgedrückt werden, erhalten die symmetrischen Verbindungen (9) und (10) die in Bezug auf die Coefficienten der Gleichung rationalen ganzen Ausdrücke

$$(11)\quad (\xi_1+\varrho^2\xi_2+\varrho\xi_3)^3+(\xi_1+\varrho\xi_2+\varrho^2\xi_3)^3 = -\frac{2a_1^3}{a_0^3}+\frac{9a_1a_2}{a_0^2}-\frac{27a_3}{a_0},$$

$$(12)\quad (\xi_1+\varrho^2\xi_2+\varrho\xi_3)(\xi_1+\varrho\xi_2+\varrho^2\xi_3) = \frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{3a_2}{a_0}.$$

Wir betrachten jetzt die allgemeine Auflösung der *biquadratischen Gleichung.* Die vier Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ werden durch die Gleichungen (16) des § 55 ausgedrückt, nämlich

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{a_1}{4a_0}+\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3 \\ \xi_2 &= -\frac{a_1}{4a_0}+\Theta_1-\Theta_2-\Theta_3 \\ \xi_3 &= -\frac{a_1}{4a_0}-\Theta_1+\Theta_2-\Theta_3 \\ \xi_4 &= -\frac{a_1}{4a_0}-\Theta_1-\Theta_2+\Theta_3, \end{aligned}\right.$$

wo $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ Quadratwurzeln aus bestimmten Grössenverbindungen sind, welche der Bedingung $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 = -\frac{b_3}{8}$ genügen. Um diese 4 Gleichungen nach den Unbekannten $\frac{a_1}{a_0}, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ aufzulösen, multipliciren wir dieselben der Reihe nach mit passend gewählten Factoren, und addiren sie hierauf. Die Factoren sind

erstens $+1, +1, +1, +1$,
zweitens $+1, +1, -1, -1$,
drittens $+1, -1, +1, -1$,
viertens $+1, -1, -1, +1$.

Dadurch entstehen die folgenden Resultate, von denen das erste wieder bekannt ist,

$$(14)\qquad \begin{cases} -\dfrac{a_1}{a_0} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \\ 4\Theta_1 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 \\ 4\Theta_2 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 \\ 4\Theta_3 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4. \end{cases}$$

Die Anzahl der sämmtlichen Permutationen, welche mit den vier Elementen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ gebildet werden können, beträgt nach der in § 46 angegebenen Regel vier und zwanzig. Die Verbindung $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$ bleibt aber ungeändert, wenn die beiden ersten Elemente verwechselt werden und wenn die beiden letzten Elemente verwechselt werden; dadurch fallen immer die Wirkungen von vier Permutationen zusammen und *diese Verbindung nimmt nur sechs von einander verschiedene Werthe an.*

Vier Elemente lassen sich auf dreierlei Art in zwei Paare abtheilen, und bei jeder von diesen Theilungen ist eine Vertauschung des einen Paares mit dem anderen möglich. Setzt man fest, dass bei den Elementen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Elemente des einen Paares mit dem positiven Zeichen, die Elemente des anderen Paares mit dem negativen Zeichen versehen und alle vier addirt werden, so entstehen die *sechs verschiedenen Ausdrücke*

$$\begin{array}{lll} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4, & \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4, & \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4, \\ -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, & -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4, & -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4, \end{array}$$

in welche die Verbindung $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$ überzugehen im Stande ist. Jeder in der zweiten Zeile befindliche Ausdruck wird aus dem darüber stehenden durch Multiplication mit der negativen Einheit hervorgebracht, und nach Massgabe der Gleichungen (14) dienen die sechs vorstehenden Ausdrücke beziehungsweise zu der Darstellung der sechs Grössen

$$\begin{array}{lll} 4\Theta_1, & 4\Theta_2, & 4\Theta_3 \\ -4\Theta_1, & -4\Theta_2, & -4\Theta_3. \end{array}$$

Da bei der Erhebung auf das Quadrat die negative Einheit zu der positiven Einheit wird, so ist *das Quadrat*

$$(15)\qquad (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2$$

eine *dreiwerthige Verbindung* der Elemente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Vermöge dieser Verbindung und ihrer unter einander differenten Permutationen werden die Grössen $16\Theta_1^2$, $16\Theta_2^2$, $16\Theta_3^2$ dargestellt.

Nun rührt die Bestimmung der Grössen $\Theta_1^2, \Theta_2^2, \Theta_3^2$ von den Gleichungen (7) des § 55 her; denn dieselben liefern die

Coefficienten derjenigen *cubischen Gleichung*, deren Wurzeln die Grössen $p^2 = \eta_1$, $q^2 = \eta_2$, $r^2 = \eta_3$ sind, während andererseits $\Theta_1^2 = \eta_1$, $\Theta_2^2 = \eta_2$, $\Theta_3^2 = \eta_3$ genommen ist. Es bestehen demnach für Θ_1, Θ_2, Θ_3 die Gleichungen

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 &= -\frac{b_2}{2} \\ \Theta_1^2\,\Theta_2^2 + \Theta_1^2\,\Theta_3^2 + \Theta_2^2\,\Theta_3^2 &= \frac{b_2^2}{16} - \frac{b_4}{4} \\ \Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 &= -\frac{b_3}{8}. \end{aligned} \right.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen werden durch die Elemente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ folgendermassen ausgedrückt

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} 16\,(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) &= (\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2 + (\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4)^2 \\ &\quad + (\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4)^2, \\ 256\,(\Theta_1^2\,\Theta_2^2 + \Theta_1^2\,\Theta_3^2 + \Theta_2^2\,\Theta_3^2) &= (\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2\,(\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4)^2 \\ &\quad + (\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2\,(\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4)^2 \\ &\quad + (\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4)^2\,(\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4)^2, \\ 64\,\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 &= (\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)\,(\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4)\,(\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4). \end{aligned} \right.$$

Bei den hier erscheinenden Verbindungen der Elemente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ tritt abermals die Eigenschaft hervor, *einwerthig* zu sein. Die rechte Seite der ersten Gleichung ist die *Summe der drei verschiedenen Werthe des Ausdruckes* $(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2$, die rechte Seite der zweiten Gleichung *die Summe aus den Producten von je zwei Werthen des Ausdruckes* $(\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^2$; hier sind nur diejenigen Permutationen von Bedeutung, durch welche die vorkommenden *Quadrate* eine Aenderung erfahren, und zwar wird, indem man für die Zeiger 1, 2, 3, 4 successive die Zeiger 1, 3, 4, 2 und die Zeiger 1, 4, 2, 3 einsetzt,

$\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$ in $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4$, dann in $\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4$
$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4$ in $\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4$, dann in $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$
$\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4$ in $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$, dann in $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4$

verwandelt, so dass jene beiden Summen ungeändert bleiben müssen. Die rechte Seite der letzten Gleichung behält für die so eben bezeichneten Permutationen ihren Werth, indem von den drei Factoren jeder in den nächstfolgenden und der letzte in den ersten übergeht. Die Permutationen aber, bei welchen die auftretenden Quadrate ungeändert bleiben, üben auf das

Product deshalb keinen Einfluss, weil vermöge derselben von den drei Factoren immer zwei zugleich in den entgegengesetzten Werth übergehen, während der dritte Factor sich nicht ändert. Die aus den Elementen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ gebildeten in Rede stehenden symmetrischen Verbindungen können als rationale ganze Ausdrücke der Coefficienten der betreffenden biquadratischen Gleichung dargestellt werden, indem man in die obigen Gleichungen (16) die aus (15) des § 55 entnommenen Ausdrücke von b_2, b_3, b_4 einführt. Das Ergebniss hievon sind die folgenden Gleichungen

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
2^4(\Theta_1^2+\Theta_2^2+\Theta_3^2) &= \frac{3a_1^2}{a_0^2}-\frac{8a_2}{a_0}\\
2^8(\Theta_1^2\Theta_2^2+\Theta_1^2\Theta_3^2+\Theta_2^2\Theta_3^2) &= \frac{3a_1^4}{a_0^4}-\frac{16a_1^2a_2}{a_0^3}+\frac{16a_1a_3}{a_0^2}\\
&\quad+\frac{16a_2^2}{a_0^2}-\frac{64a_4}{a_0}\\
2^6\,\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_3 &= -\frac{a_1^3}{a_0^3}+\frac{4a_1a_2}{a_0^3}-\frac{8a_3}{a_0},
\end{aligned}
\right.
$$

welche mit den obigen Gleichungen (14) vereinigt werden müssen.

§ 58. Darstellbarkeit der rationalen ganzen symmetrischen Verbindungen von n Elementen durch n symmetrische Grundverbindungen.

Bei der im vorigen § angestellten Erörterung der Auflösungen von den Gleichungen des zweiten bis vierten Grades ist die Beobachtung gemacht worden, dass die auftretenden aus den Wurzeln einer Gleichung gebildeten symmetrischen Verbindungen als rationale ganze Ausdrücke von den Coefficienten der betreffenden Gleichung darstellbar sind. Die Coefficienten der Gleichung sind aber, wie zuerst in § 46 hervorgehoben ist, mit abwechselnden Vorzeichen genommen, gleich den symmetrischen Grundverbindungen, nämlich gleich der Summe der Wurzeln, der Summe aus den Producten von je zwei Wurzeln u. s. f. In der That haben wir es hier mit einem Satze zu thun, der sich auf die symmetrischen Functionen von beliebig vielen Elementen bezieht und der folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Jede algebraische rationale ganze symmetrische Verbindung von n Elementen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ kann als ein rationaler ganzer Aus-

druck der n symmetrischen Grundverbindungen, der Summe der Elemente $\Sigma_\alpha \xi_{\alpha}$, der Summe der Producte von je zwei Elementen $\Sigma_{\alpha,\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta$ u. s. f. *bis zu dem Product aller Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, dargestellt werden, und zwar nur auf eine einzige Weise.*

Jede gegebene rationale ganze symmetrische Verbindung σ der n Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ist gleich einem Aggregat einer endlichen Zahl von Gliedern von der folgenden Gestalt

$$\sigma = M \xi_1^\lambda\, \xi_2^\mu\, \xi_3^\nu \ldots \xi_n^\omega + M' \xi_1^{\lambda'}\, \xi_2^{\mu'}\, \xi_3^{\nu'} \ldots \xi_n^{\omega'} + \ldots \tag{1}$$

wo die Exponenten $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \lambda', \mu', \nu' \ldots$ positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null sind, und $M, M', \ldots$ Coefficienten bedeuten, die von den Elementen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ nicht abhängen. Man stellt sich vor, dass die Glieder des gegebenen Aggregats, welche sich nur in Betreff der Coefficienten unterscheiden, immer durch Addition zu einem Gliede vereinigt sind, so dass für je zwei Glieder der vorliegenden Darstellung (1) nicht gleichzeitig die Gleichungen $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu', \ldots$ bestehen.

Wir wollen nun ein Princip aufstellen, nach welchem die einzelnen Glieder geordnet werden können. Den Elementen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ werde eine gewisse Reihenfolge gegeben, welche durch die Reihenfolge der Zeiger $1, 2, \ldots n$ ausgedrückt sein möge. Bei zwei verschiedenen Gliedern werde dann zuerst derjenige Exponent verglichen, mit welchem in denselben das erste Element ξ_1 behaftet ist; wenn einer der beiden Exponenten λ und λ' grösser ist, so möge dem betreffenden Gliede eine höhere Ordnung zukommen. Wenn dagegen $\lambda = \lambda'$ ist, so werde der Exponent verglichen, zu dem in den beiden Gliedern das zweite Element erhoben ist; wofern einer von diesen beiden Exponenten μ und μ' den anderen übertrifft, so möge wieder das betreffende Glied das Glied der höheren Ordnung genannt werden. Auf diese Weise ist so lange fortzufahren, bis man in den beiden zu vergleichenden Gliedern auf zwei Exponenten desselben Elements kommt, die einander nicht gleich sind. Von den beiden Gliedern $M \xi_1^\lambda\, \xi_2^\mu\, \xi_3^\nu \ldots$ und $M' \xi_1^{\lambda'}\, \xi_2^{\mu'}\, \xi_3^{\nu'} \ldots$ heisst also das erste das Glied der höheren Ordnung, wofern entweder $\lambda > \lambda'$, oder $\lambda = \lambda'$ und $\mu > \mu'$, oder $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$ und $\nu > \nu'$ ist, u. s. f. Da nun für zwei verschiedene Glieder des vorliegenden

Aggregats nicht die sämmtlichen Gleichungen $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$,.. erfüllt sein dürfen, so gehören nach dem angegebenen Princip alle verschiedenen Glieder des Aggregats zu verschiedenen Ordnungen.

Dieses Princip ist, wie man sieht, auf jeden rationalen ganzen Ausdruck gegebener Elemente anwendbar, und fällt bei einem Ausdrucke, der nur *ein* Element enthält, mit der Ordnung nach den Potenzen dieses Elements zusammen, welche für die *rationalen ganzen Functionen einer Variable* in § 23 eingeführt und seitdem beibehalten ist. Gebraucht man das Princip bei zwei rationalen ganzen Ausdrücken gegebener Elemente, multiplicirt diese Ausdrücke mit einander und ordnet das Product nach demselben Princip, so zeigt sich durch eine einfache Ueberlegung, dass die Glieder der höchsten Ordnung, die in jedem der beiden Ausdrücke vorkommen, mit einander multiplicirt, das Glied der höchsten Ordnung hervorbringen, dass in dem gebildeten Product auftritt. Desgleichen, wenn mehrere rationale ganze Ausdrücke derselben Elemente mit einander multiplicirt werden, erzeugen die Glieder der höchsten Ordnung, die in den einzelnen rationalen ganzen Ausdrücken vorhanden sind, durch Multiplication das Glied der höchsten Ordnung, welches in dem aus der Multiplication der einzelnen rationalen ganzen Ausdrücke entstandenen Producte vorkommt.

Die Eigenschaft eines rationalen ganzen Ausdruckes gegebener Elemente, in Bezug auf diese Elemente *symmetrisch* zu sein, zieht eine besondere Beschaffenheit des Gliedes der höchsten Ordnung nach sich, welches in dem Ausdrucke enthalten ist. Es sei in dem symmetrischen Ausdrucke σ das Glied der höchsten Ordnung

$$M\, \xi_1^{\lambda}\, \xi_2^{\mu}\, \xi_3^{\nu} \dots \xi_n^{\omega}, \tag{2}$$

dann gilt für die Exponenten λ, μ, ν, .. ω das Gesetz, dass jeder Exponent den folgenden übertreffen oder ihm wenigstens gleich sein muss. Der Grund hievon ist leicht einzusehen. Da sich der Ausdruck σ bei keiner möglichen Vertauschung der Elemente $\xi_1, \xi_2, .. \xi_n$ ändern darf, so müssen in dem Aggregate von Gliedern, aus dem σ besteht, auch alle diejenigen Glieder enthalten sein, die aus dem Gliede der höchsten Ordnung durch irgend eine Ver-

tauschung der Elemente entstehen. Gesetzt nun, es wäre in (2) der Exponent λ kleiner als der Exponent μ. Jetzt muss in σ auch dasjenige Glied vorkommen, welches aus dem Gliede $M\,\xi_1^\lambda\,\xi_2^\mu\,\xi_3^\nu\ldots\xi_n^\omega$ durch Vertauschung der beiden Elemente ξ_1 und ξ_2 hervorgeht. Dies ist das Glied $M\,\xi_1^\mu\,\xi_2^\lambda\,\xi_3^\nu\ldots\xi_n^\omega$. Wofern aber λ kleiner wäre als μ, so würde das Glied $M\,\xi_1^\lambda\,\xi_2^\mu\,\xi_3^\nu\ldots\xi_n^\omega$ von niedrigerer Ordnung sein, als jenes, und das widerspricht der bestehenden Voraussetzung, dass $M\,\xi_1^\lambda\,\xi_2^\mu\,\xi_3^\nu\ldots\xi_n^\omega$ das Glied der höchsten Ordnung sei. Darum ist die Annahme, dass λ kleiner sei als μ, unzulässig. Ein ähnlicher Widerspruch ergibt sich, wenn angenommen wird, dass zwar $\lambda \geqq \mu$, dagegen $\mu < \nu$ sei. Denn alsdann würde das nothwendig in σ enthaltene Glied $M\,\xi_1^\lambda\,\xi_2^\nu\,\xi_3^\mu\ldots\xi_n^\omega$, welches aus dem Gliede $M\,\xi_1^\lambda\,\xi_2^\mu\,\xi_3^\nu\ldots\xi_n^\omega$ durch Vertauschung der Elemente ξ_2 und ξ_3 entsteht, von höherer Ordnung sein, als das Glied der höchsten Ordnung $M\,\xi_1^\lambda\,\xi_2^\mu\,\xi_3^\nu\ldots\xi_n^\omega$. Das Gleiche gilt von jeder Annahme, welche dem aufgestellten Gesetze zuwider läuft, so dass dasselbe vollständig bewiesen ist.

Wenn man jetzt aus den Exponenten $\lambda, \mu, \nu, \ldots \omega$ des in dem Ausdrucke σ vorkommenden Gliedes der höchsten Ordnung die Differenzen bildet, und die Reihe der Differenzen mit dem Exponenten ω von ξ_n schliesst,

$$\lambda - \mu,\ \mu - \nu, \ldots \omega,$$

so muss jede dieser Zahlen entweder positiv oder gleich Null sein, und man kann jenes Glied (2) folgendermassen darstellen

$$M\,\xi_1^{\lambda-\mu}\,(\xi_1\,\xi_2)^{\mu-\nu}\ldots(\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n)^\omega.$$

Betrachten wir die symmetrischen Grundverbindungen

$$\Sigma_\alpha\,\xi_\alpha,\ \Sigma_{\alpha,\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_\beta, \ldots \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n,$$

so sind die Glieder der höchsten Ordnung, welche in demselben auftreten, nach der Reihe die folgenden

$$\xi_1,\ \xi_1\,\xi_2,\ \xi_1\,\xi_2\,\xi_3, \ldots, \xi_1\,\xi_2\ldots\xi_n.$$

Wenn man daher den Coefficienten M, die zu der nicht negativen ganzen Potenz des Grades $\lambda - \mu$ erhobene Verbindung $\Sigma_\alpha\,\xi_\alpha$, die zu der nicht negativen ganzen $(\mu - \nu)$ten Potenz

erhobene Verbindung $\Sigma_{\alpha,\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_\beta$, u. s. f. bis zu der nicht negativen ganzen ωten Potenz der Verbindung $\xi_1\,\xi_2\,..\,\xi_n$, zu einem Producte vereinigt,

$$(3)\qquad p = M(\Sigma_\alpha\,\xi_\alpha)^{\lambda-\mu}\,(\Sigma_{\alpha,\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_\beta)^{\mu-\nu}\,..\,(\xi_1\,\xi_2\,..\,\xi_n)^{\omega},$$

so ist dasselbe ein aus den n symmetrischen Grundverbindungen gebildeter rationaler ganzer Ausdruck, und zugleich eine symmetrische Verbindung der n Elemente $\xi_1,..\,\xi_n$, bei der nach einer vorhin gemachten Bemerkung das Glied der höchsten Ordnung dem Gliede der höchsten Ordnung, das in σ vorkommt, gleich ist. Wird daher die Differenz $\sigma - p$ genommen, so fällt in derselben jenes Glied der höchsten Ordnung fort. Die Differenz $\sigma - p$ ist also eine symmetrische Verbindung der n Elemente $\xi_1, \xi_2, ..\,\xi_n$, in welcher nur Glieder vorkommen, deren Ordnung niedriger ist, als die Ordnung des in σ befindlichen Gliedes der höchsten Ordnung.

Das Glied der höchsten Ordnung, welches in der symmetrischen Verbindung $\sigma - p$ enthalten ist, sei

$$(4)\qquad M_1\,\xi_1^{\lambda_1}\,\xi_2^{\mu_1}\,\xi_3^{\nu_1}\ldots\xi_n^{\omega_1}.$$

Dasselbe muss, wie aus dem eben Gesagten folgt, von niedrigerer Ordnung sein als das Glied der höchsten Ordnung (2) in der Verbindung σ; es muss ferner in seinen Exponenten das Gesetz befolgen, welches wir für die Exponenten eines Gliedes der höchsten Ordnung, das in einer symmetrischen Verbindung vorhanden ist, nachgewiesen haben, so dass von den ganzen Zahlen

$$\lambda_1 - \mu_1,\ \mu_1 - \nu_1, \ldots, \omega_1$$

keine negativ ist. Man kann demnach das Product aufstellen

$$(5)\qquad p_1 = M_1\,(\Sigma_\alpha\,\xi_\alpha)^{\lambda_1-\mu_1}\,(\Sigma_{\alpha,\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_\beta)\,..\,(\xi_1\,\xi_2\,..\,\xi_n)^{\omega_1},$$

welches ein rationaler ganzer Ausdruck in Bezug auf die n symmetrischen Grundverbindungen und eine symmetrische Verbindung der n Elemente ist, die dasselbe Glied der höchsten Ordnung hat, wie die Verbindung $\sigma - p$. Vermöge dessen enthält die aus $\sigma - p$ durch Subtraction von p_1 hervorgehende symmetrische Verbindung $\sigma - p - p_1$ nur solche Glieder, die von niedrigerer Ordnung sind, als das Glied (4), welches in der Verbindung $\sigma - p$ die höchste Ordnung vertritt.

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen, indem man nach einander immer neue Producte aus den auftretenden Coefficienten und bestimmten positiven Potenzen der n symmetrischen Grundverbindungen bildet, die $p_2, p_3, \ldots$ genannt werden mögen, und dasselbe erreicht nothwendig nach einer bestimmten Zahl von Wiederholungen sein Ende. Denn das höchste Glied in der Verbindung p_1 ist von niedrigerer Ordnung, als das höchste Glied in p, und überhaupt folgen die Ordnungen der höchsten Glieder, welche in $p, p_1, p_2, \ldots$ vorkommen, einander in absteigender Reihe. Die Anzahl von Gliedern, die in einer symmetrischen Verbindung die höchste Ordnung einnehmen können, und deren Ordnung zugleich niedriger ist, als die Ordnung eines bestimmten Gliedes dieser Art, ist aber eine beschränkte. In einem Gliede, welches in einer symmetrischen Verbindung die höchste Ordnung einnehmen kann, darf, wie wir gesehen haben, der Exponent von ξ_1 von keinem der übrigen Exponenten übertroffen werden; damit ein solches Glied von niedrigerer Ordnung sei, als das höchste in der Verbindung σ vorkommende Glied (2), in welchem die Exponenten von $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ ebenfalls nicht grösser sein dürfen, als der Exponent λ von ξ_1, ist es unmöglich, dass in dem betreffenden Gliede irgend ein Exponent einen Werth habe, der über λ liegt. Weil daher in einem solchen Grade die sämmtlichen Exponenten aus der Reihe der ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots \lambda$ genommen sein müssen, so kann die Anzahl der Glieder dieser Art, die in einer symmetrischen Verbindung die höchste Ordnung einzunehmen vermögen und von niedrigerer Ordnung sind, als das Glied (2), nicht über eine feste Grenze hinausgehen. Die Verbindung σ wird deshalb durch die aufeinander folgende Subtraction der Ausdrücke $p, p_1, p_2, \ldots$ zuletzt erschöpft, und man gelangt zu der Darstellung

$$(6) \qquad \sigma = p + p_1 + p_2 + \ldots,$$

durch welche der erste Theil des aufgestellten Satzes erwiesen ist.

Dem Beweise des zweiten Theiles, welcher die Behauptung enthält, *dass eine Darstellung der gegebenen symmetrischen Verbindung σ als rationaler ganzer Ausdruck der n symmetrischen Grundverbindungen nur auf eine einzige Weise ausgeführt werden könne*, ist ein Hülfssatz voranzuschicken. Durch den Satz (3)

des § 43 ist festgestellt worden, dass, wenn eine rationale ganze Function des $n$ten Grades einer Variable x für mehr als n von einander verschiedene Werthe von x verschwindet, die sämmtlichen Coefficienten der Function gleich Null sein müssen. Dieser Satz lässt sich auf rationale ganze Functionen von zwei, drei und beliebig vielen Variabeln ausdehnen. Es ist schon angedeutet worden, dass das in dem gegenwärtigen § entwickelte Princip brauchbar ist, um die Glieder einer jeden rationalen ganzen Function von beliebig vielen Variabeln $x, y, z, ..$ zu ordnen. Eine solche Function $f(x, y, z, ..)$ kann aber auch in der Weise geordnet werden, dass man zuerst nur auf eine Variable, etwa die Variable x, Rücksicht nimmt, alle diejenigen Glieder zusammenfasst, welche in dieselbe Potenz von x multiplicirt sind, und die betreffenden Ausdrücke nach der absteigenden Reihenfolge der Potenzen von x aneinander fügt. So ergiebt sich die Darstellung

$$f(x, y, z, ..) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + .. + A_n,$$

in welcher die Ausdrücke $A_0, A_1, .. A_n$ rationale ganze Functionen der Variablen $y, z, ..$ sind, die Variable x jedoch nicht enthalten. Jede einzelne dieser Functionen lässt sich in derselben Weise nach den Potenzen einer zweiten Variable, zum Beispiel der Variable y, ordnen, wodurch die Darstellungen

$$A_0 = A_{0,0} y^{m_0} + A_{0,1} y^{m_0-1} + .. + A_{0,m_0}$$

$$A_1 = A_{1,0} y^{m_1} + A_{1,1} y^{m_1-1} + .. + A_{1,m_1}$$

$$A_n = A_{n,1} y^{m_n} + A_{n,1} y^{m_n-1} + .. + A_{n,m_n}$$

entstehen, in denen die Factoren der Potenzen von y nur die Variabeln $z, ..$ aber weder x noch y enthalten. Und so kann man fortfahren, bis man zu Ausdrücken gelangt, die nach den Potenzen der letzten Variable geordnet sind und bei denen die Coefficienten von keiner der Variabeln $x, y, z, ..$ abhängen. Da die anzustellende Betrachtung durch die Vergrösserung der Anzahl der Variabeln in keinem wesentlichen Stücke geändert wird, so möge von jetzt ab angenommen werden, dass in der gegebenen Function nur die beiden Variabeln x und y vorhanden sind; dann werden die Grössen $A_{0,0}, .. A_{0,m_0}; A_{n,0}, .. A_{n,m_n}$ von den Variabeln x und y unabhängig, und repräsentiren die

Coefficienten, mit denen in der gegebenen Function $f(x, y)$ die verschiedenen Producte der Potenzen von x und von y multiplicirt sind.

Es sei m die grösseste unter den Zahlen $m_0, m_1 \dots m_n$, welche den Grad der Functionen $A_0, A_1, \dots A_n$ in Bezug auf die Variable y ausdrücken. Wenn nun mit $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n+1}$ eine Reihe von $n+1$ *verschiedenen Werthen* der Variable x, und mit $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{m+1}$ eine Reihe von $m+1$ *verschiedenen Werthen* der Variable y bezeichnet, und zugleich vorausgesetzt wird, dass die gegebene Function $f(x, y)$ für *jede Combination von einem dieser Werthe für x und einem dieser Werthe für y* gleich Null sei, so lässt sich zeigen, dass die sämmtlichen Coefficienten $A_{0,0}, \dots A_{0,m_0}; \dots A_{n,0}, \dots A_{n,m_n}$ gleich Null sein müssen. Legt man nämlich der Variable y einen bestimmten der vorgeschriebenen Werthe η_1, und gleichzeitig der Variable x successive die Werthe $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n+1}$ bei, so wird die Function $f(x, y)$ nach der Voransetzung immer gleich Null. Dieselbe lässt sich alsdann, weil y stets denselben Werth η_1 erhalten hat, als eine Function der Variable x vom $n$ten Grade auffassen, und es müssen bei derselben vermöge des erwähnten Satzes die Factoren der sämmtlichen Potenzen von x gleich Null sein. Dies sind die Functionen $A_0, A_1, \dots A_n$, in denen für y der besondere Werth η_1 substituirt ist. Dieselbe Schlussweise ist gültig, wenn mit einem anderen bestimmten der Werthe $\eta_2, \eta_3 \dots \eta_{m+1}$ ebenso verfahren wird, wie mit dem Werthe η_1 geschehen ist. Daher müssen die Functionen $A_0, A_1, \dots A_n$ sowohl bei der Substitution $y = \eta_1$, wie auch bei der Substitution der übrigen bezeichneten Werthe von y verschwinden. Weil aber die Werthe $\eta_1, \eta_1, \dots \eta_{m+1}$ nach der Voraussetzung sämmtlich unter einander verschieden sind, und weil ferner m gleich der grössesten Zahl unter den Zahlen $m_0, m_1, \dots m_n$ ist, die den Grad jener Functionen in Bezug auf die Variable y messen, so müssen nach dem so eben angewendeten Satze in jeder dieser Functionen die sämmtlichen Coefficienten verschwinden, mithin werden die sämmtlichen Coefficienten der Function $f(x, y)$ gleich Null, und das war gerade behauptet worden.

Es leuchtet ein, dass, wenn die gegebene Function $f(x, y)$

für ein *unbestimmtes* x und ein *unbestimmtes* y gleich Null ist, auf beliebige Art $n+1$ verschiedene Werthe des x und $m+1$ verschiedene Werthe des y aufgestellt werden können, für deren sämmtliche Combinationen $f(x, y)$ gleich Null wird. Auch hat das Uebertragen der Beweisführung auf eine rationale ganze Function von drei und mehr Variabeln keine Schwierigkeit. Man darf daher den Satz formuliren, *dass, wenn eine rationale ganze Function von beliebig vielen Variabeln $f(x, y, z, \ldots)$ für unbestimmte Werthe der Variabeln verschwindet, die sämmtlichen Coefficienten der verschiedenen Producte aus den Potenzen der Variablen nothwendig gleich Null sind.*

Um mit Benutzung dieses Satzes die vorhin aufgestellte Behauptung zu rechtfertigen, werde angenommen, dass die gegebene symmetrische Verbindung σ auf zwei verschiedene Arten als rationaler ganzer Ausdruck der n symmetrischen Grundverbindungen dargestellt sei. Der eine dieser Ausdrücke werde s, der andere s' genannt. Jeder von beiden ist ein Aggregat von Bestandtheilen, die aus der Multiplication von den Producten der Potenzen der n symmetrischen Grundverbindungen in unabhängige Coefficienten hervorgehen. Wenn daher die Differenz $s - s'$ gebildet wird, so muss dieselbe, da s von s' verschieden sein soll, ein rationaler ganzer Ausdruck der n symmetrischen Grundverbindungen, das heisst ein Aggregat von Bestandtheilen der bezeichneten Beschaffenheit sein, bei dem nach vollständiger Zusammenfassung aller gleichartigen Bestandtheile nicht alle Coefficienten verschwinden. Demnach sind in dem Ausdrucke

$$(7) \qquad s - s' = \mathfrak{M}(\Sigma_\alpha \xi_\alpha)^{\mathfrak{a}} (\Sigma_{\alpha,\beta} \xi_\alpha \xi_\beta)^{\mathfrak{b}} \ldots (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n)^{\mathfrak{k}} + \ldots$$

die Coefficienten $\mathfrak{M}, \ldots$ als nicht verschwindende Grössen und die einzelnen Bestandtheile als unter einander verschieden vorauszusetzen. Es müsste nun die rechte Seite von (7), wenn die getroffene Annahme zulässig wäre, dass für die symmetrische Verbindung σ die beiden verschiedenen Darstellungen s und s' existiren, die Eigenschaft haben zu verschwinden, sobald die angedeuteten Producte von Potenzen der symmetrischen Grundverbindungen ausgeführt werden, und zwar könnte dies in Folge des soeben bewiesenen Hülfssatzes, da die Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

vollkommen unbestimmt bleiben, nicht anders geschehen, als indem nach vollendeter Rechnung die sämmtlichen Coefficienten der verschiedenen Producte aus den Potenzen der Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_n gleich Null werden. Sobald aber die einzelnen Bestandtheile der rechten Seite von (7) entwickelt und nach dem für die symmetrischen Verbindungen eingeführten Princip geordnet werden, so lassen sich vermöge der angegebenen Vorschriften die aus jedem Bestandtheil hervorgehenden Glieder der höchsten Ordnung leicht bezeichnen. Der erste Bestandtheil erzeugt das Glied der höchsten Ordnung

$$\mathfrak{M}\,\xi_1^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\cdots+\mathfrak{k}}\,\xi_2^{\mathfrak{b}+\cdots+\mathfrak{k}}\cdots\xi_n^{\mathfrak{k}}, \tag{8}$$

und die übrigen Bestandtheile bringen entsprechend gebildete Glieder der höchsten Ordnung hervor. Alle diese Glieder der höchsten Ordnung müssen in Bezug auf die Reihe der Exponenten, zu denen die Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ erhoben sind, differiren. Denn sollte für ein anderes von diesen Gliedern der höchsten Ordnung

$$\mathfrak{M}'\,\xi_1^{\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\cdots\mathfrak{k}'}\,\xi_2^{\mathfrak{b}'+\cdots+\mathfrak{k}'}\cdots\xi_n^{\mathfrak{k}'}$$

und für das zuerst genannte Glied (8) eine Uebereinstimmung aller Exponenten bestehen, so wäre nothwendig auch

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}=\mathfrak{b}'.\ .\ .\ \mathfrak{k}=\mathfrak{k}',$$

und dies widerspräche der Bedingung, dass auf der rechten Seite von (7) nur noch verschiedene Bestandtheile vorkommen. Unter den in Rede stehenden von einander verschiedenen Gliedern der höchsten Ordnung muss somit *ein* Glied eine Ordnung haben, welche die Ordnung der übrigen übertrifft. Es sei dies etwa das Glied (8). Dann ist dieses Glied erstens von höherer Ordnung als die sämmtlichen übrigen Glieder, die aus der Entwickelung des zugeordneten ersten Bestandtheiles hervorgehen, und zweitens von höherer Ordnung, als die sämmtlichen Glieder, die aus der Entwickelung der sämmtlichen übrigen Bestandtheile entstehen. Wenn daher nach Vollendung aller Entwickelungen die Coefficienten der gleichnamigen Producte der Potenzen von $\xi_1, \ldots \xi_n$ überall addirt werden, so bleibt das Glied (8) für sich allein. Damit $s - s' = 0$ sei, müssen, wie bemerkt worden, die sämmtlichen Coefficienten der verschiedenen Producte aus den Po-

tenzen der Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ gleich Null werden, und deshalb auch jener Coefficient $\mathfrak{M}$. Andererseits war vorausgesetzt worden, dass derselbe eine von Null verschiedene Grösse sei. Wir gelangen daher durch die getroffene Annahme, dass es für die symmetrische Verbindung σ zwei von einander verschiedene Darstellungen s und s' geben könne, zu einem Widerspruch und erkennen daraus, dass diese Annahme unstatthaft und die entgegenstehende Behauptung richtig ist.

Die Methode, welche vorhin benutzt worden ist, um eine symmetrische Verbindung σ als rationalen ganzen Ausdruck der n symmetrischen Grundverbindungen darzustellen, gewährt die Einsicht in eine merkwürdige Eigenschaft des betreffenden Ausdruckes. Die zur Anwendung kommenden Operationen lassen keinen Zweifel darüber, dass die in dem gefundenen Ausdrucke auftretenden Coefficienten, mit denen die Producte der Potenzen der n symmetrischen Grundverbindungen multiplicirt sind, sich aus den in der symmetrischen Verbindung σ vorhandenen Coefficienten, mit denen die Producte der Potenzen der n Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ multiplicirt sind, so zusammensetzen, dass die erstern Coefficienten entstehen, indem die letztern Coefficienten mit positiven oder negativen ganzen Zahlen multiplicirt und dann addirt werden. Da nun, wie soeben bewiesen ist, die bezügliche Darstellung einer symmetrischen Verbindung der gegebenen Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ nur auf eine einzige Weise bewerkstelligt werden kann, so kommt die hervorgehobene Eigenschaft einer solchen Darstellung an sich zu, auf welchem Wege diese Darstellung auch gefunden sein möge.

§ 59. Beispiele zu dem vorigen §. Differenzenproduct der gegebenen Wurzeln einer Gleichung. Discriminante einer Gleichung.

Der abstracte Charakter der im vorigen § gebrauchten Schlüsse macht es wünschenswerth, das erörterte Verfahren zur Darstellung einer symmetrischen Verbindung von n Elementen durch die n symmetrischen Grundverbindungen an einigen einfachen Beispielen durchzugehen. Es sei die Zahl n der Elemente gleich *zwei*, und man habe die symmetrische Verbindung

(1) $$\sigma = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Das höchste Glied ist hier das Glied ξ_1^2; mithin muss der Ausdruck gebildet werden

(2) $$p = (\xi_1 + \xi_2)^2.$$

Hieraus folgt die Differenz

$$\sigma - p = -2\,\xi_1\,\xi_2,$$

deren einziges Glied von niedrigerer Ordnung, als das Glied ξ_1^2 ist. Zugleich ist $\xi_1\,\xi_2$ eine symmetrische Grundverbindung der Elemente ξ_1 und ξ_2, mithin

(3) $$p_1 = -2\,(\xi_1\,\xi_2).$$

Die gesuchte Darstellung der symmetrischen Verbindung $\xi_1^2 + \xi_2^2$ wird daher durch die Gleichung

(4) $$\xi_1^2 + \xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 - 2\,(\xi_1\,\xi_2)$$

geliefert. Wenn man sich ξ_1 und ξ_2 als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung denkt, und die symmetrischen Grundverbindungen nach (4) des § 46 durch die Coefficienten der Gleichung ersetzt, so kommt das Resultat

(4*) $$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

Es sei zweitens die Zahl n der Elemente gleich *drei*, und die symmetrische Verbindung gegeben

(5) $$\sigma = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3.$$

Wegen des höchsten Gliedes ξ_1^3 ist zuerst der Ausdruck aufzustellen

(6) $$p = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^3.$$

Demnach wird

$$\sigma - p = -3(\xi_1^2\,\xi_2 + \xi_1^2\,\xi_3 + \xi_1\,\xi_2^2) - 3(\xi_1\,\xi_3^2 + \xi_2^2\,\xi_3 + \xi_2\,\xi_3^2) - 6\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3.$$

Das hier vorhandene höchste Glied $-3\,\xi_1^2\,\xi_2$ führt zu der Bildung des Ausdruckes

(7) $$p_1 = -3\,(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)(\xi_1\,\xi_2 + \xi_1\,\xi_3 + \xi_2\,\xi_3).$$

Nunmehr folgt

$$\sigma - p - p_1 = 3\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3,$$

es ist also

(8) $$p_2 = 3\,(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3),$$

und man erhält die Darstellung

(9) $$\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^3$$
$$- 3\,(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)(\xi_1\,\xi_2 + \xi_1\,\xi_3 + \xi_2\,\xi_3) + 3\,(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3).$$

Vermöge der Gleichungen (4) des § 46 verwandelt sich diedieselbe in die folgende

(9*) $$\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = -\frac{a_1^3}{a_0^3} + \frac{3\,a_1\,a_2}{a_0^2} - \frac{3\,a_3}{a_0}.$$

Die beiden behandelten Beispiele gehören zu einer Gattung von symmetrischen Verbindungen, die in der Analysis vielfach angewendet werden, nämlich zu den *Summen der gleich hohen Potenzen von n Elementen.* Eine allgemeine Methode, um diese Verbindungen durch die n symmetrischen Grundverbindungen auszudrücken, schliesst sich an gewisse in dem nächsten Abschnitt mitzutheilende Resultate genau an und wird deshalb dort auseinandergesetzt werden.

Unter den symmetrischen Verbindungen von n Elementen giebt es eine, die für die Werthe $n = 2, 3, 4$ bei der Auflösung der Gleichungen von den bezüglichen Graden hervorgetreten ist, und die in der allgemeinen Theorie der Gleichungen eine grosse Bedeutung hat. Man kann aus n Elementen $\xi_1, \xi_2, .. \xi_n$ in dem Sinne die sämmtlichen Differenzen bilden, dass alle Combinationen von je zwei verschiedenen Elementen ξ_α und ξ_β aufgesucht werden, und für jede solche Combination *eine Differenz* genommen wird, und man kann dann von diesen sämmtlichen Differenzen das Product aufstellen; um aus den Elementen ξ_α und ξ_β eine *bestimmte Differenz* zu erhalten, lässt sich die Bedingung festsetzen, dass der Zeiger α kleiner sei als der Zeiger β. Auf diese Weise entsteht *das Product von* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Factoren*

(10) $$\begin{array}{l} (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) \ldots (\xi_1 \quad - \xi_n) \\ \qquad\qquad (\xi_2 - \xi_3) \ldots (\xi_2 \quad - \xi_n) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \ldots (\xi_{n-1} - \xi_n), \end{array}$$

welches für den Werth $n = 2$ in die Differenz $\xi_1 - \xi_2$ übergeht, für den Werth $n = 3$ in § 52, und für den Werth $n = 4$ in § 55 betrachtet worden ist. Das Product (10) ist fähig, sobald die Elemente $\xi_1, \xi_2, .. \xi_n$ auf alle möglichen Arten unter einander vertauscht werden, *zwei von einander durch das Vorzeichen verschiedene Werthe* zu erhalten. Wenn man nämlich mit den Elementen eine beliebig bestimmte Permutation vornimmt, so verwandelt sich jede der vorhandenen $\frac{n(n-1)}{2}$

Differenzen wieder in eine Differenz von zwei verschiedenen Elementen, und zwar müssen auch diese $\frac{n(n-1)}{2}$ neuen Differenzen sämmtlich unter einander verschieden sein. Vergleicht man jede der Differenzen mit der aus den entsprechenden Elementen gebildeten neuen Differenz des Products (10), so gehört zu jeder neuen Differenz eine und nur eine der letzteren, und es kommt nur darauf an, zu beurtheilen, wann in den zusammengehörigen Differenzen das Vorzeichen einen Wechsel erfahren hat; denn aus zwei Elementen ξ_α und ξ_β entsteht nur entweder die Differenz $\xi_\alpha - \xi_\beta$ oder die Differenz $\xi_\beta - \xi_\alpha = -(\xi_\alpha - \xi_\beta)$. So oft eine neue Differenz das entgegengesetzte Vorzeichen trägt, wie die in dem Product (10) vorkommende zugehörige, so oft darf man sich den Werth des Products (10) mit der negativen Einheit multiplicirt denken; je nachdem die Anzahl der entgegengesetzten Vorzeichen gerade oder ungerade ist, erhält daher das neue Product entweder den gleichen oder den entgegengesetzten Werth des ursprünglichen Products.

Es lassen sich aber aus n Elementen auch in dem Sinne die sämmtlichen Differenzen nehmen, dass von jedem Element nach einander alle übrigen abgezogen werden; diese $n(n-1)$ Differenzen mit einander multiplicirt, liefern das Product

$$\begin{array}{ll}(11) & (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)\ \ldots\ (\xi_1 - \xi_n) \\ & (\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)\ \ldots\ (\xi_2 - \xi_n) \\ & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ & (\xi_n - \xi_1)(\xi_n - \xi_2)\ \ldots\ (\xi_n - \xi_{n-1}).\end{array}$$

Vertauscht man hier die n Elemente auf alle möglichen Arten, so wird dadurch der Werth offenbar nicht geändert. *Das Product* (11) *ist somit eine rationale ganze symmetrische Verbindung der n Elemente* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, und lässt sich deshalb nach dem Satze des vorigen § auf eine und nur eine Weise als rationaler ganzer Ausdruck der n symmetrischen Grundverbindungen darstellen. Wenn daher für die n Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ nach (1) des § 46 die zugehörige Function des $n$ten Grades einer Variable x gebildet wird

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a_0} f(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n), \\ \dfrac{1}{a_0} f(x) = x^n + \dfrac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_0} x + \dfrac{a_n}{a_0}, \end{cases}$$

so darf man die n symmetrischen Grundverbindungen der n Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ respective durch die mit abwechselnden Zeichen genommenen Coefficienten der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$, nämlich $-\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ ersetzen, und *das Product* (11) *wird gleich einem aus diesen Coefficienten der Function* $\frac{1}{a_0} f(x)$ *oder der Gleichung* $f(\xi) = 0$ *zusammengesetzten rationalen ganzen Ausdrucke* $\mathfrak{D}$. Dieser Ausdruck ist von *Gauss* die *Determinante der Function* $\frac{1}{a_0} f(x)$ genannt worden, und wird gegenwärtig meistens als die *Discriminante der Gleichung* $f(\xi) = 0$ bezeichnet.

Das Product (10) steht zu dem Producte (11) in der Beziehung, dass für je zwei verschiedene Elemente ξ_α und ξ_β das erstere die eine Differenz $\xi_\alpha - \xi_\beta$, dagegen das letztere das Product der beiden Differenzen $(\xi_\alpha - \xi_\beta)(\xi_\beta - \xi_\alpha)$ enthält. Wenn man daher das Product (10) mit einem anderen Producte multiplicirt, das aus (10) durch die Umkehrung der Vorzeichen in allen Differenzen entstanden ist, so wird das hervorgehende Resultat gleich dem Product (11). Weil nun das Product (10) aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Factoren besteht, so bewirkt die Umkehrung der Vorzeichen in allen Differenzen dasselbe, wie eine $\frac{n(n-1)}{2}$ mal wiederholte Multiplication des Products (10) mit der negativen Einheit. Auf diese Weise ergiebt sich der Satz, *dass das in die* $\frac{n(n-1)}{2}$ *te Potenz der negativen Einheit multiplicirte Quadrat der aus den Elementen* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *gebildeten zweiwerthigen Verbindung* (10) *gleich der aus denselben Elementen bestehenden symmetrischen Verbindung* (11) *ist.* Die Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$ erhält für die Werthe

$n=2, 3, 4, 5, \ldots$ respective die Werthe 1, 3, 6, 10, .., von denen abwechselnd je zwei ungerade und dann je zwei gerade ausfallen; die Potenz $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ bekommt demgemäss die correspondirenden Werthe -1, -1, $+1$, $+1$, ... Es ist deshalb insbesondere

$$(11^*)\quad \begin{cases} \text{für } n=2,\ \mathfrak{D}=-(\xi_1-\xi_2)^2 \\ \text{»}\ n=3,\ \mathfrak{D}=-(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1-\xi_3)^2(\xi_2-\xi_3)^2 \\ \text{»}\ n=4,\ \mathfrak{D}=\Pi(\xi_\alpha-\xi_\beta)^2. \end{cases}$$

Auf Grund der so eben nachgewiesenen Eigenschaft des Products (10) erklärt sich die Beobachtung, dass dasselbe für die speciellen Werthe $n=2$, 3, 4 bei der Auflösung der Gleichungen von den correspondirenden Graden eine Darstellung als die Quadratwurzel aus einem rationalen ganzen Ausdrucke der Coefficienten der zugehörigen Gleichung gefunden hat. Diese Bestimmungen führen, indem das Quadrat des Productes (10) gebildet wird, gleichzeitig dazu, für die Gleichungen der entsprechenden Grade die Discriminante $\mathfrak{D}$ selbst darzustellen.

Für zwei Elemente ξ_1 und ξ_2 ist in § 57 Formel (4) die symmetrische Verbindung $(\xi_1-\xi_2)^2$ durch die Coefficienten der zugehörigen quadratischen Gleichung $f(\xi)=0$ dargestellt worden. Es findet sich daher vermöge der Definitionsgleichung in (11*) $\mathfrak{D}=-(\xi_1-\xi_2)^2$ der Ausdruck der *Discriminante der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades*

$$(13)\qquad \mathfrak{D}=\frac{4a_0a_2-a_1^2}{a_0^2}\,;$$

Man sieht jetzt, wie tief die Discriminante $\mathfrak{D}$ in die Theorie der quadratischen Gleichung eingreift. Auf einem Standpunkte, für den die Rechnung mit complexen Grössen noch nicht existirt, und von dem aus der § 24 verfasst ist, entscheidet die Discriminante $\mathfrak{D}$ durch ihr Vorzeichen zwischen den quadratischen Gleichungen, die befriedigt werden können, und denjenigen, die nicht befriedigt werden können, oder, was daraus folgt, zwischen den Functionen zweiten Grades, die in zwei unbestimmte Factoren des ersten Grades zerlegbar, und denen, die es nicht sind. Nach der Einführung der Rechnung mit complexen Grössen gibt die Discriminante $\mathfrak{D}$ bei einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten reell sind, das Criterium für die Beschaffenheit

der beiden Wurzeln, so dass durch einen *positiven Werth von* $\mathfrak{D}$ *zwei complexe conjugirte Wurzeln*, durch einen *negativen Werth von* $\mathfrak{D}$ *zwei verschiedene reelle Wurzeln*, und *durch den Werth Null von* $\mathfrak{D}$ *zwei einander gleiche reelle Wurzeln* angezeigt werden.

Das Product (10), bezogen auf die Voraussetzung $n=3$ und die drei Wurzeln der allgemeinen cubischen Gleichung, wird vermöge der Gleichungen (4) und (5) des § 52 gleich dem Product aus dem Differenzenproduct der dritten Wurzeln der Einheit $(1-\varrho)(1-\varrho^2)(\varrho-\varrho^2)$ in den doppelten Werth der Grösse ω, welche gleich einer Quadratwurzel aus dem Ausdruck $\frac{b_2^3}{27}+\frac{b_3^2}{4}$ ist. Das Differenzenproduct $(1-\varrho)(1-\varrho^2)(\varrho-\varrho^2)$ hat, wie dort bemerkt, den Werth $\pm 3\sqrt{3}\, i$. Hieraus ergiebt sich wegen der Definitionsgleichung in (11*)

$$\mathfrak{D}=-(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1-\xi_3)^2(\xi_2-\xi_3)^2$$

für *die Discriminante* $\mathfrak{D}$ *der allgemeinen cubischen Gleichung* die Darstellung

$$\mathfrak{D}=4\,b_2^3+27\,b_3^2. \tag{14}$$

Durch die Gleichungen (20) des § 51 können b_2 und b_3 in den Coefficienten der betreffenden cubischen Gleichung ausgedrückt werden, und man erhält

$$27\,\mathfrak{D}=4\left(-\frac{a_1^2}{a_0^2}+\frac{3\,a_2}{a_0}\right)^3+\left(\frac{2\,a_1^3}{a_0^3}-\frac{9\,a_1\,a_2}{a_0^2}+\frac{27\,a_3}{a_0}\right)^2, \tag{14*}$$

mithin nach ausgeführter Rechnung

$$\mathfrak{D}=-\frac{a_1^2\,a_2^2}{a_0^4}+\frac{4\,a_1^3\,a_3}{a_0^4}+\frac{4\,a_2^3}{a_0^3}-\frac{18\,a_1\,a_2\,a_3}{a_0^3}+\frac{27\,a_3^2}{a_0^2}. \tag{14**}$$

Der § 53 hat gelehrt, dass bei einer cubischen Gleichung, deren Coefficienten reell sind, die Natur der Wurzeln wieder aus der Beschaffenheit der Discriminante $\mathfrak{D}$ allein erkannt werden kann; *ein positiver Werth von* $\mathfrak{D}$ *bedingt eine reelle und zwei complexe conjugirte Wurzeln, ein negativer Werth von* $\mathfrak{D}$ *drei unter einander verschiedene reelle Wurzeln, ein verschwindender Werth von* $\mathfrak{D}$ *drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind.*

Ein Ausdruck des Products (10) für die Voraussetzung, dass $n=4$ sei und dass $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die vier Wurzeln der allgemeinen biquadratischen Gleichung seien, findet sich in der

Gleichung (18) des § 55 als Product der Zahl 2^6 in das Differenzenproduct von den Wurzeln derjenigen cubischen Gleichung, auf deren Lösung die Lösung der biquadratischen Gleichung zurückgeführt worden ist, und die durch das Nullsetzen der Function (9) des angeführten §

$$u^3+\frac{b_2}{2}u^2+\left(\frac{b_2^2}{16}-\frac{b_4}{4}\right)u-\frac{b_3^2}{64}$$

erhalten wird. Wenn man daher die Discriminante dieser cubischen Gleichung mit $\mathfrak{D}_1$ bezeichnet, so folgt für die *Discriminante* $\mathfrak{D}$ *der in Rede stehenden allgemeinen biquadratischen Gleichung*, welche nach ihrer Definition in (11*) dem *Quadrate* des auf der linken Seite der Gleichung (18) des § 55 auftretenden Differenzenproducts gleich ist, während die Discriminante $\mathfrak{D}_1$ dem *negativ genommenen Quadrate* des auf der rechten Seite derselben Gleichung befindlichen Differenzenproductes gleich ist, die Darstellung

$$\mathfrak{D}=-2^{12}\,\mathfrak{D}_1. \tag{15}$$

Die Coefficienten der bezeichneten cubischen Gleichung werden durch die Coefficienten der gegebenen biquadratischen Gleichung mittelst der Gleichungen

$$(16)\left\{\begin{aligned}
\frac{b_2}{2}&=-\frac{1}{2^4}\left(\frac{3a_1^2}{a_0^2}-\frac{8a_2}{a_0}\right)\\
\frac{b_2^2}{16}-\frac{b_4}{4}&=\frac{1}{2^8}\left(\frac{3a_1^4}{a_0^4}-\frac{16a_1^2a_2}{a_0^3}+\frac{16a_1a_3}{a_0^2}+\frac{16a_2^2}{a_0^2}-\frac{64a_4}{a_0}\right)\\
-\frac{b_3^2}{64}&=\frac{-1}{2^{12}}\left(-\frac{a_1^3}{a_0^3}+\frac{4a_1a_2}{a_0^2}-\frac{8a_3}{a_0}\right)^2
\end{aligned}\right.$$

ausgedrückt, wie dies gegen das Ende des § 57 zur Ableitung der dortigen Gleichungen (18) geschehen ist, und bieten dadurch die Möglichkeit, die Discriminante $\mathfrak{D}_1$ in den Coefficienten der biquadratischen Gleichung darzustellen.

Bei der in § 52 angestellten und so eben benutzten Untersuchung des aus den drei Wurzeln der allgemeinen cubischen Gleichung gebildeten Differenzenproducts $(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_3)$ sind wir auf das aus den drei dritten Wurzeln der Einheit gebildete Differenzenproduct $(1-\varrho)(1-\varrho^2)(\varrho-\varrho^2)$ geführt worden, dessen Werth gleich $\pm 3\sqrt{3}\,i$ gefunden war. Hiernach hat die Discriminante $\mathfrak{D}$ der reinen Gleichung des dritten Grades $\varrho^3-1=0$ den Werth $-(1-\varrho)^2(1-\varrho^2)^2(\varrho-\varrho^2)^2=27$.

Man kann aber auch den Werth der Discriminante $\mathfrak{D}$ der reinen Gleichung des $n$ten Grades

$$\omega^n - 1 = 0$$

allgemein bestimmen. Wenn die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung durch die Potenzen einer primitiven $n$ten Wurzel der Einheit ausgedrückt werden, welche wie in § 48 die Wurzel

$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

sein möge, so erhält das obige Product (11), dessen Werth durch die Discriminante $\mathfrak{D}$ ausgedrückt wird, die Gestalt

$$\begin{array}{lllll}
(16) & (1-\omega_1) & (1-\omega_1^2) & \ldots & (1-\omega_1^{n-1}) \\
& (\omega_1 - 1) & (\omega_1 - \omega_1^2) & \ldots & (\omega_1 - \omega_1^{n-1}) \\
& \vdots & \vdots & & \vdots \\
& (\omega_1^{n-1} - 1) & (\omega_1^{n-1} - \omega_1) & \ldots & (\omega_1^{n-1} - \omega_1^{n-2}).
\end{array}$$

Der Werth des Products der in der ersten Horizontalreihe enhaltenen Factoren, ist nun nach der Gleichung (9) des anführten § 48 unmittelbar gleich der Zahl n. Das Product der Factoren, welche sich in einer beliebigen anderen, etwa der $(t+1)$ten Horizontalreihe befinden, erlaubt aber aus jedem Factor die Grösse ω_1^t herauszuziehen, und wird dann gleich dem Ausdrucke

$$\omega_1^{t(n-1)}(1-\omega_1)(1-\omega_1^2)\ldots(1-\omega_1^{n-1}).$$

Denn nach einem in § 29 bewiesenen Satze werden die sämmtlichen Wurzeln der Einheit für jeden Werth der Zahl t auch durch die Reihe

$$\omega_1^{-t},\ \omega_1^{-t+1} \ldots \omega_1^{-t+n-1}$$

dargestellt. Das bezeichnete Product ist also gleich dem in die Potenz $\omega_1^{t(n-1)}$ multiplicirten Producte $(1-\omega_1)(1-\omega_1^2)\ldots(1-\omega_1^{n-1})$, dessen Werth gleich der Zahl n gefunden ist. Hiernach ergiebt sich für das Product (16) und dadurch für die Discriminante $\mathfrak{D}$ die Werthbestimmung

$$(17) \qquad \mathfrak{D} = \omega_1^{(n-1)}\,\omega_1^{2(n-1)} \ldots \omega_1^{(n-1)(n-1)}\,n^n.$$

Es ist das Product der sämmtlichen Wurzeln der reinen Gleichung $\omega^n - 1 = 0$ gleich dem in $(-1)^n$ multiplicirten letzten Coefficienten der Gleichung -1, das ist gleich $(-1)^{n-1}$, folglich

$$1 \,.\, \omega_1^1 \,.\, \omega_1^2 \ldots \omega_1^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Ferner hat man

$$\omega_1^{(n-1)} \; \omega_1^{2(n-1)} \ldots \omega_1^{(n-1)(n-1)} = \omega_1^{-1} \; \omega_1^{-2} \ldots \omega_1^{-(n-2)}.$$

Weil aber $(-1)^{n-1}$ seinen Werth nicht ändert, wenn man damit in die Einheit hineindividirt, so ist der Factor, mit welchem n^n auf der rechten Seite von (17) multiplicirt wird, ebenfalls gleich $(-1)^{n-1}$, und die gesuchte Discriminante $\mathfrak{D}$ wird durch die Gleichung

$$\mathfrak{D} = (-1)^{n-1} n^n \tag{18}$$

ausgedrückt.

§ 60. Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung überhaupt. Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung durch Zurückführung auf reine Gleichungen.

Die Auffindung der Ausdrücke, durch welche die Wurzeln der allgemeinen Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades mit Hülfe der Auflösung von reinen Gleichungen dargestellt werden, reizte dazu an, bei den allgemeinen Gleichungen des fünften Grades und der höheren Grade eine ähnliche Auflösung zu suchen. Indessen alle auf dieses Ziel gerichteten Bemühungen blieben erfolglos, und erst allmählich wurde die Erkenntniss gewonnen, dass hier zwei von einander verschiedene Fragen zu beantworten sind.

Die erste Frage geht dahin, *ob es möglich sei, jede algebraische Gleichung von einem beliebigen Grade dadurch zu befriedigen, dass man die Unbekannte gleich einer bestimmten reellen oder complexen Grösse setzt.* Die zweite Frage ist die, *ob es möglich sei, die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichung vom fünften Grade und von einem höheren Grade auf die Auflösung von reinen Gleichungen zurückzuführen.* Die präcise Auffassung von beiden Fragen wird erleichtert, sobald man sich die Coefficienten der gegebenen algebraischen Gleichung als reelle Grössen denkt. Es möge zuerst die erste Frage erwogen werden.

Wir haben gesehen, dass Gleichungen des zweiten Grades existiren, welche durch keinen reellen Werth der Unbekannten befriedigt werden können. Unter der Voraussetzung, dass die Rechnung mit complexen Grössen zugelassen ist, existirt für

jede Gleichung des zweiten Grades ein reeller oder complexer Werth, der sie erfüllt, und dann existirt, wie wir weiter sahen, auch für jede Gleichung des dritten und des vierten Grades ein reeller oder complexer Werth, der die gegebene Gleichung befriedigt. Allein von vorne herein weiss man nicht, ob bei der Zulassung der Rechnung mit complexen Grössen auch für jede algebraische Gleichung eines höheren als des vierten Grades stets ein reeller oder complexer Werth vorhanden sei, welcher dieselbe befriedigt. In Betreff der zweiten Frage steht so viel fest, dass, wofern die erste Frage nicht bejaht werden könnte, auch die zweite verneint werden müsste. Wenn algebraische Gleichungen existirten, die weder durch einen reellen noch einen complexen Werth erfüllt werden könnten, so dürfte von einer Zurückführung ihrer Auflösung auf reine Gleichungen gar nicht gesprochen werden. Aber in dem Falle, dass die erste Frage bejaht werden müsste, würde sich daraus für die Beantwortung der zweiten Frage nichts ergeben. Wenn es sich bestätigt, dass eine allgemeine Gleichung von einem die Vier übertreffenden Grade stets durch einen reellen oder complexen Werth erfüllt werden kann, so folgt daraus keineswegs, dass es möglich sei, die Auflösung dieser allgemeinen Gleichung auf reine Gleichungen zu reduciren.

Gauss hat in seiner 1799 erschienenen Inauguraldissertation, welche den Titel führt *demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, zum ersten Male mit entscheidenden Gründen bewiesen, dass die vorhin bezeichnete erste Frage unbedingt zu bejahen ist. Der Ausdruck des von *Gauss* formulirten Theorems bezieht sich auf Functionen, deren Coefficienten reelle Grössen sind, und vermeidet die Erwähnung der imaginären Grössen. Auf welche Weise die Kenntniss eines reellen oder complexen Werthes, der eine solche Function zum Verschwinden bringt, zur Aufstellung eines algebraischen Factors der Function vom ersten oder zweiten Grade dienen könne, ist in § 47 auseinandergesetzt worden. Man überzeugt sich übrigens sehr leicht, dass, wenn jede algebraische rationale ganze Function einer Variable mit reellen Coefficienten in reelle Factoren des ersten oder zweiten

Grades zerlegbar ist, unter der Voraussetzung der Rechnung mit complexen Grössen jede algebraische rationale ganze Function einer Variable mit reellen oder complexen Coefficienten in lauter Factoren des ersten Grades zerlegbar sein muss.

Die angeführte Schrift von *Gauss* enthält eine eingehende Kritik aller früheren Versuche, das in Rede stehende *Fundamentaltheorem der Theorie der algebraischen Gleichungen* zu beweisen. Als die erste von diesen Untersuchungen wird eine Arbeit von *d'Alembert* angeführt, *recherches sur le calcul intégral*, histoire de l'ac. de Berlin, année 1746. Nachdem *Gauss* eine Reihe von Einwürfen gegen die Stichhaltigkeit der von *d'Alembert* gegebenen Beweisführung entwickelt hat, zeichnet er die Arbeit durch das folgende Urtheil aus: „Aus den angeführten Gründen kann ich *d'Alemberts* Beweis nicht für genügend halten. Trotzdem scheint es mir, dass der wahre Nerv von d'*Alemberts* Beweis durch alle gemachten Einwürfe nicht zerstört werde, und ich glaube, dass auf dieselbe Grundlage, wiewohl in ganz anderer Weise und jedenfalls mit grösserer Vorsicht, nicht nur ein strenger Beweis des in Rede stehenden Fundamentaltheorems gebaut werden kann, sondern dass sich hieraus auch alles dasjenige entnehmen lässt, was in Betreff der Theorie der transcendenten Gleichungen verlangt werden kann.“ — Auf die Kritik der früheren Beweise lässt *Gauss* den eigenen neuen Beweis folgen, und giebt am Schlusse die Skizze eines zweiten auf dem Princip *d'Alemberts* beruhenden Beweises. Der Beweis desselben Theorems, den *Legendre* in seiner *théorie des nombres* entwickelt hat, stützt sich nach meinem Dafürhalten ebenfalls auf das Princip *d'Alemberts*. *Cauchy* bezeichnet den von ihm in seinem *cours d' analyse* mitgetheilten Beweis als einen solchen, der mit *Legendres* Beweis dasselbe Princip habe, wodurch zugleich die innere Verwandtschaft von *Cauchys* Beweis mit dem Princip *d'Alemberts* angedeutet ist. *Gauss* hat jenem ersten Beweise im Laufe der Zeit noch drei andere hinzugefügt, von denen der zweite und dritte die Entdeckungen neuer Principien enthalten, während der letzte sich dem ersten Beweise nähert und dabei eine Function mit complexen Coefficienten unmittelbar ins Auge fasst. Der im Folgenden zu entwickelnde Beweis schliesst sich an das Princip *d'Alemberts* an.

In Bezug auf die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen drückt sich *Gauss* in der angeführten Inauguraldissertation so aus, dass, nachdem in dieser Richtung so viele vergebliche Anstrengungen gemacht worden seien, es immer wahrscheinlicher werde, dass eine allgemeine Auflösung, die in der Zurückführung auf reine Gleichungen bestehe, unmöglich sei; ferner bemerkt *Gauss*, dass es vielleicht nicht so schwierig sein würde, die Unmöglichkeit schon für den fünften Grad mit aller Strenge zu beweisen, und verspricht seine hierüber angestellten Untersuchungen an einem anderen Orte vorzulegen. Diese Absicht ist jedoch nicht zur Ausführung gekommen. In demselben Jahre, in dem die Inauguraldissertation von *Gauss* erschien, veröffentlichte *P. Ruffini* zu Bologna eine Schrift von zwei Bänden mit dem Titel: *Allgemeine Theorie der Gleichungen, in welcher bewiesen wird, dass die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten Grade unmöglich sei.* Diese Schrift ist indessen, und wohl zum grossen Theil wegen der schwer zu übersehenden Art ihrer Darstellung, wenig bekannt geworden. Ihr Inhalt kann an der gegenwärtigen Stelle keiner genaueren Erörterung unterzogen werden; doch wäre eine knappe Zusammenfassung des von *P. Ruffini* gelieferten Beweises, mit der eine Prüfung der angewendeten Methode verbunden werden müsste, gewiss sehr wünschenswerth.

Auf einem neu geschaffenen Wege erledigte *Abel* die betreffende Frage durch die Abhandlung: *démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré,* welche 1826 in deutscher Uebersetzung in dem ersten Bande des von *Crelle* gegründeten *Journals für Mathematik* publicirt wurde, und später in der französischen Urschrift in *Abel's* gesammelte Werke aufgenommen ist.

Abel erwähnt in einer zweiten Abhandlung, die, nicht vollendet, zum ersten Male nach seinem Tode in den gesammelten Werken erschienen ist und den Titel hat: *sur la résolution algébrique des équations,* die genannte Arbeit *P. Ruffini's* und sagt, dieselbe sei so verwickelt, dass es sehr schwer sei, über die Richtigkeit der von dem Verfasser benutzten Schlussweise zu urtheilen; doch scheine die Schlussweise nicht immer vollkommen bindend zu sein. Eine Darstellung von *Abels* angeführtem Be-

weise mitzutheilen, liegt nicht in dem Plane des vorliegenden Buches, und es muss in dieser Hinsicht auf die Originalabhandlung verwiesen werden.

Wir wenden uns jetzt zu der Mittheilung eines Beweises für das Fundamentaltheorem der Theorie der algebraischen Gleichungen.

§ 61. Beweis des Satzes, dass jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten durch einen reellen oder complexen Werth befriedigt werden kann.

Es sei eine rationale ganze Function des $n$ten Grades einer Variabe x gegeben

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

deren Coefficienten beliebige reelle oder complexe Werthe haben, während der Coefficient a_0 nicht gleich Null ist. Durch die Sonderung des reellen und des imaginären Theiles in den Coefficienten bekomme man, wie in § 47, die Ausdrücke

$$a_0 = C_0 + D_0 i,\ a_1 = C_1 + D_1 i, \ldots a_n = C_n + D_n i. \tag{2}$$

Sobald in der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ die Variable x durch einen beliebigen complexen Werth $p + qi$ ersetzt wird, so entsteht ein complexer Werth, der mit $t + ui$ bezeichnet werden möge,

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a_0} f(p+qi) = (p+qi)^n + \frac{a_1}{a_0}(p+qi)^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}, \\ &\frac{1}{a_0} f(p+qi) = t + ui. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Damit $p + qi$ eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ sei, muss $t + ui$, mithin sowohl die reelle Grösse t wie auch die reelle Grösse u gleich Null sein, und in Folge dessen $t^2 + u^2$, *die Norm der complexen Grösse* $t + iu$, also auch die positive Quadratwurzel aus der Norm $\sqrt{t^2 + u^2}$ oder *der absolute Betrag der Grösse* $t + ui$ verschwinden. Zugleich gilt das Umgekehrte, dass, wofern der absolute Betrag $\sqrt{t^2 + u^2}$ gleich Null ist, sowohl die reelle Grösse t, wie auch die reelle Grösse u, und deshalb auch die complexe Grösse $t + iu$ verschwinden muss. Man kann daher statt der Frage, ob es Werthe $p + qi$ für x giebt, welche die Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ zu Null machen, die

Frage aufwerfen, ob es Werthe $p + qi$ für x giebt, bei deren Anwendung der vermöge der Gleichung (3) definirte Betrag $\sqrt{t^2 + u^2}$ gleich Null wird. Wenn nun ein bestimmter complexer Werth $p^{(0)} + q^{(0)} i$ den Ausdruck $\frac{1}{a_0} f(p^{(0)} + q^{(0)} i) = t^{(0)} + u^{(0)}$, ein zweiter bestimmter complexer Werth $p^{(1)} + q^{(1)} i$ den Ausdruck $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i) = t^{(1)} + u^{(1)} i$ liefert u. s. f., wenn die Beträge $\sqrt{t^{(0)} \bar{t}^{(0)} + u^{(0)} \bar{u}^{(0)}}$, $\sqrt{t^{(1)} \bar{t}^{(1)} + u^{(1)} \bar{u}^{(1)}}$,.. ein solches Verhalten zeigen, dass ein jeder kleiner ist als der vorhergehende, und wenn ihre Grösse nach und nach unter einen *beliebig kleinen gegebenen Werth* herabsinkt, so nähern sich die Beträge der *Null* als Grenze. Wofern sich dann bei den bezüglichen complexen Grössen $p^{(0)} + q^{(0)} i$, $p^{(1)} + q^{(1)} i$, .. der reelle Theil einem bestimmten Grenzwerthe α nähert, und der reelle Factor von i einem bestimmten Grenzwerthe β, so bewirkt der der Variable x beigelegte Werth $\alpha + \beta i$ das Verschwinden des Betrages $\sqrt{t^2 + u^2}$, und in Folge dessen ist $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$. Es wird jetzt gezeigt werden, dass sich in der That stets ein Verfahren, welches den bezeichneten Erfolg hat, ausführen lässt, und damit ist dann *für jede algebraische Gleichung* $f(\xi) = 0$ *die Existenz einer Wurzel* nachgewiesen.

Bei der vorzunehmenden Untersuchung kommt es häufig darauf an, für den Betrag von complexen Grössen, welche als die Aggregate von zwei oder mehreren complexen Grössen gegeben sind, obere und untere Grenzen zu finden. Unter einer oberen Grenze wird ein Werth verstanden, der immer grösser oder doch wenigstens nie kleiner ist, als der abzuschätzende Betrag und unter einer unteren Grenze ein Werth, der immer kleiner oder doch wenigstens nie grösser ist, als jener Betrag. Für ein Aggregat von zwei complexen Grössen

(4) $$(a + bi) + (c + di)$$

lässt sich dieser Zweck auf die folgende Art erreichen. Es sei für den Augenblick r der absolute Betrag von $a + bi$, s der absolute Betrag von $c + di$, und man habe

(5) $$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta),\quad c + di = s(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

dann kann der Ausdruck (4) die Gestalt erhalten

(6) $r(\cos\theta + i\sin\theta) + s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)\,(r + s(\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta))).$$

Die Norm der linken Seite ist gleich dem Product von den Normen der beiden Factoren der rechten Seite, und deshalb, weil $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ist, gleich der Norm des zweiten Factors, die vermöge der so eben angegebenen Relation gleich dem Ausdrucke

(7) $$r^2 + 2rs\cos(\varphi-\theta) + s^2$$

wird. Der Cosinus des Winkels $\varphi - \theta$ hat die negative Einheit zu seinem kleinsten, die positive Einheit zu seinem grössesten Werthe; daher bestehen die Ungleichkeiten

(8) $$r^2 - 2rs + s^2 \leqq r^2 + 2rs\cos(\varphi-\theta) + s^2 \leqq r^2 + 2rs + s^2.$$

Hieraus folgt, dass das stets positive Aggregat $r+s$ unbedingt eine obere Grenze für den absoluten Betrag des Aggregats (4) bildet. Um für denselben Betrag eine untere Grenze zu erhalten, muss man wissen, ob die positive Quadratwurzel aus dem Ausdruck $r^2 - 2rs + s^2$ mit $r-s$ oder mit $s-r$ zu bezeichnen sei. Wir nehmen an, dass $r > s$ sei, mithin das erstere gelte, und ziehen dann aus (8) die Consequenz

(9) $$0 < r - s \overline{\overline{<}} \sqrt{r^2 + 2rs\cos(\varphi-\theta) + s^2} \overline{\overline{<}} r + s.$$

So entsteht der Satz, dass *der Betrag des Aggregats von zwei complexen Grössen niemals grösser als die Summe von den Beträgen der beiden Bestandtheile, und niemals kleiner ist als der absolute Werth der Differenz von den Beträgen der beiden Bestandtheile.*

Um den Betrag eines Aggregats von mehr als zwei Bestandtheilen in ähnlicher Weise abzuschätzen, möge vorausgesetzt werden, dass die obige Grösse $c + di$ gleich dem Aggregat von mehreren complexen Grössen sei, deren Beträge beziehungsweise mit $s_1, s_2, \ldots s_\mu$ bezeichnet werden. Dann lehrt die wiederholte Anwendung der in (9) zur Auffindung einer oberen Grenze gegebenen Vorschrift, bezüglich des Betrages s der Grösse $c + di$, dass

(10) $$s \overline{\overline{<}} s_1 + s_2 + \ldots + s_\mu$$

sein muss. In Folge dieser Ungleichheit ist

$$r + s_1 + s_2 + \ldots + s_\mu \overline{\overline{>}} r + s,$$
$$r - s_1 - s_2 - \ldots - s_\mu \overline{\overline{<}} r - s;$$

wir fügen nun die Voraussetzung hinzu, dass $r > s_1 + s_2 + \ldots + s_\mu$

sei, dann muss $r - s > 0$ sein, und mit Hülfe von (9) folgt die Relation

$$(11) \qquad 0 < r - s_1 - s_2 \ldots - s_\mu \overline{\overline{<}} \sqrt{r^2 + 2rs\cos(\varphi - \theta) + s^2}$$

$$\sqrt{r^2 + 2rs\cos(\varphi - \theta) + s^2} \overline{\overline{<}} r + s_1 + s_2 + \ldots + s_\mu,$$

welche in Worten so ausgesprochen werden kann: *Für den Betrag eines Aggregats von mehreren complexen Grössen entsteht eine obere Grenze, indem die Beträge aller einzelnen Bestandtheile addirt werden, dagegen eine untere Grenze, indem der Betrag eines Bestandtheils positiv genommen wird, und von diesem die Beträge der sämmtlichen übrigen Bestandtheile subtrahirt werden, wobei vorausgesetzt ist, dass der Ueberschuss positiv sei.*

Wir können mit diesem Lemma in Bezug auf die complexe Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi) = t + ui$ den Satz beweisen, dass, wofern der Betrag r der Grösse $p + qi$ nicht unter einer gewissen demnächst zu bestimmenden Grösse liegt, der Betrag $\sqrt{t^2 + u^2}$ über einer gewissen von jener abhängenden Grösse liegen muss und daher unmöglich gleich Null sein kann.

Es werde der absolute Betrag der Grösse

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{C_1 + D_1 i}{C_0 + D_0 i} \text{ mit } L_1, \text{ der Grösse } \frac{a_2}{a_0} = \frac{C_2 + D_2 i}{C_0 + D_0 i} \text{ mit } L_2$$

bezeichnet, u. s. f.; der absolute Betrag einer Potenz der Grösse $p + qi$ drückt sich durch die betreffende Potenz des absoluten Betrages r aus. Sobald nun in dem Ausdrucke der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi) = t + ui$, welchen die Gleichung (3) enthält, für das erste Glied sein Betrag r^n, für jedes folgende Glied der mit negativem Vorzeichen genommene Betrag $-L_1 r^{n-1}, -L_2 r^{n-2}, \ldots - L_n$ gesetzt wird, und sobald das Resultat der Addition aller Bestandtheile einen positiven Werth hat, so bildet dieses Resultat nach dem Lemma eine untere Grenze für den Betrag $\sqrt{t^2 + u^2}$. Es ist daher unter der erwähnten Voraussetzung

$$(12) \qquad 0 < r^n - L_1 r^{n-1} - L_2 r^{n-2} - \ldots L_n \leq \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Damit der Ausdruck $r^n - L_1 r^{n-1} \ldots - L_n$ positiv sei, stellen wir die Forderung auf, dass die Grösse r den Bedingungen genüge

$$(13) \qquad r > (n+1) L_1, \; r^2 > (n+1) L_2, \ldots r^n > (n+1) L_n.$$

Dann ist

(14) $r^n > (n+1) L_1 r^{n-1}, r^n > (n+1) L_2 r^{n-2}, .. r^n > (n+1) L_n,$

folglich das Aggregat $L_1 r^{n-1} + L_2 r^{n-2} + \ldots + L_n$ kleiner als der Werth $\frac{n r^n}{n+1}$, und deshalb die Differenz $r^n - L_1 r^{n-1} - \ldots - L_n$ grösser als der positive Werth $\frac{r^n}{n+1}$. Demnach haben die Bedingungen (13), statt deren auch die Bedingungen

(15) $r > (n+1) L_1,\ r > \sqrt{(n+1) L_2}, .. r > \sqrt[n]{(n+1) L_n}$

treten können, den Erfolg, dass

(16) $$\frac{r^n}{n+1} < \sqrt{t^2 + u^2}$$

sein muss.

Die Bedingungen (15) sind so beschaffen, dass, sobald dieselben für einen bestimmten Werth $r = R$ befriedigt sind, sie um so mehr für alle Werthe von r gelten, die nicht kleiner als R sind. Dann ist aber zugleich $\frac{r^n}{n+1} > \frac{R^n}{n+1}$. *Für alle Werthe $p + qi$, deren Betrag nicht kleiner ist als R, übertrifft daher vermöge* (16) *der Betrag $\sqrt{t^2 + u^2}$ den Werth* $\frac{R^n}{n+1}$, was der aufgestellten Behauptung entspricht.

Wenn man der complexen Grösse $p + qi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ nach der *Gauss*'schen Interpretation, die in § 42 entwickelt ist, einen Punkt der Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten p und q entsprechen lässt, so bezeichnet, wie dort erörtert worden, der Betrag r den absoluten Werth des Abstandes zwischen dem betreffenden Punkte und dem Anfangspunkte der Coordinaten und der Winkel θ denjenigen Winkel, welchen eine von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach dem betreffenden Punkte gezogene gerade Linie mit der positiven Seite der Axe der reellen Werthe bildet. Für jede complexe Grösse $p + qi$ erhält die Function $\frac{1}{a_0} f(p + qi)$ einen bestimmten complexen Werth $t + ui$; zu jeder complexen Grösse $p + qi$ gehört ein bestimmter Punkt der Ebene; wenn es daher complexe Grössen $p + qi$ giebt, für welche $t + ui = 0$ wird, so existiren auch bestimmte

Punkte der Ebene, für welche $t + ui = 0$ ist. Die complexen Grössen $p + qi$, deren absoluter Betrag r einer bestimmten Grösse R gleich ist, werden durch die Punkte der Ebene repräsentirt, welche auf einem um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius R beschriebenen Kreise liegen; den complexen Grössen, deren *absoluter Betrag r grösser als R* ist, correspondiren die Punkte, welche sich *ausserhalb jenes Kreises* befinden, und den complexen Grössen, deren *absoluter Betrag r kleiner als R* ist, correspondiren die Punkte, welche sich *innerhalb des bezeichneten Kreises* befinden.

Wir haben vorhin eine Grösse R so gewählt, dass sie den Bedingungen (15) genügt; dann lehrt die für $r \geqq R$ bewiesene Ungleichheit $\frac{r^n}{n+1} < \sqrt{t^2 + u^2}$, dass für keinen Punkt $p + qi$, welcher sich ausserhalb des mit dem Radius R um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kreises oder auf diesem Kreise befindet, die Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi) = t + ui$ gleich Null sein kann. Wofern also Werthe $p + qi$ existiren, für welche $t + ui = 0$ wird, das heisst, wofern es Wurzeln für die Gleichung $f(\xi) = 0$ giebt, so muss deren absoluter Betrag r kleiner sein, als die gewählte Grösse R, und die Punkte der Ebene, welche den Wurzeln entsprechen, liegen nothwendig innerhalb des Kreises, der mit dem Radius R um den Nullpunkt beschrieben ist.

Es sei zum Beispiel die Function des sechsten Grades gegeben

(10) $$f(x) = x^6 + 3x^4 - 2x^3 - 12x + 8.$$

Dann ist nach der aufgestellten Vorschrift der Werth R grösser zu nehmen, als jede der Grössen

$$\sqrt{7 \, . \, 3}, \; \sqrt[3]{7 \, . \, 2}, \; \sqrt[5]{7 \, . \, 12}, \; \sqrt[6]{7 \, . \, 8}$$

Dieser Bestimmung genügt der Werth $R = 5$. Man empfängt demnach die Sicherheit, dass bei der vorgelegten Function für jede complexe Grösse $p + qi$, deren Betrag r grösser als 5 oder gleich 5 ist, der Betrag $\sqrt{t^2 + u^2}$ einen grösseren Werth erhält als den Werth $\frac{r^6}{7}$, und dass, falls die betreffende Gleichung überhaupt eine Wurzel hat, der absolute Betrag jeder Wurzel kleiner sein muss als die Zahl 5.

§ 62. Fortsetzung.

Wenn man den Beweis der Existenz einer Wurzel für eine beliebig gegebene algebraische Gleichung aus *der Voraussetzung* ableiten kann, *dass die nächstniedrigere algebraische Gleichung immer eine Wurzel habe*, so ist der in Rede stehende Beweis *bedingungslos* geführt; denn da die Existenz einer Wurzel für die allgemeinen Gleichungen der vier ersten Grade feststeht, so folgt auf dem bezeichneten Wege die Existenz einer Wurzel für jede Gleichung des fünften Grades und weiter fortschreitend für jede algebraische Gleichung eines beliebig hohen Grades. Sobald ferner für alle algebraischen Gleichungen bis zu einem gewissen Grade, diesen Grad eingeschlossen, eine Wurzel existirt, so ergiebt sich aus den Erörterungen des § 45 für jede algebraische rationale ganze Function einer Variable x und von dem in Rede stehenden Grade eine Zerlegung in lauter Factoren des ersten Grades. Diese Zerlegung ist, wie sich dort gezeigt hat, eine völlig bestimmte, jeder der Factoren hat die Gestalt $x-\eta$, und die sämmtlichen Grössen η sind die sämmtlichen Wurzeln der bezüglichen Gleichung; bei der Zerlegung können die unter einander gleichen Factoren des ersten Grades zu Potenzen vereinigt werden. Wenn ein bestimmter Factor des ersten Grades $x-\eta$ b mal und nicht öfter vorkommt, so befinden sich unter den sämmtlichen vorhandenen Wurzeln genau b Wurzeln, die gleich η sind, und η heisst eine b fache Wurzel der betreffenden Gleichung. Die Anzahl der sämmtlichen Factoren des ersten Grades ist nothwendig gleich dem Grade der zerlegten Function und deshalb hat die betreffende Gleichung genau so viele ganz bestimmte Wurzeln, als ihr Grad Einheiten enthält.

Dafür, dass eine Wurzel η eine b fache sei, ist in dem letzten Satze des § 49 ein Kriterium angegeben worden. Wenn man von der in Rede stehenden Function *die erste, zweite, . . $(b-1)$te, $b$te Ableitung* aufstellt, so ist es nothwendig und hinreichend, dass diese Ableitungen mit Ausnahme der $b$ten Ableitung durch die Einsetzung des Werthes $x=\eta$ zu Null werden, dass dagegen hiebei die $b$te Ableitung einen von Null verschiedenen Werth erhalte.

Wir bilden jetzt von der Function des $n$ten Grades $\frac{1}{a_0} f(x)$, die den Betrachtungen des vorigen § zu Grunde gelegt ist, die erste Ableitung

(2) $$\frac{1}{a_0} f'(x) = n x^{n-1} + (n-1)\frac{a_1}{a_0} x^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0},$$

welche eine Function des $(n-1)$ten Grades von x ist. Wenn für die Gleichungen bis zum $(n-1)$ten Grade, diesen eingeschlossen, eine Wurzel vorhanden ist, so folgt daraus, wie wir uns überzeugt haben, für die Gleichung $f'(\eta) = 0$ das Vorhandensein von $n-1$ völlig bestimmten Wurzeln

(3) $$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}.$$

Von diesen Wurzeln können mehrere unter einander gleich sein. Damit eine bestimmte Wurzel η_g, wo g nach der Reihe gleich $1, 2, 3, \ldots n-1$ ist, eine bestimmte Zahl von Malen, und zwar b_g mal, auftrete, müssen die Ableitungen der Functionen $f'(x)$ bis zu der $b_g$ten Ableitung die vorhin bezeichneten Eigenschaften haben. Weil aber nach § 49 die zweite Ableitung von $f(x)$ gleich der ersten Ableitung von $f'(x)$, die dritte Ableitung von $f(x)$ gleich der zweiten Ableitung von $f'(x)$ ist u. s. f., so sind für den genannten Zweck die Ableitungen von $f(x)$ bis zu der $(b_g + 1)$ten Ableitung zu bilden, und die Bedingung dafür, dass η_g eine $b_g$te Wurzel der Gleichung $f'(\eta) = 0$ sei, besteht darin, dass die Gleichungen

(4) $$f''(\eta_g) = 0,\ f'''(\eta_g) = 0, \ldots f^{(b_g)}(\eta_g) = 0$$

gelten, und dass $f^{(b_g+1)}(\eta_g)$ nicht gleich Null sei.

Von nun an soll die Voraussetzung bestehen, dass für die Gleichungen bis zum $(n-1)$ten Grade einschliesslich die Existenz einer Wurzel erwiesen sei. Dann haben wir für die Function des $(n-1)$ten Grades $\frac{1}{a_0} f'(x)$ die Zerlegung in $(n-1)$ Factoren des ersten Grades

(5) $$\frac{1}{a_0} f'(x) = (x-\eta_1)(x-\eta_2)\ldots(x-\eta_{n-1});$$

hier möge der einzelne Factor $x - \eta_g$ die Anzahl b_g von Malen vorhanden sein. Die Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ sind jetzt

der Reihe nach in die Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ statt x zu substituiren. Wenn $\frac{1}{a_0} f(x)$ für eine dieser Wurzeln verschwindet, so ist diese zugleich eine Wurzel der Gleichung $\frac{1}{a_0} f(\xi) = 0$, und die Existenz einer Wurzel der letztern steht fest.

Eine bestimmte Wurzel η_g, welche zugleich eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ ist, muss nach dem aufgestellten Kriterium, weil sie eine b_g fache Wurzel der Gleichung $f'(\eta) = 0$ ist, die obigen Gleichungen (4) befriedigen, und deshalb eine $(b_g + 1)$fache Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ sein.

Wir haben aber nur noch in dem Falle den Existenzbeweis für eine Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ zu führen, dass dieselbe durch keinen der Werthe $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ erfüllt wird. Deshalb schliessen wir die Voraussetzung, dass für irgend eine Wurzel η_g auch $f(\eta_g) = 0$ sei, von der ferneren Betrachtung aus, und beseitigen hiermit gleichzeitig die Annahme, dass, wenn $f(x)$ überhaupt für einen Werth $x = \xi$ verschwinden kann, der betreffende Werth ξ die Gleichung $f'(\xi) = 0$ erfülle und eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(\xi) = 0$ sei.

Die complexen Grössen $\frac{1}{a_0} f(\eta_1), \frac{1}{a_0} f(\eta_2), \ldots \frac{1}{a_0} f(\eta_{n-1})$ sind zufolge der gemachten Voraussetzung sämmtlich von Null verschieden, und deshalb sind es auch ihre respectiven Beträge $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$. Diese vergleichen wir ihrer Grösse nach unter einander und wählen den kleinsten derselben aus, oder, falls es mehrere giebt, die nicht grösser sind als die übrigen, einen beliebigen von den genannten. Es sei dies der zu der Wurzel η_1 gehörende Betrag A_1. Die complexe Grösse η_1 ist dann der erste Werth, welcher in die Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ statt x substituirt werden wird, um von da ab eine Beihe von complexen Grössen $p^{(1)} + q^{(1)} i$, $p^{(2)} + q^{(2)} i$, ... zu bestimmen, bei deren Substitution für x die Beträge von $\frac{1}{a_0} f(x)$ immerfort abnehmen sollen, und deshalb sämmtlich kleiner sein müssen als der Betrag A_1 der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$.

Im vorigen § ist gezeigt worden, dass keine Grösse $p+qi$ eine Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$ sein kann, deren absoluter Betrag r nicht kleiner ist, als eine Grösse R, für welche die dortigen Bedingungen (15) erfüllt sind. Auch die Beträge der sämmtlichen Grössen $\eta_1\ \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ müssen kleiner sein als eine solche Grösse R. Setzt man nämlich in die Gleichung (2) für x eine beliebige complexe Grösse $p+qi$, so kommt

(6)

$$\frac{1}{a_0} f'(p+qi) = n(p+qi)^{n-1} + (n-1)\frac{a_1}{a_0}(p+qi)^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0}.$$

Nach dem schon angewendeten Lemma des vorigen § ist der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f'(p+qi)$ nicht kleiner als das Aggregat

(7) $$n r^{n-1} - (n-1) L_1 r^{n-2} - \ldots - L_{n-1},$$

welches aus der rechten Seite von (6) entstanden ist, indem für das erste Glied sein Betrag selbst, für die übrigen Glieder ihr Betrag, negativ genommen, gesetzt ist; dabei muss die Bedingung erfüllt sein, dass das Aggregat (7) die Null übertreffe. Sobald nun der Betrag r der Grösse $p+qi$ nicht kleiner ist als eine Grösse R, für welche die Bedingungen (15) befriedigt sind, so werden diese Ungleichheiten, wie schon an jener Stelle erwähnt ist, auch durch den Betrag r selbst befriedigt. In Folge der Ungleichheiten ist aber

(8) $$n r^{n-1} - (n-1) L_1 r^{n-1} - \ldots - L_{n-1}$$
$$> \left(n - \frac{(n-1)}{n+1} - \frac{(n-2)}{n+1} \ldots - \frac{1}{n+1}\right) r^{n-1}.$$

Nun ist die Summe der natürlichen Zahlen $1+2+3+\ldots+n-1$ gleich der Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$, folglich der Factor von r^{n-1} auf der rechten Seite von (8) gleich dem Bruche $n - \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ oder $\frac{n(n+3)}{2(n+1)}$. Daher hat man die Ungleichheit

(8*) $$n r^{n-1} - (n-1) L_1 r^{n-2} - \ldots - L_{n-1} > \frac{n(n+3)}{2(n+1)} r^{n-1}.$$

Mithin ist der Betrag der complexen Grösse $\frac{1}{a_0} f'(p+qi)$,

sobald $r \gtrsim R$ ist, grösser als der positive Werth $\frac{n(n+3)}{2(n+1)} r^{n-1}$, und kann deshalb nicht verschwinden. Also müssen die Beträge der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$, durch welche die Grösse $\frac{1}{a_0} f'(p+qi)$ zum Verschwinden gebracht wird, nothwendig kleiner sein als jene Grösse R, und das war ausgesagt worden.

In der Sprache der *Gauss*'schen geometrischen Interpretation heisst dies, dass die $(n-1)$ Punkte der Ebene $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$, für welche die Function $f'(x)$ gleich Null wird, von denen aber mehrere in je einem Punkt vereinigt sein können, nothwendig innerhalb des mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises liegen.

Wenn für das in dem vorigen § gewählte und mit (10) bezeichnete Beispiel einer Function des sechsten Grades $f(x)$ die erste Ableitung gebildet wird

(9) $$f'(x) = 6x^5 + 12x^3 - 6x^2 - 12,$$

so kann diese Function des fünften Grades in der folgenden Weise in zwei Factoren zerlegt werden

(10) $$f'(x) = 6(x^3 - 1)(x^2 + 2).$$

Der erste Factor verschwindet für die drei dritten Wurzeln der Einheit 1, ϱ, ϱ^2, wo wie früher $\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ gesetzt sein möge, der zweite Factor für die beiden rein imaginären Werthe $i\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$. Die fünf Wurzeln der Gleichung $f'(\eta)$ sind mithin die folgenden

(11) $$1,\ \varrho,\ \varrho^2,\ i\sqrt{2},\ -i\sqrt{2}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Function

$$f(x) = x^6 + 3x^4 - 2x^3 - 12x + 8$$

giebt die Resultate

$$f(1) = -2,$$

$$f(\varrho) = 7 - 9\varrho, \qquad f(\varrho^2) = 7 - 9\varrho^2,$$

$$f(i\sqrt{2}) = 12 - 16\sqrt{2}.i, \; f(-i\sqrt{2}) = 12 + 16\sqrt{2}.i,$$

Demnach erhalten die zugehörigen Normen A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^2 beziehungsweise die Werthe

$$4,$$
$$\frac{305}{2}, \quad \frac{305}{2},$$
$$656, \quad 656.$$

Da hier die erste Norm den kleinsten Werth hat, so ist die Wurzel $\eta = 1$ diejenige, welche die oben hervorgehobene ausgezeichnete Eigenschaft besitzt; man bekommt deshalb die Bestimmungen

$$\eta_1 = 1, \; A_1^2 = 4.$$

Was den absoluten Betrag der sämmtlichen fünf Wurzeln (11) anlangt, so ist derselbe der Reihe nach so anzugeben

(12) $$1, \; 1, \; 1, \; \sqrt{2}, \sqrt{2}.$$

Der im vorigen § bestimmte Werth der Grösse R war gleich 5, und die in (12) bezeichneten absoluten Beträge liegen dem zuletzt bewiesenen Satze gemäss unter dieser Grösse.

§ 63. Fortsetzung.

Um den Werth der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$, welche zu einem bestimmten complexen Werthe $x = p^{(0)} + q^{(0)} i$ gehört, mit dem Werthe der Function, welcher zu einem andern complexen Werthe der Veränderlichen x gehört, zu vergleichen, kann man nach § 49 die Variable x durch das Aggregat der Grösse $p^{(0)} + q^{(0)} i$ und einer neuen Veränderlichen z ersetzen, und auf diese Weise die Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ in eine rationale ganze Function des $n$ten Grades von z verwandeln. Indem in den dortigen Gleichungen (1) und (9) für die Grösse k die Grösse $p^{(0)} + q^{(0)} i$ eingeführt wird, entsteht für die Function $\frac{1}{a_0} f(p^{(0)} + q^{(0)} i + z)$ die nach den ganzen Potenzen von z bis zur $n$ten Potenz fortschreitende Entwickelung

(1) $$\frac{1}{a_0} f(p^{(0)} + q^{(0)} i + z) = \frac{1}{a_0} f(p^{(0)} + q^{(0)} i) + \frac{1}{a_0} f'(p^{(0)} + q^{(0)} i) z$$
$$+ \frac{1}{a_0} \frac{f''(p^{(0)} + q^{(0)} i)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(p^{(0)} + q^{(0)} i)}{n!} z^n.$$

Wenn s den absoluten Betrag der complexen Grösse z und φ den correspondirenden Winkel bedeutet, so dass

(2) $$z = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ist, so tritt das Aggregat $p^{(0)} + q^{(0)}i + s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ an die Stelle der complexen Grösse $p + qi$, welche bis dahin statt der Veränderlichen x substituirt worden war. Auf die complexe Grösse $p + qi$ ist die *Gauss*'sche geometrische Interpretation angewendet worden. Aus derselben fliesst vermöge des § 42 die folgende Construction des bezeichneten Aggregats.

Von dem Punkte der Ebene $p^{(0)} + q^{(0)}i$ aus ziehe man erstens eine Parallele zu der Halbaxe der reellen positiven Werthe und hierauf eine gerade Linie, welche mit der ersteren den Winkel φ bildet, man schneide ferner auf der letzteren von dem Punkte $p^{(0)} + q^{(0)}i$ aus eine Strecke ab, die durch den absoluten Betrag s gemessen wird, alsdann repräsentirt der andere Endpunkt der Strecke die Grösse $p^{(0)} + q^{(0)}i + s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Hiernach ist es klar, dass, sobald ein bestimmter Werth S des absoluten Betrages s festgehalten wird, und gleichzeitig dem Winkel φ die Werthe von 0 bis 2π beigelegt werden, der Punkt $p^{(0)} + q^{(0)}i + s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ um den Punkt $p^{(0)} + q^{(0)}i$ einen Kreis von dem Radius S beschreibt; desgleichen folgt, dass ein Punkt $p^{(0)} + q^{(0)}i + z$, bei dem der absolute Betrag s von z kleiner ist, als jene Grösse S, innerhalb des bezeichneten Kreises liegt, und dass ein Punkt $p^{(0)} + q^{(0)}i + z$, bei dem der absolute Betrag s von z grösser ist als die genannte Grösse S, sich ausserhalb jenes Kreises befindet.

Für $p^{(0)} + q^{(0)}i$ möge gegenwärtig der im vorigen § gewählte complexe Werth η_1 genommen werden, welcher die Gleichung $f'(\eta_1) = 0$ befriedigt und der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ einen von Null verschiedenen Werth verleiht, dessen Betrag mit A_1 bezeichnet worden ist. Sobald η_1 eine einfache Wurzel der Gleichung $f'(\eta) = 0$ ist, so muss $f''(\eta_1)$ von Null verschieden sein; wofern aber η_1 eine b_1 fache Wurzel ist, so verschwinden, wie dort bemerkt, die Ableitungen $f''(\eta_1), \ldots f^{(b_1)}(\eta_1)$ und die Ableitung $f^{(b_1+1)}(\eta_1)$ ist von Null verschieden. Demzufolge verschwinden auf der rechten Seite von (1) die betreffenden Coefficienten, und die Entwickelung erhält die folgende Gestalt

$$(3)\qquad \frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z) = \frac{1}{a_0} f(\eta_1) + \frac{1}{a_0} \frac{f^{(b_1+1)}(\eta_1)}{(b_1+1)!} z^{b_1+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(\eta_1)}{n!} z^n.$$

Es soll jetzt der complexen Grösse z ein solcher Werth $z^{(1)}$ beigelegt werden, dass der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)})$ kleiner ausfällt als der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$; der Betrag der complexen Grösse $\frac{1}{a_0} f'(\eta_1 + z^{(1)})$ bekommt dann nothwendig einen von Null verschiedenen Werth. Der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f'(\eta_1 + z)$ verschwindet nur mit dieser Grösse zusammen, und die letztere verschwindet nur für die $n-1$ Werthe $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ der Grösse $\eta_1 + z$. Nun ist aber der Betrag A_1 von $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$ kleiner als jeder der Beträge $\frac{1}{a_0} f(\eta_2), \ldots \frac{1}{a_0} f(\eta_{n-1})$ oder höchstens einem von ihnen gleich, deshalb kann der Betrag von $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)})$ niemals kleiner sein als der Betrag von $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$, sobald $z^{(1)}$ gleich einer der Differenzen $\eta_2 - \eta_1, \ldots \eta_{n-1} - \eta_1$ wird, die nicht gleich Null ist.

Um der für die Grösse $z^{(1)}$ ausgesprochenen Forderung zu genügen, werde *eine reelle positive unter der Einheit liegende Grösse* h angenommen, und die Grösse $z^{(1)}$ so bestimmt, dass bei der Substitution $z = z^{(1)}$ das zweite Glied der rechten Seite von (3) dem in die Grösse $(-h)$ multiplicirten ersten Gliede gleich wird. So entsteht für $z^{(1)}$ *die reine Gleichung des* $(b_1 + 1)$*ten Grades*

$$(4)\qquad \frac{1}{a_0} \frac{f^{(b_1+1)}(\eta_1)}{(b_1+1)!} z^{b+1} = -h \frac{1}{a_0} f(\eta_1).$$

Dieselbe hat für jeden Werth von b_1, wie früher nachgewiesen ist, $(b_1 + 1)$ von einander verschiedene Wurzeln, die aus einer beliebigen derselben durch die Multiplication mit den sämmt-

lichen (b_1+1)ten Wurzeln der Einheit erhalten werden. Aus jeder Wurzel der Gleichung

$$\zeta^{b_1+1} = -\frac{(b+1)!\,f(\eta_1)}{f^{(b_1+1)}(\eta_1)} \tag{5}$$

entsteht eine Wurzel der Gleichung (4), indem man die erstere mit der positiven (b_1+1)ten Wurzel aus der positiven Grösse h, welche durch $h^{\frac{1}{b_1+1}}$ bezeichnet werden möge, multiplicirt. Es sei $\zeta^{(1)}$ eine bestimmte aber beliebig gewählte Wurzel der Gleichung (5), so erzeugt dieselbe für $z^{(1)}$ den Werth

$$z^{(1)} = \zeta^{(1)} h^{\frac{1}{b_1+1}}. \tag{6}$$

Die Gleichung (3) nimmt durch Einführung dieses Werthes die Gestalt an

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)}) &= \frac{1}{a_0} f(\eta_1) - h\,\frac{1}{a_0} f(\eta_1) + \lambda + i\mu, \\ \lambda + i\mu &= \frac{1}{a_0}\,\frac{f^{(b_1+2)}(\eta_1)}{(b+2)!}\;\zeta^{(1)^{b_1+2}}\;h^{\frac{b_1+2}{b_1+1}} + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{a_0}\,\frac{f^{(n)}(\eta_1)}{n!}\,\zeta^{(1)^{n}}\,h^{\frac{n}{b_1+1}}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Jetzt kann man durch die Wahl eines hinreichend kleinen Werthes der reellen Grösse h erreichen, dass der aufgestellten Forderung entsprechend der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)})$ in der That kleiner wird als der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$.

Auf der rechten Seite der ersten Gleichung (7) lassen sich die beiden ersten Glieder zu dem Ausdrucke $(1-h)\,\frac{1}{a_0}\,f(\eta_1)$ vereinigen, wo $1-h$ einen reellen positiven Werth hat. Das in § 61 bewiesene Lemma lehrt nun, dass der Betrag der complexen Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)})$ nie grösser sein kann, als das Aggregat der Beträge von den complexen Grössen $(1-h)\,\frac{1}{a_0}\,f(\eta_1)$ und $\lambda + i\mu$. Der Betrag der Grösse $(1-h)\,\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$ ist gleich dem

Product des positiven Factors $(1-h)$ in den absoluten Betrag A_1 der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$. Insofern als η_1 die Stelle der Grösse $p^{(0)}+q^{(0)}i$ eingenommen hat, setzen wir $\frac{1}{a_0} f(\eta_1) = t^{(0)} + u^{(0)}i$, und haben die Gleichung $A_1 = \sqrt{t^{(0)^2} + u^{(0)^2}}$. Vermöge desselben Lemmas erhält man einen Werth, welcher den absoluten Betrag der Grösse $\lambda + i\mu$ übersteigt, sobald man eine positive Grösse $\mathfrak{P}$, die den absoluten Betrag von jeder der Grössen

(8) $$\frac{1}{a_0}\frac{f^{(b_1+2)}(\eta_1)}{(b_1+2)!}\zeta^{(1)^{b_1+2}}, \ldots \frac{1}{a_0}\frac{f^{(n)}(\eta_1)}{n!}\zeta^{(1)^n}$$

übertrifft, auswählt und den Ausdruck bildet

(9) $$\mathfrak{P}h^{\frac{b_1+2}{b_1+1}} + \mathfrak{P}h^{\frac{b_1+3}{b_1+1}} + \ldots \mathfrak{P}h^{\frac{n}{b_1+1}}.$$

Weil aber h ein positiver echter Bruch und daher $h^{\frac{1}{b_1+1}}$ ebenfalls ein positiver echter Bruch ist, so wird der Ausdruck (9) noch weiter vergrössert, indem die sämmtlichen vorkommenden gebrochenen Potenzen von h, deren Anzahl $n-b_1-1$ beträgt, durch die Potenz $h^{\frac{b_1+2}{b_1+1}}$ ersetzt werden, deren Exponent der niedrigste ist. Der Betrag der Grösse $\lambda + i\mu$ ist somit kleiner, als der den Ausdruck (9) übertreffende Werth

(10) $$(n-b_1-1)\mathfrak{P}h^{\frac{b_1+2}{b_1+1}}.$$

Aus diesen Gründen liegt der absolute Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)})$ unter dem positiven Werthe

(11) $$(1-h)\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}} + (n-b_1-1)\mathfrak{P}h^{\frac{b_1+2}{b_1+1}},$$

wo der Exponent $\frac{b_1+2}{b_1+1}$ um den positiven Bruch $\frac{1}{b_1+1}$ grösser ist als die Einheit. Es lässt sich nun die reelle positive Grösse h so annehmen, dass die Bedingung

(12) $$\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}} > (n-b_1-1)\mathfrak{P}h^{\frac{1}{b_1+1}}$$

erfüllt ist, und sobald dies geschieht, wird der Ausdruck (11) kleiner als der Werth $\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}}$. Mithin wird der absolute

Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z^{(1)})$ kleiner als der absolute Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$, und die vorhin angegebene Forderung ist erfüllt.

In unserem Beispiele war für η_1 der Werth 1 gefunden. Man hat demzufolge $x = 1 + z$ zu setzen, und den Ausdruck zu bilden

$$f(1+z) = -2 + 27z^2 + 30z^3 + 18z^4 + 6z^5 + z^6. \tag{13}$$

Da $\eta = 1$ eine einfache Wurzel der Gleichung $f'(\eta) = 0$ ist, so ist die mit b_1 bezeichnete Zahl gleich der Einheit und der Factor von z^2 in der Entwickelung von $f(1+z)$ kann nicht gleich Null sein. Demnach ergiebt sich für die Grösse ζ die reine quadratische Gleichung

$$27\zeta^2 = 2, \tag{14}$$

welche die beiden reellen Wurzeln

$$+\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad -\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

liefert. Sowohl wenn die eine wie auch wenn die andere für $\zeta^{(1)}$ gewählt wird, muss nach der aufgestellten Vorschrift die Zahl $\mathfrak{P}$ grösser genommen werden, als jede der positiven Grössen

$$30\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad 18\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{4}{2}}, \quad 6\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{5}{2}}, \quad \left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{6}{2}}.$$

Weil aber $\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{3}$ ist, so sieht man sogleich, dass $\mathfrak{P} = 2$ genommen werden kann. Der absolute Betrag $\sqrt{t^{(0)2} + u^{(0)2}}$ der Grösse $f(1)$ ist gleich 2, die Zahl $n - b_1 - 1 = 4$, folglich genügt es, die Grösse h durch die Forderung

$$2 > 4 \,.\, 2 \,.\, h^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

zu beschränken. Man darf deshalb eine der beiden Bestimmungen wählen

$$z^{(1)} = +\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}, \quad z^{(1)} = -\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

sobald $h^{\frac{1}{2}}$ kleiner als $\frac{1}{4}$, das ist, h kleiner als $\frac{1}{16}$ genommen wird.

§ 64. Fortsetzung.

Aus der Gleichung (6) des vorigen § ergiebt sich, indem für h ein den aufgestellten Bedingungen genügender besonderer Werth $h^{(1)}$ genommen wird, als ein für x zu setzender Werth der folgende

$$(1) \qquad p^{(1)} + q^{(1)} i = \eta_1 + \zeta^{(1)} h^{(1)\frac{1}{b_1+1}},$$

wo $\zeta^{(1)}$ eine bestimmte aber beliebige von den $b_1 + 1$ Wurzeln der dortigen Gleichung (5) ist. Der Werth (1) hat die doppelte Eigenschaft, dass der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i)$ kleiner ist als der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$, und dass der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i)$ von der Null verschieden ist. Wenn der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i)$ den Werth Null erhält, so ist in (1) eine Wurzel der vorgelegten Gleichung dargestellt und unser Ziel erreicht. Für jeden anderen Fall wird das Verfahren fortgesetzt. Wir substituiren in $\frac{1}{a_0} f(x)$ statt x das Aggregat

$$(2) \qquad x = p^{(1)} + q^{(1)} i + z$$

und erhalten vermöge der aus § 49 entnommenen Resultate die nach den Potenzen der neuen Veränderlichen z fortgehende Entwickelung

$$(3) \qquad \frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i + z)$$
$$= \frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i) + \frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i) z + \ldots$$
$$+ \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(p^{(1)} + q^{(1)} i)}{n!} z^n.$$

In derselben ist nach den geltenden Voraussetzungen weder die Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i)$ noch die Grösse $\frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i)$, welche den Factor von z bildet, gleich Null, während in der Entwickelung (3) des vorigen § der Factor von z *stets* fehlt. Man kann nun der complexen Grösse z einen solchen Werth $z^{(2)}$

geben, dass der Betrag von $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i + z^{(2)})$ kleiner wird als der Betrag von $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i)$; auch muss dann gleichzeitig der Betrag von $\frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i + z^{(2)})$ von Null verschieden sein, weil der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i + z)$ überhaupt nur für diejenigen $(n-1)$ Werthe von z verschwinden kann, bei denen der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i + z)$ grösser oder gleich dem Betrage von $\frac{1}{a_0} f(\eta_1)$ und deshalb gewiss grösser als der Betrag von $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i)$ ist.

Eine Bestimmung der Grösse $z^{(2)}$ wird erhalten, indem man verlangt, dass für $z = z^{(2)}$ das zweite Glied der rechten Seite von (3) gleich dem Product des negativ genommenen ersten Gliedes *in eine reelle positive unter der Einheit liegende Grösse* h sei. Diese Forderung ist der im vorigen § zu der Bestimmung von $z^{(1)}$ formulirten Forderung ähnlich, unterscheidet sich aber von jener wesentlich dadurch, dass $z^{(1)}$ durch *eine reine Gleichung des $(b_1 + 1)$ten Grades gefunden* wird, die *mindestens vom zweiten Grade* sein muss, dass dagegen für $z^{(2)}$ *die Gleichung des ersten Grades* auftritt

$$(4) \qquad \frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i)\, z = -h \frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i).$$

Wenn für eine Grösse $\zeta^{(2)}$ die Gleichung aufgestellt wird

$$(5) \qquad \frac{1}{a_0} f'(p^{(1)} + q^{(1)} i)\, \zeta^{(2)} = -\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i),$$

so kommt

$$(6) \qquad z^{(2)} = \zeta^{(2)} h$$

und die Gleichung (3) verwandelt sich in die folgende

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i + z^{(2)}) &= \frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i) \\ &\quad - h \frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i) + \lambda + i\mu, \\ \lambda + i\mu &= \frac{1}{a_0} \frac{f''(p^{(1)} + q^{(1)} i)}{2!} \zeta^{(2)2} h^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(p^{(1)} + q^{(1)} i)}{n!} \zeta^{(2)n} h^n. \end{aligned} \right.$$

Es werde nun ein positiver Werth $\Omega^{(2)}$ so angenommen, dass derselbe grösser ist, als der absolute Betrag von jeder der Grössen

$$(8) \qquad \frac{1}{a_0}\frac{f''(p^{(1)}+q^{(1)}i)}{2!}\zeta^{(2)^2}, \ldots \frac{1}{a_0}\frac{f^{(n)}(p^{(1)}+q^{(1)}i)}{n!}\zeta^{(2)^n};$$

dann ist nach dem in § 61 bewiesenen Hülfssatze der absolute Betrag der Grösse $\lambda + i\mu$ kleiner als der Werth

$$(9) \qquad \Omega^{(2)}h^2 + \Omega^{(2)}h^3 + \ldots + \Omega^{(2)}h^n,$$

und, weil h ein positiver echter Bruch ist, um so mehr kleiner als der Werth

$$(10) \qquad (n-1)\,\Omega^{(2)}h^2$$

Vermöge desselben Motivs ist in Folge der Gleichung (7) der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0}f(p^{(1)}+q^{(1)}i+z^{(2)})$ kleiner, als die Summe des Betrages der Grösse $(1-h)\frac{1}{a_0}f(p^{(1)}+q^{(1)}i)$ und des Betrages der Grösse $\lambda + i\mu$, mithin, sobald $\frac{1}{a_0}f(p^{(1)}+q^{(1)}i) = t^{(1)}+u^{(1)}i$ gesetzt wird, kleiner als die Summe

$$(11) \qquad (1-h)\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}} + (n-1)\,\Omega^{(2)}h^2.$$

Sobald nun die reelle positive unter der Einheit befindliche Grösse h so gewählt wird, dass

$$(12) \qquad \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}} > (n-1)\,\Omega^{(2)}h$$

ist, was immer angeht, so erhält der Ausdruck (11) einen Werth, der unter dem Werthe $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}$ liegt. Folglich ist der absolute Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0}f(p^{(1)}+q^{(1)}i+z^{(2)})$ unter den absoluten Betrag $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}$ der Grösse $\frac{1}{a_0}f(p^{(1)}+q^{(1)}i)$ herabgedrückt und das Verlangte geleistet.

Wenn man in dem behandelten Beispiele die Annahme macht

$$(13) \qquad h^{(1)} = \frac{27}{2.16.16} < \frac{1}{16},$$

so kommt gemäss dem ersten Ausdrucke in (17) des vorigen §, welcher der positiven Wurzel der dortigen Gleichung (14) entspricht

(14) $$z^{(1)} = \frac{1}{16},$$

folglich, da $\eta_1 = 1$ ist,

(15) $$p^{(1)} + q^{(1)}\, i = 1 + \frac{1}{16}.$$

Dadurch entsteht die Entwickelung

(16) $$\begin{aligned} f\left(\frac{17}{16} + z\right) = &- \ 1,\ 9321216 \\ &+ \ 2,\ 8579890\ z \\ &+ 30,\ 2775936\ z^2 \\ &+ 23,\ 740500\ z^3 \\ &+ 19,\ 5375\ z^4 \\ &+ \ 6,\ 6\ z^5 \\ &+ \ z^6. \end{aligned}$$

Die Grösse $\zeta^{(2)}$ erhält hiernach die Bestimmung

(17) $$2,857989\ \zeta^{(2)} = 1,9321216,$$

und der positive Werth $\Omega^{(2)}$ ist grösser zu wählen, als jede der Grössen

$$31\,(\zeta^{(2)})^2,\ \ 24\,(\zeta^{(2)})^3,\ \ 20\,(\zeta^{(2)})^4,\ \ 7\,(\zeta^{(2)})^5,\ \ (\zeta^{(2)})^6;$$

die absoluten Beträge der Coefficienten sind hier immer durch die nächst grössesten ganzen Zahlen ersetzt worden. Weil $\zeta^{(2)}$ gleich einem positiven echten Bruche wird, der kleiner ist als $\frac{3}{4}$, so genügt für $\Omega^{(2)}$ die Zahl 18, welche grösser ist als $31\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Der absolute Betrag $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$ von $f\left(\frac{17}{16}\right)$ ist gleich 1, 9321216, mithin verwandelt sich (12) in die Ungleichheit

(18) $$1,\ 9321216 > 5\,.\,18\,h.$$

Für einen Werth von h, welcher dieselbe befriedigt, wird $z^{(2)}$ durch die Gleichung

(19) $$z^{(2)} = \frac{1,9321216}{2,857989}\,h$$

determinirt.

§ 65. Fortsetzung.

Das in dem letzten § auseinandergesetzte Verfahren kann in dem Falle, dass es nicht zu der directen Darstellung einer

Wurzel der Gleichung $f(\xi)=0$ führt, beliebig oft wiederholt werden. Denn aus einer reellen positiven unter der Einheit liegenden, die dortige Bedingung (12) erfüllenden Grösse $h=h^{(2)}$ ergiebt sich ein Werth $z=z^{(2)}$ und dadurch ein Werth von x

(1) $$p^{(2)}+q^{(2)}i=p^{(1)}+q^{(1)}i+\zeta^{(2)}h,$$

bei welchem der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0}f(p^{(2)}+q^{(2)}i)=t^{(2)}+u^{(2)}i$ kleiner ist als der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0}f(p^{(1)}+q^{(1)}i)=t^{(1)}+u^{(1)}i$, und der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0}f'(p^{(2)}+q^{(2)}i)$ nicht verschwindet. Diese beiden Voraussetzungen genügen aber, um eine Entwickelung

(2) $$\frac{1}{a_0}f(p^{(2)}+q^{(2)}i+z)=\frac{1}{a_0}f(p^{(2)}+q^{(2)}i)+$$
$$\frac{1}{a_0}f'(p^{(2)}+q^{(2)}i)z+\ldots+\frac{1}{a_0}\,\frac{f^{(n)}(p^{(2)}+q^{(2)}i)z^n}{n!},$$

vorzunehmen, welche die Anwendung derselben Operationen gestattet, die mit der Gleichung (3) des letzten § vorgenommen sind. *Wir können also in der That successive solche Werthe von x aufstellen,*

$$p^{(0)}+q^{(0)}i,\ p^{(1)}+q^{(1)}i,\ p^{(2)}+q^{(2)}i,\ldots$$

dass die zugeordneten Beträge der Grösse $\frac{1}{a_0}f(x)$

$$\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}},\ \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}},\ \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}},\ldots,$$

wofern nicht einer derselben den Werth Null erhält, fortwährend abnehmen.

In Betreff der Stärke des Abnehmens lehrt der vorige §, dass, nachdem der reelle positive die Einheit übertreffende Werth $h^{(2)}$, welcher die Stelle des daselbst mit h bezeichneten Werthes einnimmt, so gewählt ist, dass er der Ungleichheit

(3) $$\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}>(n-1)\,\Omega^{(2)}h^{(2)}$$

genügt, für den Betrag $\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}$ die Ungleicheit

(3*) $$\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}<(1-h^{(2)})\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}+(n-1)\,\Omega^{(2)}h^{(2)}$$

besteht; auf dieselbe Weise hat man, indem die entsprechend

gebildeten Grössen durch fortlaufende Zeiger characterisirt werden

$$(4)\quad \sqrt{t^{(3)^2}+u^{(3)^2}}<(1-h^{(3)})\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}+(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(3)}h^{(3)},$$
$$\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}>(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(3)}h^{(3)},\ \text{u. s. f.}$$

Hieraus lässt sich schliessen, *dass die Beträge* $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}$, $\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}$, .. *nach und nach kleiner werden müssen, als eine beliebig kleine gegebene Grösse* δ, *sobald eine positive Grösse* Q *existirt, welche grösser ist, als die sämmtlichen nach einander aufzustellenden Grössen* $\mathfrak{Q}^{(2)}$, $\mathfrak{Q}^{(3)}$,.. *Wir werden zuerst die Voraussetzung der Existenz einer solchen Grösse* Q *machen, und später die Existenz selbst nachweisen.*

Die einzelnen Grössen $\mathfrak{Q}^{(2)}$, $\mathfrak{Q}^{(3)}$,.. mögen gleich von vorne herein so gross angenommen sein, was stets zulässig ist, dass die Bedingungen

$$(5)\ \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}<(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(2)},\ \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}<(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(3)},\ldots$$

erfüllt sind. Dann muss ein Werth $h^{(2)}$, welcher die Ungleichheit (3) befriedigt, von selbst ein echter Bruch sein; dasselbe gilt von den Grössen $h^{(3)}$, ... Wir treffen nun eine solche Wahl, dass $h^{(2)}$ gleich *der Hälfte des echten Bruches* wird, *unter dem* $h^{(2)}$ *liegen soll*, verfügen in entsprechender Weise über $h^{(3)}$, ... und erhalten die Gleichungen

$$(6)\qquad h^{(2)}=\frac{\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}}{2\,(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(2)}},\ h^{(3)}=\frac{\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}}{2\,(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(3)}},\ldots$$

Dadurch verwandelt sich die Ungleichheit (3*) in die folgende

$$(7)\qquad \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}<\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}\left(1-\frac{\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}}{4\,(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(2)}}\right);$$

ebenso hat man

$$(8)\qquad \sqrt{t^{(3)^2}+u^{(3)^2}}<\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}\left(1-\frac{\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}}{4\,(n-1)\,\mathfrak{Q}^{(3)}}\right),$$

u. s. f.

Die Voraussetzung, dass die sämmtlichen Grössen $\mathfrak{Q}^{(2)}$, $\mathfrak{Q}^{(3)}$, .. kleiner bleiben als eine bestimmte Grösse Q bewirkt nun, dass, wenn man in den Ungleichheiten (7), (8) die Grössen $\mathfrak{Q}^{(2)}$, $\mathfrak{Q}^{(3)}$, ..

respective durch Q ersetzt, die in den Klammern von der Einheit abzuziehenden Grössen kleiner werden, und um so mehr die Ungleichheiten gelten

$$(9) \qquad \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}} < \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}\left(1-\frac{\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}}{4(n-1)Q}\right),$$

$$(10) \qquad \sqrt{t^{(3)^2}+u^{(3)^2}} < \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}\left(1-\frac{\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}}{4(n-1)Q}\right)$$

u. s. f.

Es ist gegenwärtig aber nicht möglich, dass für eine beliebig weit ausgedehnte Fortsetzung die Beträge $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}$, $\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}, \ldots$ immer grösser bleiben als eine beliebig kleine gegebene positive Grösse δ, oder dieselbe nur erreichen; sie müssen vielmehr schliesslich unter jede Grösse δ herabsinken.

Gesetzt es wäre $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}} > \delta$, $\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}} > \delta, \ldots$ und zuletzt für eine gewisse Zahl N auch $\sqrt{t^{(N)^2}+u^{(N)^2}} \geqq \delta$, dann würde man in den Klammern der Formeln (9), (10) die Grössen $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}$, $\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}, \ldots$ sämmtlich durch δ ersetzen dürfen und dadurch die zu subtrahirenden Ausdrücke abermals verkleinern; auf diese Weise entstünden die Ungleichheiten

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}} < \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}\left(1-\frac{\delta}{4(n-1)Q}\right),\\ &\sqrt{t^{(3)^2}+u^{(3)^2}} < \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}}\left(1-\frac{\delta}{4(n-1)Q}\right),\\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sqrt{t^{(N)^2}+u^{(N)^2}} < \sqrt{t^{(N-1)^2}+u^{(N-1)^2}}\left(1-\frac{\delta}{4(n-1)Q}\right). \end{aligned}\right.$$

Aus denselben folgt durch Multiplication die Ungleichheit

$$(12) \qquad \sqrt{t^{(N)^2}+u^{(N)^2}} < \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}\left(1-\frac{\delta}{4(n-1)Q}\right)^{N-1}.$$

Auf der rechten Seite befindet sich hier die $(N-1)$te Potenz des echten Bruches $1-\frac{\delta}{4(n-1)Q}$. Dieselbe wird, wie sich aus § 19 ergiebt, bei einem wachsenden Werthe der Zahl N kleiner als jede noch so kleine gegebene Grösse. Es kann deshalb die Zahl N immer so gross gewählt werden, dass die in den Factor $\sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}}$ multiplicirte Potenz kleiner wird als

die Grösse δ. Dann würde aber die Consequenz eintreten, dass

$$\sqrt{t^{(N)^2} + u^{(N)^2}} < \delta$$

sein müsste, während nach der gemachten Annahme

$$\sqrt{t^{(N)^2} + u^{(N)^2}} \geqq \delta$$

sein soll. Wir stossen damit auf einen Widerspruch, und haben also bewiesen dass unter der bezeichneten Voraussetzung die Beträge $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$, $\sqrt{t^{(2)^2} + u^{(2)^2}}, \ldots$ nach und nach kleiner werden müssen als jede noch so kleine gegebene Grösse δ.

§ 66. Fortsetzung.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, *dass es stets eine positive Grösse Q giebt, die grösser ist, als die sämmtlichen successive zu bildenden positiven Grössen $\mathfrak{Q}^{(2)}, \mathfrak{Q}^{(3)}, \ldots$* Die in § 64 für $\mathfrak{Q}^{(2)}$ aufgestellte Bedingung besteht darin, dass dieser Werth grösser sein soll, als der absolute Betrag von jeder der Grössen

$$(1)\qquad \frac{1}{a_0}\,\frac{f''(p^{(1)} + q^{(1)} i)}{2!}\,\zeta^{(2)^2}, \ldots \frac{1}{a_0}\,\frac{f^{(n)}(p^{(1)} + q^{(1)} i)}{n!}\,\zeta^{(2)^n},$$

während $\zeta^{(2)}$ den Werth hat

$$(2)\qquad \zeta^{(2)} = -\frac{f(p^{(1)} + q^{(1)} i)}{f'(p^{(1)} + q^{(1)} i)};$$

die auf $\mathfrak{Q}^{(3)}, \ldots$ bezüglichen Bedingungen gehen aus den vorliegenden durch das entsprechende Vorwärtsschieben der Zeiger hervor. Die in (1) angeführten Grössen sind Producte aus den durch feste numerische Ausdrücke dividirten Ableitungen der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ und den Potenzen der Grösse $\zeta^{(2)}$; der Betrag jeder einzelnen Grösse wird erhalten, indem man die Beträge ihrer Factoren mit einander multiplicirt; wenn daher bewiesen wird, wie gleich geschehen soll, dass sowohl die Beträge der sämmtlichen mit numerischen Nennern versehenen Ableitungen stets unter einer gewissen Grösse liegen, wie auch dass der Betrag der Grössen $\zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \ldots$ immer kleiner bleibt als eine bestimmte Grösse, so existirt nothwendig eine Grösse Q, unter welcher $\mathfrak{Q}^{(2)}, \mathfrak{Q}^{(3)}, \ldots$ enthalten sind.

Um für die Beträge der durch die bezüglichen Zahlenfacultäten dividirten Ableitungen

$$\frac{1}{a_0}\frac{f''(x)}{2!}, \frac{1}{a_0}\frac{f'''(x)}{3!}, \ldots \frac{1}{a_0}\frac{f^{(n)}(x)}{n!},$$

in denen statt x successive die Grössen

$$p^{(1)} + q^{(1)} i,\ p^{(2)} + q^{(2)} i, \ldots$$

zu substituiren sind, obere Grenzen festzusetzen, erinnern wir uns des in § 61 bewiesenen Resultats, dass, wenn der Betrag r der complexen Grösse $p + qi$ grösser gewählt wird, als ein Werth R, der die dortigen Bedingungen (15) erfüllt, der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi) = t + ui$ die Bedingung

$$(3) \qquad \sqrt{t^2 + u^2} > \frac{r^n}{n+1}$$

erfüllen muss. Nach § 62 ist der Betrag von jeder der $n - 1$ Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$, durch welche die Gleichung $f'(\eta) = 0$ befriedigt wird, nothwendig kleiner als jeder für R anwendbare Werth. Nachdem an jener Stelle die Wurzel η_1 so bestimmt ist, dass keiner unter den Beträgen der Grössen

$$\frac{1}{a_0} f(\eta_1), \frac{1}{a_0} f(\eta_2) \ldots, \frac{1}{a_0} f(\eta_{n-1})$$

von dem Betrage A_1 der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_1) = t_0 + u_0 i$ übertroffen wird, dann lässt sich der Werth R jedenfalls so gross nehmen, dass

$$(4) \qquad \frac{R^n}{n+1} > \sqrt{t^{(0)^2} + u^{(0)^2}} = A_1$$

ist, und dies möge geschehen sein. Die Bedingung (4) kann unter Umständen von selbst erfüllt sein, wie sie es in dem behandelten Beispiel in der That ist; denn man hat dort $R = 5$, $n + 1 = 7$, $t^{(0)^2} + u^{(0)^2} = 4$. Das zu der Herstellung der Grössen $p^{(1)} + q^{(1)} i$, $p^{(2)} + q^{(2)} i, \ldots$ vorgeschriebene Verfahren liefert nur solche Beträge $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$, $\sqrt{t^{(2)^2} + u^{(2)^2}}, \ldots$ die kleiner sind als der Betrag $\sqrt{t^{(0)^2} + u^{(0)^2}}$. Deshalb kann der Betrag r von keiner der complexen Grössen $p^{(1)} + q^{(1)} i, p^{(2)} + q^{(2)} i, \ldots$ grösser oder gleich der Grösse R sein, die der Ungleichheit (4) genügt. Denn wofern $r \geq R$ ist, so folgt für den Betrag der betreffenden

Grösse $\frac{1}{a_0} f(p+qi) = t + ui$ aus der Ungleichheit (3) die Ungleichheit

$$V\overline{t^2 + u^2} > \frac{r^2}{n+1} > \frac{R^n}{n+1}, \tag{5}$$

während aus (4) die Ungleichheit

$$\frac{R^n}{n+1} > V\overline{t^{(0)^2} + u^{(0)^2}} > V\overline{t^2 + u^2} \tag{6}$$

folgen würde.

Hiemit erlangen wir die Gewissheit, dass der Betrag von jeder der Grössen $p^{(1)} + q^{(1)} i$, $p^{(2)} + q^{(2)} i, \ldots$ welche bei dem angewendeten Verfahren auftreten können, kleiner bleibt, als der bezeichnete Werth R. Dass die Grösse $\eta_1 = p^{(0)} + q^{(0)} i$ dieselbe Eigenschaft hat, ist vorhin erwähnt worden. Bei der geometrischen Interpretation liegen demnach die sämmtlichen Punkte $\eta_1 = p^{(0)} + q^{(0)} i$, $p^{(1)} + q^{(1)} i$, $p^{(2)} + q^{(2)} i, \ldots$ innerhalb des mit einem Radius gleich R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises. Vermöge des mehrfach angewendeten Hülfssatzes aus § 61 werden nun die Beträge der mit ihren Nennern versehenen Ableitungen

$$(7)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{a_0}\frac{f''(x)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\frac{a_1}{a_0} x^{n-3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_0},\\
&\frac{1}{a_0}\frac{f'''(x)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}\\
&\qquad + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\frac{a_1}{a_0} x^{n-4} + \ldots + \frac{a_{n-3}}{a_0},\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

vergrössert, indem man $\frac{a_1}{a_0}$ durch seinen Betrag L_1, $\frac{a_2}{a_0}$ durch seinen Betrag L_2 ersetzt u. s. f., und für $x = p + qi$ die Grösse R substituirt, welche grösser ist als der Betrag r von $p + qi$. So entstehen für die betreffenden Werthe die oberen Grenzen

$$(8)\left\{\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)}{2!} R^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} L_1 R^{n-3} + \ldots + L_{n-2},\\
&\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} R^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} L_1 R^{n-4} + \ldots + L_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Da die Grösse R den Bedingungen genügt

$$L_1 < \frac{R}{n+1}, L_2 < \frac{R^2}{n+1}, \ldots L_n < \frac{R^n}{n+1},$$

so kann man die einzelnen in (8) angegebenen Werthe noch grösser machen, indem man $\frac{R}{n+1}$ statt L_1, $\frac{R^2}{n+1}$ statt L_2 setzt, u. s. f. Dies liefert die folgenden Ausdrücke, welche nur den Werth R enthalten

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_2 = \dfrac{n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+2\,.\,1}{2!\,(n+1)} R^{n-2}, \\ \Phi_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)(n+3)+\ldots+3.2.1}{3!\,(n+1)} R^{n-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und die Eigenschaft haben, die Beträge der durch die zugehörigen Zahlenfacultäten dividirten bezüglichen Ableitungen zu übertreffen. Das Vorhandensein solcher Ausdrücke war aber nachzuweisen.

Die Grössen $\zeta^{(2)}$, $\zeta^{(3)}$, .. werden nach der Vorschrift der Gleichung (2) erhalten, indem in den Ausdruck

$$(10)\qquad -\frac{f(p+qi)}{f'(p+qi)}$$

für $p+qi$ nach einander die Grössen

$$p^{(1)}+q^{(1)}i,\ p^{(2)}+q^{(2)}i)\ldots$$

eingesetzt werden. Für die Function $f'(x)$ des $(n-1)$ten Grades, welche den Nenner bildet, ist in § 62 unter (5) die Zerlegung in Factoren des ersten Grades

$$(11)\qquad \frac{1}{a_0}f'(x) = (x-\eta_1)(x-\eta_2)\ldots(x-\eta_{n-1})$$

angegeben worden.

Diese für jeden Werth von x gültige Darstellung erlaubt, statt x die beliebige complexe Grösse $p+qi$ zu substituiren; dadurch ergiebt sich eine neue Darstellung für den Nenner des Ausdruckes (10) und der vollständige Ausdruck verwandelt sich in den folgenden

$$(12)\qquad -\frac{\frac{1}{a_0}f(p+qi)}{(p+qi-\eta_1)(p+qi-\eta_2)\ldots(p+qi-\eta_{n-1})}.$$

Bei den zur Anwendung kommenden Werthen von $p+qi$ nimmt der Zähler $-\frac{1}{a_0}f(p+qi)$ nur solche Werthe an, deren Betrag kleiner ist, als der Betrag $\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}}$ der Grösse $\frac{1}{a_0}f(p^{(0)}+q^{(0)}i) = \frac{1}{a_0}f(\eta_1)$, und es lässt sich für jeden Factor

des Nenners $p + qi - \eta_g$, wo g die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, .. n-1$ durchläuft, eine zugehörige die Null übertreffende Grösse ϱ_g bezeichnen, welche immer kleiner bleibt als der Betrag des Factors.

Die Formel (3) des § 63 enthält die nach den Potenzen der Grösse z geordnete Entwickelung der Function $\frac{1}{a_0} f(\eta_1 + z)$. Wenn in der Function $\frac{1}{a_0} f(x)$ die Veränderliche x durch das mit der Wurzel η_g gebildete Aggregat $\eta_g + z$ ersetzt wird, so folgt aus denselben Grundsätzen die der Wurzel η_g entsprechende Entwickelung

$$(13)\quad \frac{1}{a_0} f(\eta_g + z) = \frac{1}{a_0} f(\eta_g) + \frac{1}{a_0} \frac{f^{(b_g+1)}(\eta_g)}{(b_g+1)!} z^{b_g+1} + .. + \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(\eta_g)}{n!} z^n;$$

die Zahl b_g giebt hier nach (4) des § 62 an, eine wievielfache Wurzel η_g von der Gleichung $f'(\eta) = 0$ ist, und es leuchtet ein, dass solche unter den Gleichungen (13), die sich auf zwei einander gleiche Wurzeln beziehen, zusammen fallen. In § 62 war der absolute Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_g)$ gleich A_g gesetzt worden, ferner

$$(14)\qquad A_1 = \sqrt{t^{(0)2} + u^{(0)2}},$$

zugleich darf keine der Differenzen $A_g - A_1$ negativ sein. Weil nun der Betrag $\sqrt{t^{(1)2} + u^{(1)2}}$ der complexen Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(1)} + q^{(1)} i)$ unter dem Betrage $\sqrt{t^{(0)2} + u^{(0)2}}$ liegt, so kann immer eine von Null verschiedene positive Grösse Δ so gewählt werden, dass

$$(15)\qquad \sqrt{t^{(0)2} + u^{(0)2}} - \sqrt{t^{(1)2} + u^{(1)2}} > \Delta$$

ist. Es ist aber möglich zu zeigen, dass, wenn in der Gleichung (13) der Betrag von z nicht über einer gewissen Grösse ϱ_g liegt, der Betrag von $\frac{1}{a_0} f(\eta_g + z)$ grösser sein muss, als die Grösse $A_1 - \Delta$.

Aus dem Lemma des § 61 ergiebt sich, dass, sobald auf der rechten Seite der Gleichung (13) statt des ersten Gliedes dessen Betrag A_g gesetzt wird und statt der sämmtlichen übrigen Glieder deren Beträge, *negativ genommen*, gesetzt werden, und

wenn das so gebildete Resultat einen positiven Werth hat, der Betrag der linken Seite $\frac{1}{a_0} f(\eta_g + z)$ grösser als jenes Resultat oder äussersten Falles demselben gleich sein muss. Wir stellen jetzt für den Betrag von z die Forderung auf, dass der Betrag von jeder der Grössen

$$(16) \qquad \frac{1}{a_0}\frac{f^{(b_g+1)}(\eta_g)}{(b_g+1)!} z^{b_g+1}, \ldots \frac{1}{a_0}\frac{f^{(n)}(\eta_g)}{n!} z^n$$

kleiner sei als die positive Grösse $\frac{A_g - A_1 + \varDelta}{n - b_g}$, dann wird das Aggregat dieser $n - b_g$ Beträge kleiner als die Grösse $A_g - A_1 + \varDelta$. Fügt man zu dem Betrage A_g dieses Aggregat, *negativ genommen*, hinzu, so ist mithin das Ergebniss grösser als die Differenz $A_g - (A_g - A_1 + \varDelta)$, welche den die Null übertreffenden Werth $A_1 - \varDelta$ hat. Folglich ist unter der für den Betrag von z aufgestellten Bedingung der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(\eta_g + z)$ grösser als der Werth $A_1 - \varDelta$. Die in Rede stehende Bedingung kann auch in der vorhin angedeuteten Gestalt, nämlich so ausgedrückt werden, dass für den bestimmten Werth des Zeigers g der Betrag der Grösse z gleich oder kleiner sei als eine reelle positive Grösse ϱ_g; ϱ_g muss dann so beschaffen sein, dass der Betrag von jeder der Grössen

$$(16^*) \qquad \frac{1}{a_0}\frac{f^{(b_g+1)}(\eta_g)}{(b_g+1)!} \varrho_g^{b_g+1}, \ldots \frac{1}{a_0}\frac{f^{(n)}(\eta_g)}{n!} \varrho_g^n$$

unter der Grösse $\frac{A_g - A_1 + \varDelta}{n - b_g}$ liegt.

Wenn in der Gleichung (13) die Grösse $\eta_g + z = p + qi$ gesetzt wird, so ist $z = p + qi - \eta_g$. Das so eben abgeleitete Resultat hat demnach den Inhalt, dass der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi)$ grösser sein muss, als der Werth $A_1 - \varDelta$, sobald für einen bestimmten Werth des Zeigers g der Betrag der Grösse $p + qi - \eta_g$ gleich oder kleiner ist als der definirte Werth ϱ_g. Der Betrag der Grösse $p + qi - \eta_g$ ist, geometrisch gedeutet, das Mass des Abstandes zwischen den beiden Punkten der Ebene

$p + qi$ und η_g. Nach den getroffenen Annahmen hat die Gleichung $f'(\eta) = 0$ die Anzahl b_g von Wurzeln, die gleich einer bestimmten Wurzel η_g sind, und es sollen, was offenbar immer möglich ist, die Grössen ϱ_g, welche zu gleichen Wurzeln η_g gehören, dann auch zusammenfallen. Wir denken uns nun um jeden Punkt η_g der Ebene mit dem zugeordneten Werthe ϱ_g als Radius einen Kreis beschrieben. Ein Punkt $p + qi$ der Ebene liegt innerhalb des um den Punkt η_g beschriebenen Kreises, oder auf demselben oder ausserhalb des Kreises, je nachdem der Betrag der Grösse $p + qi - \eta_g$ kleiner als ϱ_g, gleich ϱ_g oder grösser als ϱ_g ist. Wir erkennen also, dass der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi)$, welcher, sobald der Punkt $p + qi$ mit dem Centrum η_g zusammenfällt, gleich A_g wird, grösser bleiben muss, als die Grösse $A_1 - \varDelta$, wofern der Punkt $p + qi$ innerhalb eines bestimmten jener Kreise oder auf der Peripherie von einem jener Kreise liegt.

Nach der Ungleichheit (15) ist die Grösse $A_1 - \varDelta = \sqrt{t^{(0)^2} + u^{(0)^2}} - \varDelta$ grösser als der Werth $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$, folglich muss der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p+qi)$ auch grösser sein als der Werth $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$, so lange für einen einzelnen Zeiger g der Betrag der Grösse $p + qi - \eta_g$ kleiner oder gleich ϱ_g ist. Der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p + qi)$ ist aber für die Substitution $p + qi = p^{(1)} + q^{(1)} i$ gleich dem Werthe $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$ selbst, und für alle bei dem erörterten Verfahren später vorkommenden Bestimmungen der Grösse $p + qi$ kleiner als der Werth $\sqrt{t^{(1)^2} + u^{(1)^2}}$. Es muss daher für alle bezeichneten an die Stelle von $p + qi$ zu setzenden Grössen $p^{(1)} + q^{(1)} i$, $p^{(2)} + q^{(2)} i, \ldots$ jeder einzelne der Beträge $p + qi - \eta_g$ grösser sein als der zugeordnete Werth ϱ_g. Diese Thatsache lautet in der geometrischen Sprache so, dass alle Punkte $p^{(1)} + q^{(1)} i$, $p^{(2)} + q^{(2)} i \ldots$, welche durch unser Verfahren successive erhalten werden, ausserhalb der einzelnen Kreise liegen müssen,

welche um die Punkte η_g mit den zugeordneten Radien ϱ_g beschrieben sind, und correspondirt mit der vorhin erwähnten Eigenschaft, dass alle jene Punkte sich innerhalb des Kreises befinden, der um den Nullpunkt mit dem Radius R beschrieben ist.

Der Betrag des Products $(p+qi-\eta_1)(p+qi-\eta_2)\,..\,(p+qi-\eta_{n-1})$ ist gleich dem Product von den Beträgen seiner Factoren und bildet daher das Mass für das Product aus den Abständen des Punktes $p+qi$ von jedem der Punkte η_g. Da der Betrag des Factors $p+qi-\eta_g$ grösser bleibt als die Grösse ϱ_g, so ist der Betrag des Products nothwendig grösser als das Product

$$\varrho_1\,\varrho_2 \cdots \varrho_{n-1}. \tag{17}$$

Hieraus folgt, dass der Betrag des Ausdruckes (12), bei dem der Betrag des Zählers, wie schon erwähnt, unter der Grösse $\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}}$ liegt, für alle in Rede stehenden Bestimmungen der Grösse $p+qi$ kleiner ist als der Werth

$$\frac{\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}}}{\varrho_1\,\varrho_2 \cdots \varrho_{n-1}}, \tag{18}$$

und damit ist unserer Behauptung gemäss ein Werth angegeben, über welchen hinaus die Grössen $\zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \ldots$ niemals wachsen können. Auf diese Weise steht die Existenz einer Grösse Q fest, unter welcher $\mathfrak{Q}^{(2)}, \mathfrak{Q}^{(3)}, ..$ liegen müssen. Daher ist es jetzt unbedingt bewiesen, dass die successive zu bildenden

$$\sqrt{t^{(0)^2}+u^{(0)^2}},\quad \sqrt{t^{(1)^2}+u^{(1)^2}},\quad \sqrt{t^{(2)^2}+u^{(2)^2}},\ ..$$

nach und nach kleiner werden, als eine beliebig kleine gegebene Grösse.

Wir wollen uns jetzt noch davon überzeugen, dass sowohl der reelle wie der imaginäre Theil von den erhaltenen Werthen $p^{(1)}+q^{(1)}i,\ p^{(2)}+q^{(2)}i, ..p^{(N)}+q^{(N)}i, ..$ einer bestimmten Grenze beliebig nahe kommt. Die mit $\zeta^{(N)}$ und $\zeta^{(N+1)}$ bezeichneten Grössen werden nach § 64 und der Formel (10) dieses § durch die Gleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} \zeta^{(N)} = -\dfrac{\dfrac{1}{a_0} f(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)}{\dfrac{1}{a_0} f'(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)}, \\[2ex] \zeta^{(N+1)} = -\dfrac{\dfrac{1}{a_0} f(p^{(N)} + q^{(N)} i)}{\dfrac{1}{a_0} f'(p^{(N)} + q^{(N)} i)} \end{cases}$$

dargestellt. Weil hier der Betrag des Zählers für ein hinreichend grosses N kleiner wird als eine beliebig kleine gegebene Grösse, der Betrag des Nenners aber stets grösser bleibt als das Product (17), welches φ_1 genannt werden möge, so wird der Betrag von $\zeta^{(N)}$ und $\zeta^{(N+1)}$ selbst beliebig klein. Man darf sich deshalb das Verfahren so weit fortgesetzt denken, dass es zulässig ist, bei der Bestimmung der Grösse $p^{(N)} + q^{(N)} i$ die zugeordnete Grösse $h^{(N)} = 1$ zu nehmen. Hierzu ist wegen der Gleichung (7) des § 64 nothwendig und hinreichend, dass der Betrag des Ausdruckes

$$(20)\quad \frac{1}{a_0} \frac{f''(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)}{2!} \zeta^{(N)^2} + \ldots + \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)}{n!} \zeta^{(N)^n}$$

kleiner sei als der Betrag des Ausdruckes $\frac{1}{a_0} f(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)$.

Alsdann setzt man

$$(21)\quad p^{(N)} + q^{(N)} i = p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i + \zeta^{(N)},$$

und die Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(N)} + q^{(N)} i)$ wird dem Ausdrucke (20) gleich. In dem Ausdrucke (20) mögen die Ableitungen

$$\frac{1}{a_0} \frac{f''(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)}{2!}, \ldots \frac{1}{a_0} \frac{f^{(n)}(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)}{n!},$$

respective durch die in (9) dieses § enthaltenen positiven Werthe ersetzt werden, welche immer grösser sind als die entsprechenden Beträge, und die Grösse $\zeta^{(N)}$ durch ihren Betrag $\theta^{(N)}$, dann entsteht ein Aggregat, das nach unserem Lemma grösser als der Betrag von (20) oder ihm höchstens gleich ist. Für $\theta^{(N)}$ wird die für einen hinreichend grossen Werth der Zahl N stets erfüllbare

Forderung aufgestellt, dass, während c eine reelle positive unter der Einheit liegende Grösse bedeutet,

$$(22) \qquad \Phi_2\, \theta^{(N)} + \Phi_3 \left(\theta^{(N)}\right)^2 + \ldots + \Phi_n \left(\theta^{(N)}\right)^{n-1} < c\, \varphi_1$$

sei. Dann folgt für das angedeutete Aggregat die Ungleichheit

$$(23) \quad \Phi_2 \left(\theta^{(N)}\right)^2 + \Phi_3 \left(\theta^{(N)}\right)^3 + \ldots + \Phi_n \left(\theta^{(N)}\right)^n < c\, \varphi_1\, \theta^{(N)}.$$

Nun lehrt der Ausdruck von $\zeta^{(N)}$ in (19), dass $\varphi_1\, \theta^{(N)}$ kleiner ist als der Betrag der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i)$, und wir sahen ausserdem, dass der Betrag des Ausdruckes (20) kleiner oder gleich der linken Seite von (23) ist. Mithin zieht die Forderung (22) die Folge nach sich, dass die für $\zeta^{(N)}$ aufgestellte Bedingung erfüllt ist. Da ferner der Ausdruck (20) gleich der Grösse $\frac{1}{a_0} f(p^{(N)} + q^{(N)} i)$ ist, so muss der Betrag $\theta^{(N+1)}$ der Grösse $\zeta^{(N+1)}$ nach (19) kleiner sein als der Betrag des Ausdruckes (20), durch die Grösse φ_1 dividirt, welche selbst kleiner ist als der Betrag des Nenners $\frac{1}{a_0} f'(p^{(N)} + q^{(N)} i)$. Der Betrag $\theta^{(N+1)}$ muss deshalb vermöge der Ungleichheit (23) auch kleiner sein, als der Werth

$$\frac{c\, \varphi_1\, \theta^{(N)}}{\varphi_1} = c\, \theta^{(N)}.$$

Hieraus ergiebt sich aber weiter, dass aus der Ungleichheit (22) die Ungleichheit

$$(24) \quad \Phi_2\, \theta^{(N+1)} + \Phi_3 \left(\theta^{(N+1)}\right)^2 + \ldots + \Phi_n \left(\theta^{(N+1)}\right)^{n-1} < c\, \varphi_1$$

abgeleitet werden kann, und darum ist es gestattet, durch denselben Process mittelst dessen $p^{(N)} + q^{(N)} i$ aus $p^{(N-1)} + q^{(N-1)} i$ erhalten wurde, $p^{(N+1)} + q^{(N+1)} i$ aus $p^{(N)} + q^{(N)} i$ zu erzeugen, und diesen Process stets zu wiederholen. Der Kern der Betrachtung liegt in dem gelieferten Nachweise der mit der reellen positiven unter der Einheit liegenden Grösse c gebildeten Ungleichheit

$$(25) \qquad \theta^{(N+1)} < c\, \theta^{(N)}.$$

Da alle bezüglichen Umstände bei den folgenden Schnitten dieselben sind, so gelten die ferneren Ungleichheiten

(26) $$\theta^{(N+2)} < c\,\theta^{(N+1)},\ \theta^{(N+3)} < c\,\theta^{(N+2)},\ \ldots$$

In Folge der Gleichung (21) ist für eine beliebige den Werth N übertreffende Zahl N'

(27) $$p^{(N')} + q^{(N')}i = p^{(N)} + q^{(N)}i + \zeta^{(N+1)} + \zeta^{(N+2)} + \ldots + \zeta^{(N')},$$

daher muss der Betrag der Differenz $p^{(N')} + q^{(N')}i - (p^{(N)} + q^{(N)}i)$ kleiner sein, als das Aggregat der Beträge

(28) $$\theta^{(N+1)} + \theta^{(N+2)} + \ldots + \theta^{(N')}.$$

Dieses Aggregat ist aber in Folge der Ungleichheiten (25) und (26) kleiner als die Summe

(29) $$\theta^{(N)}(c + c^2 + c^3 + \ldots + c^{N'-N}) = \theta^{(N)}\frac{c - c^{N'-N+1}}{1-c},$$

und, weil c ein positiver echter Bruch und $\frac{c - c^{N'-N+1}}{1-c} < \frac{c}{1-c}$ ist, auch kleiner als der Ausdruck

(30) $$\theta^{(N)}\frac{c}{1-c}.$$

Allein der positive echte Bruch c kann nach Willkür kleiner genommen werden als irgend ein gegebener Werth, darum hat auch der Ausdruck $\theta^{(N)}\frac{c}{1-c}$ dieselbe Eigenschaft, und es leuchtet ein, dass der Betrag der Differenz $p^{(N')} + q^{(N')}i - (p^{(N)} + q^{(N)}i)$ für einen passend gewählten Werth von c kleiner wird als eine beliebig kleine gegebene Grösse, wie gross auch immer die Zahl N' genommen werde. Das heisst aber nichts anderes, als dass sowohl der absolute Werth der Differenz $p^{(N')} - p^{(N)}$ als auch der absolute Werth der Differenz $q^{(N')} - q^{(N)}$ beliebig klein wird, oder dass sowohl die bestimmten Grössen $p^{(N)}, p^{(N+1)}, \ldots$ gegen einen festen Grenzwerth convergiren wie auch die bestimmten Grössen $q^{(N)}, q^{(N+1)}, \ldots$ gegen einen festen Grenzwerth convergiren, wie behauptet worden war.

Hiermit ist also *die Existenz einer Wurzel für die beliebig gegebene Gleichung des nten Grades* $f(\xi) = 0$ in vollständiger Allgemeinheit bewiesen.

§ 67. Zerlegung einer rationalen ganzen Function eines beliebig hohen Grades von einer Variable in Factoren des ersten Grades.

Nachdem in § 45 der Satz bewiesen war, dass die Zerlegung einer rationalen ganzen Function des $n$ten Grades von x in Factoren des ersten Grades, wenn sie überhaupt bewerkstelligt werden kann, nur auf eine einzige Weise möglich ist, wurde auf die Analogie dieses Satzes mit dem Satze (2) des § 7 hingewiesen, dass jede ganze Zahl nur auf eine einzige Weise als ein Product von Primzahlen dargestellt werden kann, und es wurde zugleich betont, dass zwar die Zerlegbarkeit jeder ganzen Zahlen in ein Product von Primzahlen dargethan sei, dass aber noch entschieden werden müsse, ob eine gegebene rationale ganze Function einer Veränderlichen x immer in Factoren des ersten Grades zerlegt werden könne. Durch die so eben vollendete Untersuchung ist für jede gegebene Function des $n$ten Grades $f(x)$ die Existenz einer Grösse ξ begründet worden, vermöge deren $f(\xi)$ gleich Null wird; hieraus folgt nach dem Satze (1) des § 43, dass $f(x)$ gleich dem algebraischen Product des Factors $x-\xi$ in eine Function des $(n-1)$ten Grades $f_1(x)$ ist, in welcher x^{n-1} denselben Coefficienten a_0 hat, mit dem x^n in der Function $f(x)$ multiplicirt war. Da nun auch für alle Functionen von niedrigerem als dem $n$ten Grade die Existenz einer Wurzel der entsprechenden Gleichung feststeht, so bringt das im § 45 entwickelte Verfahren, wie schon in § 62 erwähnt worden, die verlangte Zerlegung hervor

$$(1)\qquad f(x)=a_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\,\ldots\,(x-\xi_n).$$

Aus diesen Gründen ist die Zerlegung einer rationalen ganzen Function des nten Grades von x in n Factoren des ersten Grades stets möglich und nur auf eine einzige Weise möglich, gerade so, wie die Zerlegung einer gegebenen Zahl in Primfactoren immer möglich und nur auf eine einzige Weise möglich ist.

Der angeführte § 43 erhält die Definition, dass, wenn eine rationale ganze Function $f(x)$ für ein unbestimmtes x als ein Product von zwei rationalen ganzen Functionen von x dargestellt werden kann, jede der beiden Functionen *ein algebraischer Theiler von* $f(x)$ genannt wird; vermöge dieser Definition ist

dann eine rationale ganze Function des nullten Grades oder eine reine Constante ein algebraischer Theiler von jeder rationalen ganzen Function. Sobald nun zwei rationale ganze Functionen von x gegeben sind, $f(x)$ vom $n$ten Grade, und $g(x)$ vom $s$ten Grade, so *lässt sich die Frage nach der Function des höchsten Grades der Variable x aufwerfen, welche ein gemeinsamer Theiler von $f(x)$ und von $g(x)$ ist.* Eine Constante ist stets ein gemeinsamer Theiler von $f(x)$ und $g(x)$; wenn es daher keinen gemeinsamen Theiler giebt, der von höherem Grade als dem nullten Grade ist, so wendet man den Ausdruck an, dass $f(x)$ und $g(x)$ *ohne gemeinsamen Theiler* sind. Der gemeinsame Theiler des höchsten Grades in Bezug auf x, welchen $f(x)$ und $g(x)$ haben, wird ihr *grössester gemeinsamer Theiler* genannt.

Für die Ermittelung des grössesten gemeinsamen Theilers von den Functionen $f(x)$ und $g(x)$ macht es einen wesentlichen Unterschied, ob man sich des Satzes von der Zerlegbarkeit jeder rationalen ganzen Function in Factoren des ersten Grades bedienen darf oder nicht. Wir wollen zunächst die Anwendung dieses Satzes gestatten.

Es sei $\varrho(x)$ eine Function von x, die in $f(x)$ und in $g(x)$ aufgeht und so beschaffen ist, dass keine Function eines höheren Grades als $\varrho(x)$ zugleich in $f(x)$ und $g(x)$ aufgehen kann; auch darf verausgesetzt werden, dass die höchste Potenz von x, die in $\varrho(x)$ vorkommt, den Coefficienten Eins habe. Die Function $f(x)$ werde wie früher bezeichnet und liefere die in (1) gegebene Zerlegung; die Function $g(x)$ habe den Ausdruck

(2) $$g(x) = e_0 x^s + e_1 x^{s-1} + \ldots + e_s$$

und sei folgendermassen zerlegt

(3) $$g(x) = e_0 (x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_s).$$

Das Vorhandensein des grössesten gemeinsamen Theilers $\varrho(x)$ zieht jetzt die beiden Gleichungen nach sich

(4) $$f(x) = a_0 \beta(x) \varrho(x), \quad g(x) = e_0 \gamma(x) \varrho(x),$$

wo vermöge des Satzes (1) in § 44 der Coefficient der höchsten Potenz von x sowohl in $\beta(x)$ wie in $\gamma(x)$ die Einheit ist, und wo die Functionen $\beta(x)$ und $\gamma(x)$ *keinen gemeinsamen Theiler* haben dürfen; denn hätten sie einen solchen, so würde das Product dieses Theilers mit $\varrho(x)$ ein gemeinsamer Theiler von $f(x)$ und $g(x)$ sein, der einen höheren Grad hätte als $\varrho(x)$.

Nun können sowohl $\varrho(x)$ wie auch $\beta(x)$ und $\gamma(x)$ in Folge des anzuwendenden Satzes in Factoren des ersten Grades zerlegt werden, in denen allen die Veränderliche x den Coefficienten Eins hat, den Fall ausgenommen, dass eine der betreffenden Functionen vom nullten Grade folglich in diesem Falle selbst gleich der Einheit ist, und zwar ist die Zerlegung nur auf eine einzige Weise möglich. Ist diese Zerlegung geschehen, so wird das Product $\beta(x)\varrho(x)$ gleich einem Product von Factoren des ersten Grades, und das Product $\gamma(x)\,\varrho(x)$ ebenfalls gleich einem Product von Factoren des ersten Grades; das erstere kann wegen der Gleichung (1) von dem Product $(x-\xi_1)(x-\xi_2)\,..\,(x-\xi_n)$, das zweite wegen der Gleichung (3) von dem Product $(x-\omega_1)$ $(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_s)$ nur in der Anordnung verschieden sein. Es müssen daher die Factoren $x-\xi_1, x-\xi_2, \ldots x-\xi_n$ in zwei Gruppen zerfallen, dergestalt, dass das Product der Individuen der einen Gruppe gleich $\beta(x)$ und das Product der Individuen der anderen Gruppe gleich $\varrho(x)$ wird; desgleichen müssen die Factoren $x-\omega_1, x-\omega_2, \,..\, x-\omega_s$ in zwei Gruppen zerfallen, von denen die eine ein Product gleich $\gamma(x)$, die andere ein Product gleich $\varrho(x)$ ergiebt. Die Functionen $\beta(x)$ und $\gamma(x)$, welche ohne gemeinsamen Theiler sein sollen, dürfen nicht für denselben Werth ψ von x verschwinden, denn sonst hätte sowohl $\beta(x)$ wie $\gamma(x)$ den gemeinsamen Theiler $x-\psi$. Es darf deshalb kein Factor des ersten Grades von $\beta(x)$ einem Factor des ersten Grades von $\gamma(x)$ gleich sein. Die Bestimmung der Function $\varrho(x)$ erfolgt mithin dadurch, dass ermittelt wird, welche von den Factoren

$$(5)\qquad (x-\xi_1), (x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)$$

gleichzeitig unter den Factoren

$$(6)\qquad (x-\omega_1), (x-\omega_2)\ldots(x-\omega_s)$$

vorkommen. Ein Factor in (5) wird einem Factor in (6) dann und nur dann gleich, wenn die zugehörige unter den Grössen $\xi_1, ..\xi_n$ mit der zugehörigen unter den Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ zusammenfällt. Kommt dies überhaupt nicht vor, so hat man $\varrho(x) = 1$, und die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ sind ohne gemeinsamen Theiler. Wofern aber der genannte Fall eintritt, so müssen *alle Grössen* aufgesucht werden, die sich sowohl unter den $\xi_1, ..\xi_n$, wie auch unter den $\omega_1, \omega_2, ..\omega_s$ befinden, das heisst *alle diejenigen Grössen, welche sowohl Wurzeln der Glei-*

chung $f(\xi) = 0$ *wie auch der Gleichung* $g(\omega) = 0$ *sind*, und dann ist das Product der zugeordneten in (5) und (6) gemeinsam auftretenden Factoren gleich der gesuchten Function $\varrho(x)$. Dadurch werden $\beta(x)$ und $\gamma(x)$ beziehungsweise die Producte von den übrig bleibenden Factoren aus (5) und aus (6), und, wie verlangt worden, ist unter den Factoren, die $\beta(x)$ bilden, keiner von denen vorhanden, die $\gamma(x)$ ausmachen. Es leuchtet hiernach ein, dass die Function $\varrho(x)$, bei der die höchste Potenz von x den Coefficienten Eins haben soll, vollständig bestimmt ist, und dass es also für zwei ganze Functionen $f(x)$ und $g(x)$ nur einen einzigen grössesten gemeinsamen Theiler giebt; solche Theiler, die sich nur durch die Multiplication mit Constanten unterscheiden, werden nicht als von einander verschiedene Theiler angesehen.

Die mitgetheilte Methode zur Aufsuchung des grössesten gemeinsamen Theilers von zwei Functionen $f(x)$ und $g(x)$ entspricht dem in § 8 auseinandergesetzten Verfahren zu der Aufsuchung des grössesten gemeinsamen Theilers von zwei ganzen Zahlen, für welche die Zerlegung in Primfactoren gegeben ist. Der § 5 enthält ein Verfahren, um den grössesten gemeinsamen Theiler von zwei ganzen Zahlen zu bestimmen, wobei von der Zerlegung einer Zahl in einfache Factoren nicht gesprochen wird, und zwar bildet das erwähnte Verfahren die Grundlage für den vorgetragenen Beweis des Satzes, dass eine Zahl immer nur auf eine Weise als ein Product von Primfactoren dargestellt werden kann.

Es lässt sich nun durch ein Verfahren, welches dem bezeichneten genau nachgebildet ist, der grössesste gemeinsame Theiler von zwei ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ aufsuchen, ohne dass man den Satz von der Zerlegbarkeit der ganzen Functionen in Factoren des ersten Grades voraussetzt, und dieses Verfahren soll demnächst entwickelt werden.

§ 68. Aufsuchung des grössesten gemeinsamen Theilers von zwei ganzen Functionen einer Variable.

Die gegebenen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ können entweder von verschiedenen Graden oder von demselben Grade sein; es wird angenommen, dass der Grad n der ersteren niedriger

oder doch wenigstens nicht höher sei als der Grad s der letzteren. Damit diese Unterscheidung mit Sicherheit getroffen werden kann, muss es feststehen, dass weder der Coefficient a_0 des höchsten Gliedes $a_0 x^n$ von $f(x)$ noch der Coefficient e_0 des höchsten Gliedes $e_0 x^s$ von $g(x)$ gleich Null ist. Es lässt sich nun eine ganze Function $q(x)$ des $(s-n)$ten Grades und eine Function $r(x)$, die von niedrigerem Grade als dem $n$ten Grade ist, so bestimmen, dass für ein bestimmtes x die Gleichung

$$g(x) = f(x)\, q(x) + r(x) \tag{1}$$

erfüllt ist. Ein zu diesem Ziele führendes Verfahren wird *die nach den fallenden Potenzen der Veränderlichen x geordnete Division der ganzen Function $g(x)$ durch die ganze Function $f(x)$ genannt;* in Bezug auf dasselbe wiederholt sich die in § 11 gemachte Bemerkung, dass man mit dem Namen der Division verschiedene Gattungen von Begriffen bezeichnet. Nachdem die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ nach den fallenden Potenzen der Veränderlichen x geordnet sind, beginnt das Divisionsverfahren damit, dass in der Function $g(x)$ die Glieder, die von höherem Grade als n und vom Grade n sind, durch das höchste Glied $a_0 x^n$ der Function $f(x)$ dividirt werden, so dass die ganze Function

$$\frac{e_0 x^{s-n}}{a_0} + \frac{e_1 x^{s-n-1}}{a_0} + \ldots + \frac{e_{s-n}}{a_0} \tag{2}$$

entsteht. Diese wird mit $f(x)$ multiplicirt und das Product von $g(x)$ subtrahirt; weil das Product mit dem höchsten Gliede $e_0 x^n$ beginnt, so ist die bezeichnete Differenz von niedrigerem als dem $s$ten Grade. Wofern die Differenz zugleich von niedrigerem als dem $n$ten Grade ist, so ergiebt sie, indem die Function (2) für $q(x)$ genommen wird, die in der Gleichung (1) mit $r(x)$ bezeichnete Function. Wenn dagegen jene Differenz nicht von niedrigerem als dem $n$ten Grade ist, so kann mit derselben ebenso verfahren werden, wie mit $g(x)$ verfahren ist; man erhält eine neue Function an der Stelle von (2) und indem man diese Function mit $g(x)$ multiplicirt und von der ersten Differenz subtrahirt, eine neue Differenz, welche von niedrigerem Grade ist als die erste. Weil aber die Zahl s eine endliche ist, so muss man nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen der

Operation zuletzt dahin gelangen, dass eine Differenz hervorgeht, die von niedrigerem Grade als dem $n$ten Grade ist. Dann liefert das Aggregat der Ausdrücke, die successive der ganzen Function (2) entsprechen, eine ganze Function $q(x)$, und jene letzte Differenz eine ganze Function $r(x)$ von niedrigerem als dem $n$ten Grade, durch welche Functionen die Gleichung (1) befriedigt wird. Nach der Analogie mit den Ausdrücken, die bei der Division der ganzen Zahlen gebräuchlich sind, heisst $g(x)$ *der Dividendus*, $f(x)$ *der Divisor*, $q(x)$ *der Quotient*, $r(x)$ *der Rest.*

Hiebei ist aber darauf zu achten, dass, auf welchem Wege man auch eine ganze Function $Q(x)$ und eine ganze Function $R(x)$ von niedrigerem als dem $n$ten Grade finden möge, welche die betreffende Gleichung

(1*) $$g(x) = f(x)\, Q(x) + R(x)$$

erfüllen, sowohl die eine wie die andere Function eindeutig bestimmt ist. Wollte man annehmen, dass verschiedene Bestimmungsweisen möglich seien, dass also die Gleichungen (1) und (1*) bestehen können, ohne dass sowohl $q(x) = Q(x)$, wie auch $r(x) = R(x)$ wäre, so würde aus diesen Gleichungen durch Subtraction die Gleichung

(3) $$0 = f(x)\,(q(x) - Q(x)) + r(x) - R(x)$$

folgen. Die Differenz $r(x) - R(x)$, welche eine Function *von niedrigerer als der $n$ten Ordnung* ist, müsste deshalb für ein unbestimmtes x gleich dem Product von den beiden ganzen Functionen $f(x)$ und $Q(x) - q(x)$ sein, von denen die erste *von der $n$ten Ordnung* ist. Es kann aber nach einem Corollar des Satzes (2) in § 44 eine rationale ganze Function einer Variable x keinen algebraischen Theiler haben, der in Bezug auf x von höherem Grade ist, als die Function selbst. Also würde ein Widerspruch entstehen, wenn nicht für ein unbestimmtes x die Differenz $r(x) - R(x)$ gleich Null wäre; dann muss aber weiter für ein unbestimmtes x auch die Differenz $q(x) - R(x)$ gleich Null sein; denn das Product $f(x)\,(q(x) - Q(x))$ kann nicht verschwinden, ohne dass einer seiner Factoren verschwindet, und es giebt offenbar unbeschränkt viele Werthe von x, für welche die Function $f(x)$, bei der der Coefficient e_0 nicht gleich Null sein darf, einen von Null verschiedenen Werth annimmt, und

folglich $q(x) - Q(x)$ verschwinden muss. Da nun für ein unbestimmtes x sowohl die Differenz $r(x) - R(x)$ wie auch die Differenz $q(x) - Q(x)$ gleich Null wird, so müssen nach dem Satze (1) des § 44 die Functionen $r(x)$ und $R(x)$ mit einander in ihren bezüglichen Coefficienten übereinstimmen und desgleichen die Functionen $q(x)$ und $Q(x)$, wie behauptet worden war.

Sobald in der Gleichung (1) der Rest $r(x)$ verschwindet, so geht die Function $g(x)$ durch die Function $f(x)$ algebraisch auf, und $f(x)$ selbst ist der gesuchte grösseste gemeinsame Theiler. Wenn $r(x)$ nicht verschwindet, das heisst, wenn nicht alle Coefficienten dieser Function gleich Null sind, so ist ihr Grad, welcher höchstens der $(n-1)$te sein kann, durch den Coefficienten der höchsten Potenz von x bestimmt, welcher nicht gleich Null ist. Die Kenntniss des *wirklichen Grades* der Function $r(x)$ wird hier durchaus vorausgesetzt; alsdann lässt sich für die Division der Function $f(x)$ durch $r(x)$ abermals der Quotient $q_1(x)$ und der Rest $r_1(x)$ determiniren, wo $r_1(x)$ von niedrigerem Grade ist als der gegenwärtige Divisor $r(x)$, und dieses Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis eine Division aufgeht, was nach einer endlichen Zahl von Anwendungen nothwendig geschehen muss, weil der Grad der ganzen Functionen $f(x)$, $r(x)$, $r_1(x), \ldots$ stets sinkt. So entsteht die mit (1) beginnende Reihe von Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &= r(x)\, q_1(x) + r_1(x) \\ r(x) &= r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x) \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_{\mu-1}(x) &= r_\mu(x)\, q_{\mu+1}(x) + r_{\mu+1}(x) \\ r_\mu(x) &= r_{\mu+1}(x)\, q_{\mu+2}(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Aus derselben lässt sich, da die Summe und die Differenz von den Producten einer ganzen Function $\psi(x)$ mit anderen ganzen Functionen wieder Producte der ganzen Function $\psi(x)$ mit ganzen Functionen sind, durch Anwendung gleichlautender Schlüsse wie in § 5 folgern, dass jeder gemeinsame Theiler der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in die Function $r_{\mu+1}(x)$ aufgeht, und dass $r_{\mu+1}(x)$ ein gemeinsamer Theiler von $f(x)$ und $g(x)$ ist. Vermöge des schon benutzten Corollars aus § 44 kann aber keine Function eines höheren Grades in eine Function eines

niedrigeren Grades aufgehen, mithin können $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, der von höherem Grade ist als ihr gemeinsamer Theiler $r_{\mu+1}(x)$. *Darum ist* $r_{\mu+1}(x)$ *der grösseste gemeinsame Theiler der Functionen* $f(x)$ *und* $g(x)$. *Das Criterium dafür, dass die ganzen Functionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ *keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, besteht demnach darin, dass die Restfunction* $r_{\mu+1}(x)$ *gleich einer Constante ist.*

§ 69. Entwickelung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, in einen Kettenbruch. Entwickelung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen einer Variable sind, in einen Kettenbruch.

Wenn zwei ganze Functionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben sind, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, und ferner eine beliebige ganze Function $\theta(x)$, so lassen sich immer zwei ganze Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ so bestimmen, dass die Gleichung

$$\varphi(x) f(x) + \psi(x)\, g(x) = \theta(x) \tag{1}$$

für ein beliebiges x erfüllt wird. Um diese Behauptung zu beweisen, braucht man ihre Richtigkeit nur für den Fall darzuthun, dass die Function $\theta(x)$ gleich einer Constante ist. Hiemit verhält es sich genau so, wie mit dem in § 37 begründeten, aber in anderen Zeichen ausgedrückten Satze, dass, wenn zwei positive ganze Zahlen a und b ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, und m eine beliebige Zahl ist, stets zwei ganze Zahlen k und l gefunden werden können, welche die Gleichung

$$kb + la = m \tag{2}$$

erfüllen; denn damit dieser Satz gelte, reicht es hin, die Möglichkeit der Gleichung

$$kb + la = 1 \tag{3}$$

festzustellen, und dies ist an der angeführten Stelle mit Hülfe von allgemeinen Ueberlegungen geschehen. Man kann aber auch eine Auflösung der Gleichung (3) aus der Reihe von Gleichungen erhalten, welche durch successive Divisionen entstehen und ausdrücken, dass der grösseste gemeinsame Theiler der Zahlen a und b gerade die Einheit ist. Auf einem ähnlichen Wege erhält man bei der Voraussetzung, dass die Function $\theta(x)$ gleich einer Constante ist, eine Auflösung der Gleichung (1).

Die erwähnte Reihe von Gleichungen, welche aussagen, dass die ganzen Zahlen a und b zu ihrem grössesten gemeinsamen Theiler die Einheit haben, ist nach § 6 die folgende

$$
\begin{aligned}
a &= bq + r \\
b &= rq_1 + r_1 \\
r &= r_1 q_2 + r_2 \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
r_{\mu+1} &= r_\mu\, q_{\mu+1} + 1.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Diese Reihe von Gleichungen bietet das Mittel, *um den Bruch* $\frac{a}{b}$ *in einen Kettenbruch zu verwandeln*, und wir werden jetzt auf die *Anfangsgründe der Lehre von den Kettenbrüchen* eingehen.

Dividirt man die erste Gleichung durch b, die zweite durch r, u. s. f., die letzte durch r_μ, so entstehen die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q + \frac{r}{b} \\
\frac{b}{r} &= q_1 + \frac{r_1}{r} \\
\frac{r}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\frac{r_{\mu-1}}{r_\mu} &= q_{\mu+1} + \frac{1}{r_\mu}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Hier ist $\frac{r}{b}$ ein echter Bruch, ferner der in die Einheit dividirte oder reciproke Werth desselben $\frac{b}{r}$ gleich dem Aggregat der ganzen Zahl q_1 und des echten Bruches $\frac{r_1}{r}$, folglich $\frac{r}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r}}$. Auf gleiche Weise hat man $\frac{r_1}{r} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}$, u. s. f. Demnach wird der Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Kettenbruch dargestellt

$$
\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_2 +} \cdot \;\cdot\; \cdot + \frac{1}{q_{\mu+1} +} \frac{1}{r_\mu}.
\tag{6}
$$

Man betrachtet jetzt die Brüche, welche daraus hervorgehen, dass die Kettenbruchentwickelung nicht zu Ende geführt, sondern mit jeder einzelnen der Grössen $q, q_1, \ldots$ abgebrochen wird.

Es sei

$$(7)\qquad \frac{\alpha_0}{\beta_0} = q, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = q + \frac{1}{q_1},$$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\alpha_{\mu+2}}{\beta_{\mu+2}} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{\mu+1} + \cfrac{1}{q_{\mu+2}}}}},$$

wo der Uebereinstimmung wegen $q_{\mu+2}$ für $r_{\mu+1}$ gesetzt ist. Die Grössen $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots$ haben alsdann das Bildungsgesetz

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\alpha_0 = q, & &\beta_0 = 1 \\ &\alpha_1 = qq_1 + 1, & &\beta_1 = q_1 \\ &\alpha_2 = (qq_1 + 1)\, q_2 + q, & &\beta_2 = q_1 q_2 + 1 \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

und allgemein wird α_λ aus $\alpha_{\lambda-1}$ und $\alpha_{\lambda-2}$, desgleichen β_λ aus $\beta_{\lambda-1}$ und $\beta_{\lambda-2}$ durch die Gleichungen erhalten

$$(9)\qquad \alpha_\lambda = \alpha_{\lambda-1}\, q_\lambda + \alpha_{\lambda-2}, \quad \beta_\lambda = \beta_{\lambda-1}\, q_\lambda + \beta_{\lambda-2}.$$

Man sieht, dass diese Gleichungen für $\lambda = 2$ richtig sind. Sie gelten allgemein, da sich beweisen lässt, dass dieselben, wenn sie für ein bestimmtes λ gelten, auch für das um die Einheit höhere λ bestehen müssen.

Der Bau der Gleichungen (7) lehrt, dass der Bruch $\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\beta_{\lambda+1}}$ aus dem Bruche $\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}$ entsteht, indem die Grösse q_λ durch die Grösse $q_\lambda + \frac{1}{q_{\lambda+1}}$ ersetzt wird. Wenn man nun in der aus (9) folgenden Darstellung des Bruches $\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}$ diese Substitution vornimmt, so geht die Darstellung

$$\frac{\alpha_{\lambda-1}\, q_\lambda + \alpha_{\lambda-2}}{\beta_{\lambda-1}\, q_\lambda + \beta_{\lambda-2}}$$

in den Ausdruck

$$\frac{\alpha_{\lambda-1}\, q_\lambda + \alpha_{\lambda-2} + \dfrac{\alpha_{\lambda-1}}{q_{\lambda+1}}}{\beta_{\lambda-1}\, q_\lambda + \beta_{\lambda-2} + \dfrac{\beta_{\lambda-1}}{q_{\lambda+1}}} = \frac{\alpha_\lambda\, q_{\lambda+1} + \alpha_{\lambda-1}}{\beta_\lambda\, q_{\lambda+1} + \beta_{\lambda-1}}$$

über, wo der Zähler $\alpha_\lambda\ q_{\lambda+1} + \alpha_{\lambda-1}$ gleich $\alpha_{\lambda+1}$ und der Nenner $\beta_\lambda\ q_{\lambda+1} + \beta_{\lambda-1}$ gleich $\beta_{\lambda+1}$ wird.

Dies ist aber dieselbe Bestimmung, welche in den Gleichungen (9) enthalten ist und bewiesen werden sollte.

Die zu der Kettenbruchentwickelung (6) gehörenden Brüche $\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \ldots$ werden die aufeinander folgenden *Näherungsbrüche* genannt. Da gegenwärtig die Grössen $q, q_1, \ldots$ lauter positive ganze Zahlen sind, mit Ausschluss der Null, so sind auch $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ und $\beta_0, \beta_1, \ldots$ lauter positive ganze Zahlen, und ausserdem folgt aus den Gleichungen (9), dass $\alpha_{\lambda-1} < \alpha_\lambda$, und $\beta_{\lambda-1} < \beta_\lambda$ ist, dass mithin die Individuen von jeder der beiden Reihen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ und $\beta_0, \beta_1, \ldots$ immerfort zunehmen. Wenn die erste Gleichung in (9) mit $-\beta_{\lambda-1}$, die zweite mit $+\alpha_{\lambda-1}$ multiplicirt wird, so verschwindet bei der darauf folgenden Addition der Factor der Grösse q_λ, und es entsteht die Gleichung

(10) $$\alpha_{\lambda-1}\ \beta_\lambda - \alpha_\lambda\ \beta_{\lambda-1} = -(\alpha_{\lambda-2}\beta_{\lambda-1} - \alpha_{\lambda-1}\ \beta_{\lambda-2}).$$

Die Klammer der rechten Seite verwandelt sich in die linke Seite, sobald statt des Zeigers $\lambda - 1$ der Zeiger λ gesetzt wird.

Aus diesem Grunde hat die Gleichung (10) die Bedeutung, dass, wenn nach einander die Ausdrücke

(10*) $$\alpha_0\ \beta_1 - \alpha_1\ \beta_0,\ \alpha_1\ \beta_2 - \alpha_2\ \beta_1, \ldots$$

gebildet werden, ein jeder Ausdruck gleich dem mit der negativen Einheit multiplicirten Werthe des vorhergehenden Ausdruckes ist. In Folge der Gleichungen (8) findet sich die Bestimmung

(11) $$\alpha_0\ \beta_1 - \alpha_1\ \beta_0 = -1.$$

Deshalb sind die Ausdrücke (10*) abwechselnd gleich der negativen und der positiven Einheit, und da $(-1)^\lambda$ gleich der positiven oder negativen Einheit wird, je nachdem λ eine gerade oder ungerade Zahl ist, so kann man die Haupteigenschaft von

den Zählern und Nennern der successiven Näherungsbrüche eines Kettenbruches in die Gleichung zusammenfassen

(12) $$\alpha_{\lambda-1}\beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_{\lambda-1} = (-1)^\lambda .$$

Wegen dieser Gleichung können der Zähler und der Nenner desselben Näherungsbruches keinen gemeinsamen Theiler haben; denn ein gemeinsamer Theiler von α_λ und β_λ müsste in die Zahl $\alpha_{\lambda-1}\beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_{\lambda-1}$ und deshalb in die positive oder negative Einheit aufgehen. Da nun nach (7) der Bruch $\frac{\alpha_{\mu+2}}{\beta_{\mu+2}}$ gleich dem Werthe des ganzen Kettenbruches, mithin gleich dem Bruche $\frac{a}{b}$ ist, und da weder die positiven ganzen Zahlen $\alpha_{\mu+2}$ und $\beta_{\mu+2}$ noch die positiven ganzen Zahlen a und b einen gemeinsamen Theiler haben, so muss

(13) $$\alpha_{\mu+2} = a, \quad \beta_{\mu+2} = b$$

sein. Ersetzt man in (12) die Zahl λ durch die Zahl $\mu + 2$, ferner $\alpha_{\mu+2}$ durch a und $\beta_{\mu+2}$ durch b, so entsteht die Gleichung

(14) $$\alpha_{\mu+1}\, b - \beta_{\mu+1}\, a = (-1)^\mu .$$

Demnach ergiebt sich eine Auflösung der Gleichung (3) *dadurch, dass aus der Kettenbruchentwickelung des Bruches* $\frac{a}{b}$ *der vorletzte Näherungsbruch* $\frac{\alpha_{\mu+1}}{\beta_{\mu+1}}$ *abgeleitet und hierauf*

(15) $$k = (-1)^\mu \alpha_{\mu+1}, \quad l = (-1)^{\mu+1} \beta_{\mu+1}$$

gesetzt wird.

Es leuchtet nunmehr ein, dass auf Grund der Gleichungen (1) und (4) des vorigen § *der Quotient der beiden ganzen Functionen* $\frac{g(x)}{f(x)}$ *in einen Kettenbruch* entwickelt werden kann. Aus den aufeinander folgenden Gleichungen

$$\frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}, \quad \frac{g(x)}{r(x)} = q_1(x) + \frac{r_1(x)}{r(x)}, \ldots$$

entsteht die Darstellung

$$(16)\qquad \frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \cfrac{1}{q_1(x) + \cfrac{1}{q_2(x) + \cdots + \cfrac{1}{q_{\mu+2}(x)}}}.$$

Die Voraussetzung, dass $f(x)$ und $g(x)$ ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, macht sich in dem Kettenbruche nur dadurch kenntlich, dass die letzte Function $q_{\mu+2}(x)$ aus der Function $r_\mu(x)$ durch Division mit der *Constante* $r_{\mu+1}(x)$ erzeugt wird. Die *Näherungsbrüche* $\frac{\alpha_0(x)}{\beta_0(x)}, \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}, \ldots$ werden folgendermassen bestimmt

$$(17)\qquad \begin{aligned} \alpha_0(x) &= q(x), & \beta_0(x) &= 1 \\ \alpha_1(x) &= q(x)\,q_1(x) + 1, & \beta_1(x) &= q_1(x) \end{aligned}$$

und weiter durch die recurrirende Beziehung

$$(17^*)\qquad \begin{aligned} \alpha_\lambda(x) &= \alpha_{\lambda-1}(x)\, q_\lambda(x) + \alpha_{\lambda-2}(x), \\ \beta_\lambda(x) &= \beta_{\lambda-1}(x)\, q_\lambda(x) + \beta_{\lambda-2}(x); \end{aligned}$$

die Gültigkeit der bezüglichen Regel folgt aus denselben Gründen, auf denen die Gleichungen (9) beruhen. Auf gleiche Weise existirt für die aufeinander folgenden ganzen Functionen $\alpha_\lambda(x)$ $\beta_\lambda(x)$ die der Gleichung (12) entsprechende Relation

$$(18)\qquad \alpha_{\lambda-1}(x)\,\beta_\lambda(x) - \alpha_\lambda(x)\,\beta_{\lambda-1}(x) = (-1)^\lambda,$$

aus welcher der Schluss zu ziehen ist, dass der Zähler und der Nenner desselben Näherungsbruches ganze Functionen ohne gemeinsamen Theiler sein müssen. Weil nun sowohl $\frac{\alpha_{\mu+2}(x)}{\beta_{\mu+2}(x)}$ wie auch $\frac{g(x)}{f(x)}$ die vollständige Kettenbruchentwickelung darstellen, so muss, wenn wir voraussetzen, *dass $f(x)$ und $g(x)$ ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, was hiemit geschieht*, $g(x)$ gleich der in eine Constante C multiplicirten Function $\alpha_{\mu+2}(x)$, und zugleich $f(x)$ gleich der in dieselbe Constante C multiplicirten Function $\beta_{\mu+2}(x)$ sein. Dann liefert aber die Gleichung (18) für $\lambda = \mu + 2$ die Gleichung

$$(19)\qquad \alpha_{\mu+1}(x)\, f(x) - \beta_{\mu+1}(x)\, g(x) = (-1)^\mu C.$$

Mittelst derselben folgt, *dass für zwei ganze Functionen* $f(x)$ *und* $g(x)$, *die ohne gemeinsamen Theiler sind, die Gleichung* (1), *in welcher* $\theta(x)$ *gleich einer Constante genommen ist, immer eine Auflösung gestattet.* Setzt man der Einfachheit halber $\theta(x) = 1$, so lautet die aus (19) fliessende Auflösung

$$(20)\qquad \varphi(x) = (-1)^{\mu}\,\frac{\alpha_{\mu+1}(x)}{C},\ \psi(x) = (-1)^{\mu+1}\,\frac{\beta_{\mu+1}(x)}{C}.$$

Ferner hat man für die Gleichung (1) bei einer *beliebigen Function* $\theta(x)$, wie leicht zu erkennen ist, die Auflösung

$$(21)\quad \varphi(x) = \frac{(-1)^{\mu}}{C}\,\alpha_{\mu+1}(x)\,\theta(x),\ \psi(x) = \frac{(-1)^{\mu+1}}{C}\,\beta_{\mu+1}(x)\,\theta(x).$$

Eine Anwendung wird in dem nächsten Abschnitte mitgetheilt werden.

Capitel III.

Algebraische rationale ganze Functionen von beliebig vielen Variabeln und beliebig hohen Graden.

§ 70. Gleichheit der Coefficienten bei zwei Functionen, die für unbestimmte Werthe der Variabeln einander gleich sind. Homogene Functionen. Transformation der homogenen Functionen durch eine Substitution des ersten Grades.

In dem vorigen Capitel haben uns die rationalen ganzen Functionen von einer Variable beschäftigt. Gegenwärtig verlassen wir dieselben und gehen zu den rationalen ganzen Functionen von mehreren Variabeln über. In § 22 ist die Gestalt einer solchen Function folgendermassen angegeben worden

$$(1)\qquad M x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots + M' x^{\lambda'} y^{\mu'} z^{\nu'} \ldots + \ldots,$$

wo die Coefficienten $M, M', \ldots$ von den Variabeln $x, y, z, \ldots$ nicht abhängen, und wo für je zwei verschiedene Glieder des Ausdruckes nicht alle von den Gleichungen $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, ... zugleich erfüllt sind. Zu einem bestimmten Behufe wurde in § 58 der Satz bewiesen, dass, *wofern die Function* (1) *für unbestimmte Werthe der Variabeln* $x, y, z, \ldots$ *verschwindet, die sämmtlichen Coefficienten* $M, M', \ldots$ *gleich Null sein müssen.* Aus diesem Satze folgt unmittelbar der Satz, *dass wenn zwei rationale ganze Functionen mehrerer Variabeln für unbestimmte*

Werthe der Variabeln einander gleich sind, in den vollständigen Entwickelungen der beiden Functionen die Coefficienten der entsprechenden Potenzen und Producte von Potenzen der Variabeln sämmtlich einander gleich sein müssen. Auch sind in demselben § zwei verschiedene Principien aufgestellt worden, um die einzelnen Glieder der Function zu ordnen. Doch giebt es für die Anordnung einer rationalen ganzen Function von mehreren Variabeln einen Gesichtspunkt, der bis jetzt noch nicht geltend gemacht ist und der eine grosse Bedeutung besitzt. Man kann bei jedem einzelnen Gliede einer solchen Function *abzählen, wie oft in demselben die einzelnen Variabeln zusammengenommen als Factoren auftreten.* Das Glied $M x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots$ der Function (1) enthält die Potenzen x^{λ}, y^{μ}, z^{ν}, .. als Factoren, mithin die Variable x in der Anzahl λ, die Variable y in der Anzahl μ, die Variable z in der Anzahl ν von Malen u. s. f. Hiernach hat die *gesuchte Gesammtzahl* für dieses Glied den Werth $\lambda + \mu + \nu + \ldots$. Diese Zahl liefert die Bestimmung für den *Grad des Gliedes* $M x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots$, oder, wie man sich auch ausdrückt, für die *Dimension des Gliedes* $M x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \ldots$ *in Bezug auf die sämmtlichen Variabeln* $x, y, z, \ldots$ Es lassen sich nunmehr alle diejenigen Glieder der gegebenen Function zusammenfassen, bei welchen die Gradzahl $\lambda + \mu + \nu + \ldots$ denselben Werth und zwar den höchsten vorkommenden Werth p hat, das betreffende Aggregat sei Φ_p; hierauf können die Glieder zusammengenommen werden, deren Gradzahl gleich der Zahl $p-1$ ist, so dass sie ein Agregat Φ_{p-1} bilden und man kann fortfahren, eben solche Aggregate $\Phi_{p-2}, \ldots \Phi_0$ von den absteigenden Graden $p-2, \ldots 0$ aufzustellen, bis alle Glieder von (1) erschöpft sind.

Eine ganze rationale Function der Variabeln $x, y, z, \ldots$ deren sämmtliche Glieder in Bezug auf diese Variabeln von demselben Grade sind, heisst eine *homogene Function der Variabeln* $x, y, z, \ldots$ Demnach sind Φ_p, $\Phi_{p-1}, \ldots \Phi_0$ beziehungsweise homogene Functionen des $p$ten, $(p-1)$ten, ... nullten Grades von den Variabeln $x, y, z, \ldots$, und die gegebene Function (1) wird gleich *der Summe von homogenen Functionen*

(2) $$\Phi_p + \Phi_{p-1} + \dots + \Phi_0,$$

deren Grade von der Zahl p bis zu dem Werth Null abnehmen. Die gegebene Function (1) führt insofern, als der höchste in ihren Gliedern vertretene Grad gleich p ist, die Benennung *einer Function des pten Grades*.

Die *Function* des *nullten Grades* erlaubt nur das Auftreten von einem einzigen unabhängigen Coefficienten und besteht daher aus einem einzigen Gliede.

Die *homogene Function des ersten Grades* von n Variabeln bildet ein Aggregat aus den in unabhängige Coefficienten multiplicirten einzelnen Variabeln und enthält insofern n Glieder. Die *homogene Function des zweiten Grades* von n Variabeln umfasst n Glieder, in denen die Quadrate der n Variabeln vorkommen und $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder, in denen die Producte aus zwei verschiedenen Variabeln vorkommen, enthält mithin im Ganzen $\frac{n(n+1)}{2}$ Glieder. Auf diese Weise bestimmt sich für die homogenen Functionen eines gegebenen Grades die höchste Anzahl verschiedener Glieder, die möglich ist; eine Verringerung der Anzahl durch Verschwinden einzelner Glieder ist hierbei selbstverständlich nicht ausgeschlossen.

Die in (2) gegebene Darstellung einer ganzen Function des $p$ten Grades mit einer bestimmten Zahl p von Variabeln zeigt an, dass jede solche Function als eine *homogene Function* des $p$ten Grades betrachtet werden darf, bei welcher *die Anzahl der Variabeln um Eins grösser* genommen ist. Denn wenn man zu den n Variabeln $x, y, z, \dots$ eine $(n+1)$te Variable u hinzufügt, so ist der Ausdruck

(3) $$\Phi_p + \Phi_{p-1}\, u + \Phi_{p-2}\, u_2 + \dots + \Phi_0\, u^p$$

eine homogene Function des $p$ten Grades von den $(n+1)$ Variabeln $x, y, z, \dots u$, und dieser Ausdruck, welcher die allgemeinste homogene Function des $p$ten Grades mit den $(n+1)$ Variablen $x, y, z, \dots u$ darstellt, verwandelt sich in den Ausdruck (2) der gegebenen Function, sobald der Variable u der Werth der Einheit beigelegt wird. Vermöge dieses Umstandes ist in der Algebra die Untersuchung der homogenen Functionen immer mehr in den Vordergrund getreten.

Im Eingange des § 49 findet sich ein Hinweis auf die *Transformation* von einer rationalen Function oder von mehreren rationalen Functionen, welche hervorgebracht wird, indem an die Stelle der ursprünglichen Variabeln bestimmte rationale Functionen von neuen Variabeln substituirt werden. Denken wir uns eine ganze homogene Function oder mehrere zusammengehörige ganze homogene Functionen von einer gewissen Zahl von Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und nehmen wir an, dass jede dieser Variabeln gleich einer ganzen homogenen Function des ersten Grades von n neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ gesetzt werde, so dass die Gleichungen gelten

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad x_1 &= c_{11}\, x'_1 + c_{12}\, x'_2 + \ldots + c_{1n}\, x'_n \\
x_2 &= c_{21}\, x'_1 + c_{22}\, x'_2 + \ldots + c_{2n}\, x'_n \\
&\;\;\vdots \\
x_n &= c_{n1}\, x'_1 + c_{n2}\, x'_2 + \ldots + c_{nn}\, x'_n,
\end{aligned}
$$

in denen die Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n}, \ldots c_{n1}, c_{n2} \ldots c_{nn}$ von den Variabeln unabhängig sind, und die *eine Substitution des ersten Grades* bilden, so muss sich die zu transformirende ganze homogene Function oder müssen sich die gleichzeitig zu transformirenden ganzen homogenen Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ beziehungsweise in eine ganze homogene Function oder in die bezügliche Anzahl ganzer homogener Functionen verwandeln, ohne dass der Grad der betreffenden einzelnen Function eine Aenderung erfährt. Denn jedes in einer Function auftretende Glied $\mathfrak{M}\, x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$, dessen Grad durch die Zahl $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ ausgedrückt ist, geht vermittelst der Substitution (4) in ein Aggregat von Gliedern über, deren Grad in Bezug auf die Variabeln $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$ wieder durch dieselbe Zahl $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ bezeichnet wird.

Diese Bemerkung bildet den Ausgangspunkt für das Studium der Transformation von ganzen homogenen Functionen durch solche Substitutionen, wie sie in (4) angegeben sind. Der erste Schritt auf dem angedeuteten Wege muss aber darin bestehen, dass das System von Gleichungen (4) selbst einer genauen Prüfung unterworfen wird. Durch dasselbe erhält man für die n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vollständig bestimmte Werthe, sobald den n Grössen $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ irgend welche zusammen-

gehörige bestimmte Werthe beigelegt werden. Wenn dagegen den n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmte Werthe vorgeschrieben sind, so bleibt zu untersuchen, ob es solche Werthe $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ giebt, welche dem vorgelegten System von Gleichungen (4) genügen und, falls es solche giebt, wie dieselben gefunden werden können. Dies ist die Frage nach der *Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit den n Unbekannten $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$.* Wir werden dieselbe erledigen, indem wir ein System von *n ganzen homogenen Functionen des ersten Grades mit n Variabeln* zu dem Gegenstande unserer Betrachtung machen.

Capitel IV.

Systeme von n ganzen homogenen Functionen des ersten Grades mit n Variabeln. Allgemeine Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten. Lehre der Determinanten.

§ 71. Zwei Functionen des ersten Grades mit zwei Variabeln. Allgemeine Auflösung von zwei Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten. Determinanten des zweiten Grades.

Mit den beiden Variabeln x und y und den vier Constanten a, b, c, d seien die *beiden ganzen homogenen Functionen des ersten Grades* f_1 und f_2 gebildet

(1)
$$f_1 = ax + by$$
$$f_2 = cx + dy.$$

Die Forderung, den Variabeln x und y solche Werthe beizulegen, dass die erste Function einer gegebenen Grösse r_1 und die zweite Function einer gegebenen Grösse r_2 gleich werde, liefert die *beiden Gleichungen des ersten Grades*

(2)
$$\begin{cases} ax + by = r_1 \\ cx + dy = r_2. \end{cases}$$

Gesetzt, dass es möglich sei, dieselben zu befriedigen, so kann man aus denselben eine Gleichung ableiten, welche nur x enthält und eine Gleichung, welche nur y enthält, oder beziehungsweise *das erste Mal y, das zweite Mal x eliminiren.* Wir multipliciren zu diesem Zwecke erstens die erste Gleichung

mit d, die zweite mit $-b$, und addiren die Resultate, und hierauf multipliciren wir die erste mit $-c$, die zweite mit a, und addiren ebenfalls die Resultate. Auf diese Weise entstehen respective die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} (ad - bc)\,x = d\,r_1 - b\,r_2 \\ (ad - bc)\,y = -c\,r_1 + a\,r_2. \end{cases}$$

Zu der Ableitung derselben sind nur die Operationen der *Addition*, *Subtraction* und *Multiplication* angewendet worden, so dass die Resultate nach einer in § 21 hervorgehobenen Bemerkung eine unbeschränkte Gültigkeit haben. Sobald aber aus (3) die Werthe von x und y ermittelt werden sollen, so bedarf es beide Male einer *Division* mit der Grössenverbindung

$$(4) \qquad ad - bc;$$

damit eine solche ausgeführt werden könne, ist es *nothwendig und hinreichend*, dass *der Werth von* (4) *nicht gleich Null sei.*

Wir machen nun zuerst *die Voraussetzung, dass* $ad - bc$ *nicht gleich Null sei*, und erhalten dann für x und y die *vollkommen bestimmten Werthe*

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{d\,r_1 - b\,r_2}{ad - bc} \\[2ex] y = \dfrac{-c\,r_1 + a\,r_2}{ad - bc}. \end{cases}$$

Aus der Annahme, dass es möglich sei, den Gleichungen (2) zu genügen, ist geschlossen worden, dass x und y die vorstehend angegebenen Werthe haben müssen. Man überzeugt sich umgekehrt sehr leicht, dass diese Werthe in der That die Gleichungen (1) befriedigen. *Es steht demnach fest, dass, wofern die Grössenverbindung* $ad - bc$ *nicht gleich Null ist, die Gleichungen* (1) *eine Auflösung zulassen, und dass diese Auflösung ausschliesslich durch die in* (4) *enthaltenen zusammengehörigen Werthe von* x *und* y *bewerkstelligt werden kann.*

Die Grössenverbindung $ad - bc$ *wird die aus den Elementen*

$$(5) \qquad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

gebildete Determinante und zwar eine Determinante des zweiten Grades genannt. Sie ist das Aggregat der Producte von denjenigen Elementen, welche in dem quadratisch geordneten

System (5) sich in den beiden Diagonalen befinden; das Product ad, das zu der absteigend von links nach rechts laufenden Diagonale gehört, ist positiv, das Product bc, das zu der anderen Diagonale gehört, negativ genommen.

Sobald dieselbe einen von Null verschiedenen Werth hat, zeigt es sich, dass den beiden Gleichungen (2) stets vollkommen bestimmte Werthe von x und y entsprechen, auf welche Weise auch der Werth r_1 für die Function f_1 und der Werth r_2 für die Function f_2 gewählt sein möge. Hierin liegt eine fundamentale Eigenschaft der beiden Functionen f_1 und f_2, welche durch einen besonderen Ausdruck charakterisirt wird. *Die beiden Functionen des ersten Grades von x und y*

$$f_1 = ax + by$$
$$f_2 = cx + dy$$

heissen von einander unabhängige Functionen, wenn zu jedem beliebig gewählten System von Werthen derselben

$$f_1 = r_1,\ f_2 = r_2$$

ein bestimmtes System von Werthen der Variabeln x und y gehört. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass, wofern die Determinante $ad - bc$ nicht gleich Null ist, die Functionen f_1 und f_2 nothwendig von einander unabhängig sind.

Es bleibt nun zu untersuchen, wie sich zwei Functionen f_1 und f_2 verhalten, bei denen die Determinante $ad - bc$ gleich Null ist. In Betreff der Coefficienten halten wir jetzt nur noch die eine selbstverständliche Voraussetzung fest, dass nicht alle vier gleich Null sind; denn in diesem Falle wäre sowohl f_1 wie auch f_2 überhaupt gleich Null. Man kann offenbar stets das Verfahren, vermittelst dessen aus den Gleichungen (2) die Gleichungen (3) deducirt sind, auf die Gleichungen (1) anwenden, welche zu der Definition der Functionen f_1 und f_2 dienen, und erhält dann die Relationen

(6) $$\begin{aligned} d f_1 - b f_2 &= (ad - bc)\, x \\ -c f_1 + a f_2 &= (ad - bc)\, y. \end{aligned}$$

Durch die jetzt geltende Gleichung $ad - bc = 0$ verwandeln sie sich in die folgenden Relationen

(7) $$\begin{aligned} d f_1 - b f_2 &= 0 \\ -c f_1 + a f_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche zwischen den Functionen f_1 und f_2 bestehen und die

Variabeln x und y ausserhalb der Functionen nicht enthalten. Da nicht a, b, c, d zugleich verschwinden sollen, so muss wenigstens eine der Grössen von Null verschieden sein, und dies sei etwa die Grösse a. Dann lehrt die zweite Relation in (7), indem mit der Grösse a dividirt wird, dass

$$f_2 = \frac{c}{a} f_1$$

sein muss. Wie also auch immer die Variabeln x und y bestimmt werden, so zieht der entsprechende Werth der Function f_1 einen vollständig bestimmten Werth der Function f_2 nach sich. Aus der Voraussetzung, dass b, c, oder d nicht gleich Null sei, würden sich ähnliche Schlüsse ergeben. Man erkennt hieraus, *dass, wenn die Determinante* $ad - bc$ *gleich Null ist, es nicht möglich ist, sowohl der Function* f_1 *wie auch der Function* f_2 *ganz beliebige zusammengehörige Werthe vorzuschreiben, oder in anderen Worten, dass die Functionen* f_1 *und* f_2 *von einander abhängig sind.*

Zu derselben Zeit wird die Frage entschieden, ob und auf welche Art die Gleichungen (2) unter der Bedingung erfüllt werden können, dass die Determinante $ad - bc = 0$ ist. Entweder sind die Bestimmungen $f_1 = r_1$ und $f_2 = r_2$ so angenommen, dass sie sich mit den Relationen (7) vertragen, oder so, dass sie den Relationen (7) widersprechen. In dem letztern Falle enthalten die Gleichungen (2) eine Forderung, die *mit sich selbst im Widerspruche steht* und deshalb *unmöglich* erfüllt werden kann. In dem erstern Falle sagen uns die Relationen (7), dass, wofern x und y so gewählt sind, um eine von den beiden Gleichungen $f_1 = r_1$ und $f_2 = r_2$ zu befriedigen, die andere Gleichung von selbst erfüllt ist. Demzufolge haben dann die beiden Gleichungen (2) nur die Wirksamkeit einer *einzigen Gleichung*; sie werden deshalb nicht blos von einem einzigen Paar von Werthen x und y, sondern von all den Paaren von Werthen befriedigt, welche die eine Gleichung erfüllen.

Es sei beispielsweise

$$\begin{cases} f_1 = 2x + 3y \\ f_2 = 4x + 6y. \end{cases}$$

Hier ist $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$, folglich $ad - bc$ gleich $2 . 6 - 3 . 4 = 0$. Die Relationen (7) werden diese

$$6f_1 - 3f_2 = 0$$
$$-4f_1 + 2f_2 = 0,$$

und drücken aus, dass f_2 stets den doppelten Werth von f_1 haben muss.

Wenn man daher r_1 und r_2 im Widerspruche mit dieser Beziehung annimmt und etwa die Gleichungen hinstellt

$$2x + 3y = 7$$
$$4x + 6y = 15,$$

so können dieselben überhaupt nicht erfüllt werden. Sobald man aber diese Beziehung berücksichtigt und etwa die Gleichungen

$$2x + 3y = 7$$
$$4x + 6y = 14,$$

bildet, so werden diese durch alle Paare von Werthen erfüllt, welche der einen Gleichung

$$2x + 3y = 7$$

genügen.

§ 72. Drei Functionen des ersten Grades mit drei Variabeln. Allgemeine Auflösung von drei Gleichungen des ersten Grades mit drei Unbekannten. Determinanten des dritten Grades.

Um für Functionen dreier Variabeln x, y, z das entsprechende zu leisten, nehme man die drei mit den Constanten $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ versehenen homogenen Functionen

(1)
$$f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$
$$f_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$
$$f_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

schreibe denselben beziehungsweise die drei beliebig gewählten Werthe r_1, r_2, r_3 vor, und untersuche *die Auflösung der drei Gleichungen des ersten Grades*

(2)
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = r_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = r_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = r_3. \end{cases}$$

Es handelt sich jetzt darum, unter der Annahme, dass diesen drei Gleichungen genügt werden könne, *eine* Gleichung zu deduciren, welche nur *eine* der drei Unbekannten enthält, oder mit anderen Worten, *zwei von den Unbekannten zu eliminiren.* Dieser Zweck wird erreicht sein, wenn sich drei Grössen-

verbindungen A_1, A_2, A_3 angeben lassen, welche so beschaffen sind, dass, nachdem die erste Gleichung mit A_1, die zweite mit A_2 und die dritte mit A_3 multiplicirt ist, und alle drei Producte addirt sind, der Factor von y und von z verschwindet. Man muss demnach A_1, A_2, A_3 so zu bestimmen suchen, dass die beiden Gleichungen

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 &= 0 \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

gelten.

Die Gleichungen (3) können so benutzt werden, dass sie zu der Bestimmung von zweien der Grössen A_1, A_2, A_3 dienen, während die dritte willkürlich bleibt. Wir verfahren mit denselben, wie mit den Gleichungen (2) des vorigen § und erhalten die den dortigen Gleichungen (3) correspondirenden Ergebnisse

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} (b_1 c_2 - b_2 c_1) A_1 &= (b_2 c_3 - b_3 c_2) A_3 \\ (b_1 c_2 - b_2 c_1) A_2 &= (b_3 c_1 - b_1 c_3) A_3. \end{aligned}\right.$$

Die freie Verfügung über eine der drei Grössen gewährt den Vortheil, dass für alle drei Grössen Ausdrücke gefunden werden können, die keine Division enthalten und deshalb unbedingt anwendbar sind; es sind die Ausdrücke

$$(5)\quad A_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2,\ A_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3,\ A_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

Wenn dieselben als Multiplicatoren der drei Gleichungen (2) gebraucht werden, so erhält nach vollzogener Addition die Unbekannte x den Factor

$$(6)\qquad a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = R,$$

und es entsteht, indem y und z herausfallen, die Gleichung

$$(7)\qquad Rx = A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3.$$

Die Grössenverbindung R hat, entwickelt, den Ausdruck

$$(8)\quad R = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$$

und heisst *die aus dem System von 9 Elementen*

$$(9)\qquad \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

gebildete Determinante des dritten Grades.

Offenbar erhält man für die Gleichungen (2) drei Multiplicatoren B_1, B_2, B_3, welche zu der Elimination von z und x führen, vermittelst der zwei Gleichungen

$$(3^*)\qquad \begin{cases} c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0 \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0, \end{cases}$$

und die Multiplicatoren C_1, C_2, C_3, die zu der Elimination von x und y dienen, vermittelst der Gleichungen

$$(3^{**})\qquad \begin{cases} a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0 \\ b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0. \end{cases}$$

Da aber die Gleichungen (3*) aus den Gleichungen (3) hervorgehen, wenn statt der Buchstaben A, b, c, respective die Buchstaben B, c, a gesetzt werden und alle Zeiger ungeändert bleiben, so bedarf es zu der Darstellung von B_1, B_2, B_3 keiner neuen Rechnung; man erhält die Darstellung vielmehr aus den Formeln (5), indem man für b, c respective c, a schreibt. In gleicher Weise entstehen die Gleichungen (3**) aus den Gleichungen (3), indem statt der Buchstaben A, b, c beziehungsweise die Buchstaben c, a, b substituirt werden, weshalb die Bestimmung der Ausdrücke C_1, C_2, C_3 aus (5) erhalten wird, indem statt b, c die Buchstaben a, b eintreten. So bekommen wir die Ausdrücke

$$(5^*)\quad B_1 = c_2 a_3 - c_3 a_2,\; B_2 = c_3 a_1 - c_1 a_3,\; B_3 = c_1 a_2 - c_2 a_1,$$

$$(5^{**})\quad C_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\; C_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,\; C_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Jetzt zeigt sich die Erscheinung, dass der Factor, den bei der Anwendung der Multiplicatoren B_1, B_2, B_3 auf (2) die Grösse y, und der Factor, den bei der Anwendung der Multiplicatoren C_1, C_2, C_3 auf (2) die Grösse z erhält, kein anderer ist als *die in* (8) *definirte Determinante* R; denn man findet die Gleichungen

$$(6^*)\qquad b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 = R,$$

$$(6^{**})\qquad c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 = R.$$

Es folgen deshalb aus (2) die Gleichungen

$$(7^*)\qquad Ry = B_1 r_1 + B_2 r_2 + B_3 r_3,$$

$$(7^{**})\qquad Rz = C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3.$$

Unter der *Voraussetzung, dass die Discriminante* R *nicht gleich Null sei*, ergeben sich hiernach die vollkommen bestimmten Werthe

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3}{R} \\ y = \dfrac{B_1 r_1 + B_2 r_2 + B_3 r_3}{R} \\ z = \dfrac{C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3}{R}. \end{cases}$$

Vermöge der gegebenen Deduction können die Gleichungen (2) durch kein anderes System als das vorstehende befriedigt werden. Durch die Substitution der Werthe (9) werden sie wirklich erfüllt. *Mithin erlauben die Gleichungen* (2), *wenn die Determinante R von Null verschieden ist, wie auch immer die Werthe r_1, r_2, r_3 gewählt sein mögen, stets eine Auflösung und nur diejenige Auflösung, welche in* (9) *dargestellt ist.*

Sobald man den im vorigen § eingeführten *Begriff der Unabhängigkeit* auf *die drei Functionen f_1, f_2, f_3* von den drei Variabeln x, y, z ausdehnt, erhält das gefundene Ergebniss den Ausdruck, dass, *wenn die Determinante R nicht gleich Null ist, die drei Functionen f_1, f_2, f_3 von einander unabhängig sind.*

Für den Fall, dass die Determinante R gleich Null ist, wird sich zeigen, dass die Functionen f_1, f_2, f_3 in einer bestimmten *Abhängigkeit* unter einander stehen. Doch muss man hier unterscheiden, ob von den 9 Verbindungen A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 wenigstens eine von Null verschieden ist, oder ob diese sämmtlich mit R zusammen verschwinden. Es sei eine derselben nicht gleich Null, etwa A_1, so folgt aus den Gleichungen (1), indem die erste mit A_1, die zweite mit A_2, die dritte mit A_3 multiplicirt wird und die Producte addirt werden, die Gleichung

$$(10)\qquad A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 = R x,$$

mithin, weil $R = 0$ ist, die Gleichung

$$(11)\qquad A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 = 0.$$

Weil nun A_1 nicht gleich Null ist, so ergiebt sich hieraus, dass, auf welche Weise x, y, z auch angenommen werden, nachdem f_2 und f_3 bestimmt sind, die Function f_1 durch die Gleichung

$$f_1 = \frac{-A_2 f_2 - A_3 f_3}{A_1}$$

dargestellt wird. *Diese Gleichung drückt alsdann die Abhängig-*

keit aus, welche die Function f_1 in Bezug auf die beiden Functionen f_2 und f_3 hat. Sobald eine andere der 9 Grössenverbindungen $A_1, .. C_3$ nicht gleich Null ist, ergiebt sich eine entsprechende Consequenz. Wenn dagegen mit R zusammen alle jene 9 Grössen gleich Null werden, und wenn nur die Annahme stehen bleibt, dass nicht die sämmtlichen Coefficienten der Functionen f_1, f_2, f_3 gleich Null sind, wenn also zum Beispiel der Coefficient a_1 nicht gleich Null ist, dann leiten wir aus den Gleichungen (1), durch welche f_1, f_2, f_3 definirt sind, mit Hülfe von (5*) und (5**) die Gleichungen ab

$$(12)\qquad \begin{aligned} a_1 f_2 - a_2 f_1 &= \quad C_3 y - B_3 z \\ a_1 f_3 - a_3 f_1 &= - C_2 y + B_2 z, \end{aligned}$$

die sich, weil $B_2 = 0$, $C_2 = 0$, $B_3 = 0$, $C_3 = 0$, in die Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{aligned} a_1 f_2 - a_2 f_1 &= 0 \\ a_1 f_3 - a_3 f_1 &= 0 \end{aligned}$$

verwandeln. Um dieser Gleichungen willen ist die Function f_2 durch die Gleichung

$$f_2 = \frac{a_2}{a_1} f_1$$

und die Function f_3 durch die Gleichung

$$f_3 = \frac{a_3}{a_1} f_1$$

bestimmt, welche Werthe den Variabeln x, y, z auch ertheilt werden mögen. *Folglich hängt unter den obwaltenden Bedingungen die Function f_2 von der Function f_1 allein, und die Function f_3 ebenfalls von der Function f_1 allein ab.* Die sichere Voraussetzung, dass irgend ein anderer von den 9 Coefficienten der Functionen f_1, f_2, f_3 nicht verschwindet, würde eine ähnliche Folgerung nach sich ziehen.

Auf Grund dieser Erörterungen kann nun auch beurtheilt werden, wie sich die drei Gleichungen (2) bei dem Verschwinden der Determinante R verhalten. Es seien erstens nicht alle Verbindungen $A_1, A_2, .. C_3$ gleich Null, und sei wieder beispielsweise A_1 nicht gleich Null, dann können zwei von den Werthen r_1, r_2, r_3, nämlich der getroffenen Annahme entsprechend r_2 und r_3, willkürlich angenommen werden, und der Werth r_1 *muss* so gewählt werden, dass er die aus (11) entspringende Gleichung

$$r_1 = \frac{-A_2 r_2 - A_3 r_3}{A_1}$$

befriedigt. Die Verbindung A_1 ist nach der im vorigen § gegebenen Definition gleich der Determinante der 4 Elemente

$$\begin{matrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3. \end{matrix}$$

Daher lassen sich aus den beiden letzten Gleichungen (2) die Werthe von y und z ableiten, während die Grösse x einen ganz beliebigen Werth empfängt, und zugleich lehrt die angewendete Relation (11), dass bei der über r_1 getroffenen Verfügung die erste Gleichung (2) durch die bezeichneten Werthe von y, z und x erfüllt sein muss. *Die drei Gleichungen* (2) *haben also unter den vorliegenden Umständen die Bedeutung von zwei Gleichungen.*

Wenn ferner alle 9 Verbindungen A_1, $A_2, \ldots C_3$ gleich Null sind, jedoch nicht alle Coefficienten der Functionen verschwinden, und wenn speciell wieder der Coefficient a_1 nicht verschwindet, so kann einer von den drei Werthen r_1, r_2, r_3, und zwar gegenwärtig der Werth r_1, frei gewählt werden. Die Werthe r_2 und r_3 bestimmen sich jetzt *nothwendig* durch die aus (13) fliessenden Gleichungen

$$r_2 = \frac{a_2}{a_1} r_1,\ r_3 = \frac{a_3}{a_1} r_1 .$$

Von den Gleichungen (2) liefert nunmehr, weil a_1 nicht gleich Null ist, die erste bei willkürlich gewählten Werthen von y und z einen bestimmten zugeordneten Werth von x. Wegen der Bedingungen (13) müssen aber, da r_2 und r_3 auf die vorgeschriebene Weise bestimmt sind, die in Rede stehenden Werthe von x, y, z auch die zweite und die dritte Gleichung in (2) befriedigen. *In dem gegenwärtigen Falle werden daher die Grössen x, y, z durch die drei Gleichungen* (2) *nur in dem Maße eingeschränkt, in welchem sie durch eine einzige Gleichung eingeschränkt werden.*

§ 73. System von n ganzen Functionen des ersten Grades mit n Variabeln. Eintheilung der sämmtlichen Permutationen von n Zeigern in zwei Classen.

Wenn die n ganzen homogenen Functionen f_1, $f_2, \cdots f_n$ des ersten Grades von den n Variabeln x_1, $x_2, \ldots x_n$ gegeben sind

(1)
$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ f_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n, \end{aligned}$$

und wenn $r_1, r_2, \dots r_n$ beliebig gewählte Werthe bedeuten, so beruht die Auflösung des *Systems von n Gleichungen des ersten Grades mit den n Unbekannten* $x_1, x_2, \dots x_n$

(2)
$$\left\{\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= r_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= r_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n &= r_n \end{aligned}\right.$$

auf der Ausdehnung des Begriffs, der für zwei Functionen mit zwei Variabeln und für drei Functionen mit drei Variabeln in den beiden letzten §§ als *Determinante* eines Systems von 4, beziehunsweise 9 Elementen bezeichnet worden ist. Die Determinante des Systems von 4 Elementen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

ist das Aggregat $a_1 b_1 - a_2 b_2$, bei dem das mit dem negativen Vorzeichen versehene Glied aus dem mit dem positiven Vorzeichen versehenen Gliede entsteht, indem die beiden Zeiger 1, 2, welche den Buchstaben a, b beigelegt sind, unter einander vertauscht werden. Die Determinante des Systems von 9 Elementen

(3)
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

hat den Ausdruck

(3*) $$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$$

welcher aus 6 Gliedern besteht. Jedes Glied ist ein Product von 3 Elementen, von denen jedes einzelne Element aus einer anderen Horizontalreihe und gleichzeitig aus einer anderen Vertikalreihe des Schemas (3) genommen ist. Diese Eigenschaft kann auch so ausgesprochen werden, dass jedes Glied in (3*) ein Product von drei Elementen ist, die mit verschiedenen Buchstaben geschrieben sind und verschiedene Zeiger tragen. Weil

gegenwärtig nur die drei Buchstaben a, b, c und die drei Zeiger 1, 2, 3 vorkommen, so fehlt nirgendwo ein Buchstabe und nirgendwo ein Zeiger. Es sind ferner, weil drei Zeiger nach § 46 die Anzahl $3! = 6$ Permutationen gestatten, in den 6 unter einander verschiedenen Gliedern des Ausdruckes (3*) alle Permutationen der drei Zeiger 1, 2, 3, vertreten, und zwar haben die drei Glieder, bei welchen die Buchstaben a, b, c mit den drei Zeigerfolgen

$$|1\ 2\ 3|2\ 3\ 1|3\ 2\ 1|$$

versehen sind, das positive Vorzeichen, während die drei Glieder, bei welchen die Buchstaben a, b, c mit den Zeigerfolgen

$$|2\ 1\ 3|1\ 3\ 2|3\ 2\ 1|$$

versehen sind, das negative Vorzeichen haben. Für die Determinante von 4 Elementen $a_1\ b_2 - a_2\ b_1$ trennen sich die beiden vorhandenen Permutationen der Zeiger 1 2 und 2 1 von einander. Für die Determinante von 9 Elementen zerfallen die 6 vorhandenen Permutationen der 3 Zeiger ebenfalls in zwei verschiedene Classen, und wir haben jetzt darauf aufmerksam zu machen, dass uns bei einer früheren Gelegenheit ein Princip für die Eintheilung der sämmtlichen Permutationen von n Zeigern in zwei Classen begegnet ist, welches bei $n = 2$ und bei $n = 3$ die Eintheilung liefert, die wir hier wahrnehmen.

Der § 59 enthält in (10) das Product der Differenzen von n Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) \ldots (\xi_1 - \xi_n) \\
& \qquad\qquad (\xi_2 - \xi_3) \ldots (\xi_2 - \xi_n) \\
& \qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad (\xi_{n-1} - \xi_n),
\end{aligned}
$$

wo in jeder Differenz $\xi_\alpha - \xi_\beta$ der Zeiger β grösser ist als der Zeiger α. An jener Stelle wird erwähnt, dass, sobald mit den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ alle möglichen Permutationen vorgenommen werden, der Ausdruck (4) entweder in sich selbst oder in seinen mit der negativen Einheit multiplicirten Werth übergeht, und es wird auch das Mittel angegeben, um zu entscheiden, ob eine bestimmte vorgelegte Permutation die eine oder die andere Wirkung hervorbringt. Die Permutation der Grössen

$\xi_1, \xi_2, .. \xi_n$ möge so erfolgen, dass sich die Zeiger $1, 2, 3, ... n$ respective in die Zeiger $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ verwandeln, was durch das Zeichen

$$(5) \qquad \begin{matrix} 1, & 2 & 3 & \ldots n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots \alpha_n \end{matrix}$$

angedeutet werden soll. Dann braucht man nur die einzelnen Differenzen des aus (4) hervorgehenden Products mit den einzelnen Differenzen des Products (4) zu vergleichen und zu ermitteln, wann eine Differenz des neuen Products der aus den entsprechenden Elementen des ursprünglichen Products zusammengesetzten Differenz gleich uud wann sie ihr entgegengesetzt ist. Giebt es in dem betreffenden Falle die Anzahl N von entgegengesetzten Differenzen, so wird das neue Product dem ursprünglichen Product (4) gleich oder entgegengesetzt, je nachdem N eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Wir haben nun die Aufgabe, die zu der Permutation (5) gehörende mit N bezeichnete Zahl durch eine allgemeine Regel zu bestimmen. Bei der auszuführenden Substitution werden aus den Producten der Factoren, welche in (4) die erste, zweite, dritte, .. Horizontalreihe einnehmen respective die Producte

$$\begin{matrix} (\xi_{\alpha_1}-\xi_{\alpha_2})(\xi_{\alpha_1}-\xi_{\alpha_3})\ldots(\xi_{\alpha_1}-\xi_{\alpha_n}) \\ \qquad\qquad (\xi_{\alpha_2}-\xi_{\alpha_3})\ldots(\xi_{\alpha_2}-\xi_{\alpha_n}) \\ \qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\xi_{\alpha_{n-1}}-\xi_{\alpha_n}). \end{matrix}$$

Jede dieser Differenzen ist mit der entsprechenden Differenz in (4) gleich, sobald bei der erstern auf den kleineren Zeiger der grössere folgt, und entgegengesetzt in dem entgegengesetzten Falle, da bei den Differenzen in (4) stets der grössere Zeiger auf den kleineren folgt. *Man bestimme daher die Anzahl, wie oft in der Permutation* (5) *auf* α_1 *ein Zeiger folgt, der kleiner ist* α_1, *wie oft auf* α_2 *ein Zeiger folgt, der kleiner ist* α_2, *u. s. f. und addire diese Anzahlen, so hat man die gesuchte Zahl N.*

Die sämmtlichen Permutationen von n Zeigern 1, 2, 3, . . n *zerfallen demnach in zwei Classen, welche sich dadurch unterscheiden, dass das Product* (4) *für eine Permutation der ersten Classe ungeändert bleibt, sich dagegen für eine Permutation der*

zweiten Classe in den entgegengesetzten Werth verwandelt; eine bestimmte Permutation (5)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_n \end{matrix}$$

gehört zu der ersten Classe, sobald die der Permutation zugeordnete Zahl N gerade, und zu der zweiten Classe, sobald die zugeordnete Zahl N ungerade ist. Durch die Betrachtung, welche zu der Bestimmung der Zahl N geführt hat, erkennt man auch die Gültigkeit des Satzes:

(1) *Wenn nach der Permutation* (5) *eine zweite Permutation*

(6) $$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \dots \beta_n \end{matrix}$$

ausgeführt wird, welcher die Zahl N' zugeordnet ist, so entspricht derjenigen Permutation, welche aus der Anwendung von (6) *nach* (5) *hervorgeht, eine Zahl $N + N'$, und deshalb gehört die resultirende Permutation zu der ersten Classe oder zu der zweiten Classe, je nachdem die Permutationen* (5) *und* (6) *zu derselben Classe oder zu verschiedenen Classen gehören.*

Diese Bestimmung stützt sich darauf, dass sowohl die Summe von zwei geraden Zahlen wie auch die Summe von zwei ungeraden Zahlen gleich einer geraden Zahl, dagegen die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl gleich einer ungeraden Zahl ist.

Als Corollar folgt aus dem Satze (1) der Satz, *dass diejenige Permutation, welche nach der Permutation* (5) *angewendet zu der ursprünglichen Zeigerstellung zurückführt, und die durch das Zeichen*

(7) $$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 \dots n \end{matrix}$$

angedeutet werden kann, mit der Permutation (5) *zu derselben Classe gehören muss.* In der That können (5) und (7) nicht zu verschiedenen Classen gehören, da die resultirende Permutation

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 1 & 2 & 3 \dots n \end{matrix}$ gewiss zu der ersten Classe gehört.

Das Product (4) geht offenbar stets in den entgegengesetzten Werth über, wenn man nur zwei Zeiger mit einander vertauscht. Denn bei einer solchen Vertauschung kehrt sich diejenige Differenz um, welche beide Zeiger enthält, ferner ver-

wandeln sich die Differenzen, die nur den einen Zeiger enthalten, in die Differenzen, die nur den andern enthalten, und umgekehrt, während die Differenzen, die keinen der beiden Zeiger enthalten, gar nicht berührt werden. Hieraus ergiebt sich der Satz:

(2) *Eine Vertauschung von zwei Zeigern mit einander liefert stets eine Permutation der zweiten Classe.*

Dann folgt durch Verbindung mit dem Satze (1) der Satz:

(3) *Durch eine Vertauschung von zwei Zeigern geht jede Permutation in eine Permutation der andern Classe über.*

Der Satz (3) giebt das Mittel, um zu beweisen, *dass die eine Hälfte von sämmtlichen Permutationen der n Zeiger in der ersten Classe, und die andere Hälfte in der zweiten Classe enthalten ist.* Seien die sämmtlichen verschiedenen Permutationen der ersten Classe aufgestellt, so verwandeln sie sich durch die Vertauschung von irgend zwei Zeigern in lauter unter einander verschiedene Permutationen der zweiten Classe. Gäbe es noch eine Permutation der zweiten Classe, die auf diesem Wege nicht erhalten wird, so würde durch eine Rückvertauschung jener beiden Zeiger aus dieser Permutation eine Permutation der ersten Classe entstehen, welche von den angewendeten Permutationen der ersten Classe verschieden wäre. Es könnten also nicht *sämmtliche* Permutationen der ersten Classe von Anfang an aufgestellt gewesen sein, wie vorausgesetzt war. Also führt jene Annahme auf einen Widerspruch, und der vollständige Complex der Permutationen der ersten Classe geht durch die Vertauschung von zwei Zeigern in den vollständigen Complex der Permutationen der zweiten Classe über; mithin muss durch jeden der beiden Complexe die Hälfte der sämmtlichen Permutationen erschöpft sein.

Jede gegebene Permutation kann in eine Anzahl von solchen Permutationen zerlegt werden, die nach § 57 *cyclische Permutationen* heissen; die characteristische Beschaffenheit einer cyclischen Permutation von gegebenen Zeigern ist die, dass bei derselben ein bestimmter Zeiger in einen gewissen zweiten, der zweite Zeiger in einen gewissen dritten, u. s. f. und schliesslich der letzte Zeiger in den ersten übergeht. Man bewerkstelligt die Zerlegung bei der beliebig gegebenen Permutation $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \alpha_n \end{matrix}$

in der folgenden Weise. Es werde mit irgend einem Zeiger der oberen Reihe begonnen, etwa mit dem Zeiger 1. Sobald der darunter stehende Zeiger dem oberen gleich ist, mithin keine Veränderung dieses Zeigers erfolgt, so hat man *einen Cyclus, der nur aus einem Zeiger besteht.* Man nimmt alsdann einen neuen oberen Zeiger, etwa den Zeiger 2, und bemerkt den unteren Zeiger α_2, der nicht dem oberen gleich sein möge. Man sucht jetzt in der oberen Reihe die Stelle auf, an der sich der Zeiger α_2 befindet, und bemerkt den unter demselben stehenden Zeiger. Ist dieser bei unserer momentanen Annahme gleich dem Zeiger 2, so bilden die Substitutionen

$$\begin{matrix} 2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 2 \end{matrix}$$

einen Cyclus von zwei Zeigern. Es kann aber nicht zweifelhaft sein, dass, wenn man, mit einem bestimmten oberen Zeiger anfangend, zu dem darunter stehenden geht, diesen oben aufsucht und in der beschriebenen Weise fortfährt, schliesslich der Anfangszeiger an einer bestimmten Stelle der unteren Reihe wiederkehren muss; *es entsteht daher immer ein Cyclus von einer bestimmten Anzahl von Zeigern.* Nach Vollendung des ersten Cyclus, wofern derselbe nicht alle Zeiger umfasst, ist zu der Bildung eines zweiten zu schreiten, und da die Zahl n eine endliche ist, so müssen die sämmtlichen n Zeiger, wie behauptet worden, sich in eine bestimmte Anzahl von Cyclen vertheilen. Es sei etwa die Permutation

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 5 & 3 & 4 & 9 & 2 & 6 & 8 \end{matrix}$$

gegeben. Dann finden sich die Cyclen

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 6 \end{matrix}\right|$$

mit den respectiven Anzahlen 1, 2, 3, 3.

Nun erhellt, dass ein Cyclus von einem Zeiger keine Vertauschung andeutet, ein Cyclus von zwei Zeigern aber so viel ist wie eine Vertauschung von zwei Zeigern mit einander. Ein Cyclus von e Zeigern

$$\begin{matrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{e-1} & \gamma_e \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_e & \gamma_1 \end{matrix}$$

kann aber durch $e-1$ successive Vertauschungen von zwei Zeigern ersetzt werden, nämlich

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_e \\ \gamma_e & \gamma_1 \end{vmatrix}.$$

Mithin ist es möglich, jede gegebene Permutation durch lauter Vertauschungen von zwei Zeigern unter einander hervorzubringen, und die Zerlegung einer Permutation in Cyclen liefert eine Methode um dies zu leisten.

Hierauf gründet sich ein neues Merkmal für die Classe, welcher eine gegebene Permutation angehört. Nach dem Satze (3) wechselt eine Permutation durch jede Vertauschung von zwei Zeigern ihre Classe. *Deshalb gehört eine Permutation zu der ersten oder zu der zweiten Classe, je nachdem bei ihrer Darstellung aus der Reihe der Zeiger* 1, 2, 3, . . . n *eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Zeiger zur Anwendung kommt.* Diese Anzahl lässt sich auf die Anzahl der zugehörigen Cyclen zurückführen.

Es möge eine bestimmte Permutation (5) in p Cyclen zerfallen, und die Anzahlen der Zeiger des ersten, zweiten Cyclus, u. s. f. seien respective

$$e_1, e_2, \ldots e_p.$$

Wir haben gesehen, dass ein Cyclus von e Zeigern durch $e-1$ Vertauschungen von zwei Zeigern vertreten werden kann, und diese Bestimmung gilt auch für den Fall $e=1$, in welchem $e-1$ gleich Null wird. Aus dieser Ursache lässt sich die in Rede stehende Permutation durch eine Anzahl von Vertauschungen zweier Zeiger ersetzen, die gleich der Summe der Anzahlen $e_1-1+e_2-1+\ldots+e_p-1$ ist. Allein die Summe der in allen Cyclen enthaltenen Zeiger $e_1+e_2+\ldots+e_p$ ist gleich der Anzahl n der sämmtlichen Zeiger. Mithin wird die bezeichnete Summe der Anzahlen gleich der Zahl $n-p$, und diese Zahl entscheidet darüber, ob die vorgelegte Permutation zu der ersten oder der zweiten Classe gehört. Wir haben somit den Satz:

(4) *Wenn eine gegebene Permutation von n Zeigern in p Cyclen zerfällt, so gehört sie zu der ersten oder zweiten Classe, je nachdem die Zahl $n-p$ gerade oder ungerade ist.*

In dem oben behandelten Beispiele war die Zahl $n=9$,

die Zahl p der Cyclen gleich 4; da also $n-p=5$ eine ungerade Zahl ist, so gehört die Permutation zu der zweiten Classe.

Gegenwärtig können wir auch die vorhin gemachte Aeusserung rechtfertigen, dass die Eintheilung der Permutationen, welche bei der Determinante eines Systems von 4 Elementen und von 9 Elementen beobachtet wurde, mit der gegenwärtigen allgemeinen Eintheilung der Permutationen in zwei Classen übereinstimmt. Die beiden Permutationen *von zwei Zeigern* vertheilen sich in die beiden Classen so, dass $\left|\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}\right|$ die erste Classe und $\left|\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right|$ die zweite Classe vertritt. Die drei Permutationen *von drei Zeigern*

$$\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{matrix}\right| \begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{matrix} \left|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{matrix}\right|$$

für die in der Determinante (3*) das positive Vorzeichen erscheint, gehören zu der definirten ersten Classe; bei der ersten Permutation ist dies selbstverständlich, bei der zweiten und dritten Permutation finden wir, dass jede *einen* Cyclus bildet, und da hier die Zahl $n=3$ ist, so wird die entscheidende Zahl $n-p=2$. Die drei Permutationen

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{matrix} \left| \begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{matrix} \quad \begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{matrix}\right.$$

für die in der Determinante (3*) das negative Zeichen auftritt, gehören dagegen zu der definirten zweiten Classe; denn jede Permutation zerfällt in zwei Cyclen, wodurch die entscheidende Zahl $n-p$ den Werth 1 bekommt.

§ 74. Allgemeine Definition einer Determinante des $n$ten Grades. Grundeigenschaften einer Determinante. Allgemeine Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten für den Fall einer von Null verschiedenen Determinante.

Das im vorigen § mit (1) bezeichnete System von n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ hat das System von n^2 Coefficienten

(1)
$$\begin{matrix}b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n}\\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn}.\end{matrix}$$

Die zu diesem System von n^2 Elementen gehörende Determinante des nten Grades R wird folgendermassen definirt. Man bilde ein Product aus n solchen Elementen des Systems (1), bei denen sowohl die sämmtlichen ersten Zeiger von einander differiren, wie auch die sämmtlichen zweiten Zeiger von einander differiren

(2) $$b_{1\alpha_1}\, b_{2\alpha_2} \dots b_{n\alpha_n}.$$

Die ersten Zeiger bilden die natürliche Reihe der Zahlen $1, 2, 3, .. n$, die zweiten Zeiger irgend eine bestimmte Permutation derselben $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Das Product (2) werde mit dem positiven Vorzeichen oder dem negativen Vorzeichen versehen, je nachdem die betreffende Permutation $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_n \end{matrix}$ zu der ersten oder der zweiten Classe gehört, es werde ferner an die Stelle von der Permutation $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ nach einander jede einzelne Permutation der n Zeiger substituirt, das Vorzeichen des Products der gegebenen Regel gemäss bestimmt, und von all diesen Producten die Summe genommen, so ist dieselbe die Determinante R.

Da nach dem vorigen § unter den $n!$ Permutationen der n Zeiger $1, 2, 3, \dots n$ die eine Hälfte zu der ersten, die zweite Hälfte zu der zweiten Classe gehört, so besteht die Determinante R aus $n!$ Gliedern, von denen die eine Hälfte mit dem positiven, die andere Hälfte mit dem negativen Vorzeichen behaftet ist, und zwar trägt das Glied

$$b_{11}\, b_{22} \dots b_{nn},$$

welches aus denjenigen Elementen des quadratisch geordneten Schemas (1) besteht, die sich in der absteigend von links nach rechts laufenden Diagonale befinden, das *positive Vorzeichen.* Auf den Vorzug des Diagonalengliedes gründet sich die Bezeichnung der Determinante

(3) $$R = \Sigma \pm b_{11}\, b_{22} \dots b_{nn}.$$

Das Corollar zu dem Satze (1) des vorigen § lehrt, dass die Permutation, welche, nach einer gegebenen Permutation

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{matrix}$$

angewendet, zu der ursprünglichen Zeigerstellung zurückführt,

und die dort so bezeichnet ist $\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ 1 & 2 \ldots n\end{matrix}$, zu derselben Classe gehört, wie die gegebene. Diese Bemerkung vermittelt den Uebergang zu einer *anderen Definition der Determinante R.* Sobald verlangt wird, dass ein Product von n Elementen des gegebenen Schemas

(4) $$b_{\gamma_1 1}\; b_{\gamma_2 2} \ldots b_{\gamma_n n},$$

bei dem die Zeiger $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ alle von einander verschieden sind, das positive oder negative Vorzeichen erhalte, je nachdem die Permutation

$$\begin{matrix}1 & 2 \ldots n \\ \gamma_1 & \gamma_2 \cdots \gamma_n\end{matrix}$$

zu der ersten oder zweiten Classe gehört, sobald hierauf die Reihe der ersten Zeiger die sämmtlichen Permutationen durchläuft, und von allen entstehenden Producten die Summe genommen wird, so erhält man wieder die Determinante R. Dieses Bildungsgesetz liefert dieselben Glieder, wie das ursprünglich angegebene Bildungsgesetz der Determinante R, und zwar jedes Glied mit demselben Vorzeichen, welches ihm dort beigelegt ist. Denn man kann in dem Product (4) die einzelnen Factoren so verstellen, dass die ersten Zeiger $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ in die Reihenfolge der natürlichen Zahlen kommen; dann nehmen die zweiten Zeiger eine vollkommen bestimmte Reihenfolge an, die durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bezeichnet werden möge, das Product (4) wird gleich dem Product $b_{1\alpha_1}\; b_{2\alpha_2} \ldots b_{n\alpha_n}$, und hiebei fällt offenbar die Permutation

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 \ldots n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \cdots \gamma_n\end{matrix}$$

mit der Permutation

$$\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 \ldots n\end{matrix}$$

zusammen. In der aus den sämmtlichen Producten (4) zu bildenden Summe soll sich das Vorzeichen des Products (4) nach der Permutation $\begin{matrix}1 & 2 \ldots n \\ \gamma_1 & \gamma_2 \cdots \gamma_n\end{matrix}$ oder nach der mit dieser zusammenfallenden Permutation $\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ 1 & 2 \ldots n\end{matrix}$ richten, das heisst für die erste Classe positiv, für die zweite Classe negativ sein. Wenn $\gamma_1\; \gamma_2 \ldots \gamma_n$ die sämmtlichen Permutationen durchläuft, so

durchläuft auch die in Rede stehende Folge $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die sämmtlichen Permutationen. Die aus den sämmtlichen Producten (4) zu bildende Summe wird daher gleich der aus den sämmtlichen Producten $b_{1\alpha_1}\ b_{2\alpha_2} \ldots b_{n\alpha_n}$ zu bildenden Summe, und zwar mit der Bestimmung, dass das einzelne Product positiv oder negativ genommen werde, je nachdem die Permutation

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{matrix}$$

zu der ersten oder zweiten Classe gehört. Diese Bestimmung deckt sich aber vermöge des angeführten Corollars mit derjenigen Bestimmung, welche in der ursprünglichen Definition der Determinante R enthalten ist.

Die zweite Definition der Determinante R unterscheidet sich von der ersten Definition dadurch, dass die ersten Zeiger die Rolle übernehmen, welche den zweiten Zeigern angewiesen war, und umgekehrt. Nun hat in dem System (1) jede Horizontalreihe denselben ersten Zeiger und jede Vertikalreihe denselben zweiten Zeiger. Wenn daher in dem System (1) weder die Reihenfolge der Horizontalreihen noch die Reihenfolge der Vertikalreihen geändert wird, jedoch die einen mit den andern vertauscht werden, so resultirt ein System

(5)
$$\begin{matrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn}. \end{matrix}$$

Wird die Determinante dieses Systems auf Grund der ersten Definition gebildet, so entsteht die auf Grund der zweiten Definition gebildete Determinante des Systems (1). Mithin gilt der Satz:

(1) *Die Determinante eines Systems von n^2 Elementen bleibt ungeändert, sobald in dem quadratisch geordneten Schema der Elemente die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen ohne Aenderung ihrer respectiven Reihenfolge vertauscht werden.*

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Determinante verhält, wenn in dem quadratisch geordneten Schema die Reihenfolge der Vertikalreihen oder der Horizontalreihen geändert wird. Man vertausche zunächst zwei Horizontalreihen unter

einander. Dann vertauschen sich nur die betreffenden ersten Zeiger λ und μ unter einander, während alle zweiten Zeiger unverändert bleiben. Die betreffende Determinante wird daher vermöge der ersten Definition aus der Summe der Glieder (2) erhalten, welche mit ihren von der Permutation $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ abhängenden Vorzeichen versehen sind, indem in jedem einzelnen Product (2) die ersten Zeiger λ und μ unter einander vertauscht werden. Statt dessen kann man bei dem betreffenden Product die Reihe der ersten Zeiger wiederherstellen und in der Reihe der zweiten Zeiger $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ den Zeiger α_λ mit dem Zeiger α_μ vertauschen, während das Vorzeichen sich nach der Permutation $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ richtet. Nach dem Satze (3) des vorigen § geht jede Permutation durch Vertauschung von zwei Zeigern in eine Permutation der anderen Classe über. Folglich haben in der neu gebildeten Determinante alle diejenigen Glieder das negative Vorzeichen, welche in R das positive Zeichen tragen, und alle diejenigen Glieder das positive Zeichen, welche in R das negative Zeichen tragen. Die neu gebildete Determinante ist deshalb gleich dem negativ genommenen Werth der Determinante R. Bei der Vertauschung von zwei Vertikalreihen des quadratisch geordneten Schemas vertauschen sich nur die betreffenden zweiten Zeiger unter einander, und die ersten Zeiger bleiben ungeändert. Mithin führt hier die Anwendung der zweiten Definition der Determinante durch ähnliche Schlüsse zu dem Ergebniss, dass die neu gebildete Determinante gleich dem negativ genommenen Werth der Determinante R ist. Wir haben daher den Satz:

(2) *Die Determinante eines Systems von n^2 Elementen geht in den entgegengesetzten Werth über, sowohl wenn in dem quadratisch geordneten Schema der Elemente zwei Horizontalreihen, wie auch wenn in demselben zwei Vertikalreihen unter einander vertauscht werden.*

Nimmt man mit den Horizontalreihen des Schemas eine beliebige Permutation vor, so kann dieselbe nach dem, was im vorigen § von den Permutationen gesagt ist, immer auf eine Anzahl von Vertauschungen von zwei Reihen, die bestimmten Zeigern entsprechen, zurückgeführt werden. Da die Determinante in Folge von jeder solcher Vertauschung mit der negativen Einheit multiplicirt wird, so muss die Determinante des

durch die in Rede stehende Permutation entstandenen Schemas gleich R oder gleich $-R$ sein, je nachdem jene Vertauschungen in gerader oder in ungerader Anzahl angewendet sind. Nun gehört aber die Permutation der Horizontalreihen zu der ersten oder zweiten Classe, je nachdem sie aus einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen zweier Zeiger hervorgeht. Also *ist die Determinante des durch eine Permutation der Horizontalreihen entstandenen Schemas gleich R oder gleich $-R$, je nachdem die Permutation zu der ersten oder der zweiten Classe gehört. Ebenso erkennt man, dass, wenn mit den Vertikalreihen des Schemas eine beliebige Permutation ausgeführt wird, die Determinante des resultirenden Schemas gleich R oder gleich $-R$ wird, je nachdem die angewendete Permutation zu der ersten oder der zweiten Classe gehört.*

Bis jetzt sind die n^2 Elemente des Schemas keiner Bedingung unterworfen worden. Es ist nun die Voraussetzung zu erwägen, dass irgend zwei Horizontalreihen des Schemas in ihren aufeinander folgenden Elementen beziehungsweise übereinstimmen, oder dass, wenn die Reihen durch die Zeiger λ und μ characterisirt sind, die n Gleichungen bestehen

$$b_{\lambda 1} = b_{\mu 1},\ b_{\lambda 2} = b_{\mu 2}, \ldots b_{\lambda n} = b_{\mu n}.$$

Alsdann muss die Determinante R des Schemas, sobald die λte Horizontalreihe mit der μten Horizontalreihe vertauscht wird, einerseits ungeändert bleiben, andrerseits nach dem Satze (2) in $-R$ übergehen. Es muss daher unter der angegebenen Bedingung $R = -R$ sein, folglich R verschwinden. Aus der Voraussetzung, dass in dem gegebenen Schema irgend zwei Vertikalreihen in ihren auf einander folgenden Elementen beziehungsweise gleich sind, ergiebt sich die gleiche Consequenz. Es besteht deshalb der Satz:

(3) *Wenn in dem quadratisch geordneten Schema von n^2 Elementen zwei beliebige Horizontalreihen einander gleich sind, und wenn in dem Schema zwei beliebige Vertikalreihen einander gleich sind, so wird die zugeordnete Determinante gleich Null.*

Aus dem Bildungssetze der Determinante R kann man die Antwort auf die Frage ableiten, mit welcher ganzen Function der Elemente ein bestimmtes Element in der Determinante multi-

plicirt sei. Um alle Glieder zu finden, in denen ein bestimmtes Element $b_{\varrho\sigma}$ auftritt, sind alle Producte (2) zu nehmen, in denen der erste Zeiger gleich ϱ und der zweite Zeiger gleich σ ist. Dadurch bekommt in der Permutation $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ der Zeiger α_ϱ den unveränderlichen Werth σ, und die übrigen $n-1$ Zeiger durchlaufen ihre sämmtlichen Permutationen. Die gesuchte ganze Function der Elemente, die in der Determinante R mit $b_{\varrho\sigma}$ multiplicirt ist und $B_{\varrho\sigma}$ heissen möge, wird daher erhalten, indem man in dem Product

$$b_{1\alpha_1}\ b_{2\alpha_2} \ldots b_{n\alpha_n}$$

den Factor $b_{\varrho\sigma}$ fortlässt, in dem Product der übrig bleibenden $n-1$ Factoren die betreffenden $n-1$ Zeiger auf alle Arten permutirt, das Vorzeichen des Products positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Folge der n Zeiger $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ eine Permutation der ersten oder der zweiten Classe darbietet, und alle jene Producte addirt.

Es zeigt sich jetzt, *dass die Function $B_{\varrho\sigma}$ eine zu einem Schema von $(n-1)^2$ Elementen gehörende Determinante, oder eine Determinante des $(n-1)$ten Grades ist.* Um dies deutlich zu machen, bestimmen wir zuerst die Function B_{11}, welche in R in das Element b_{11} multiplicirt ist, das in dem Schema (1) die Stelle links oben einnimmt. Dieses Element tritt in dem Diagonalengliede

$$b_{11}\ b_{22}\ b_{33} \ldots b_{nn}$$

auf, das in R das positive Zeichen trägt. Wenn man jetzt die $(n-1)$ Zeiger

$$2\ 3\ 4 \ldots n$$

auf alle Arten permutirt, und die Permutationen nach dem aufgestellten Princip in zwei Classen theilt, so gehört jede einzelne Permutation zu der gleichnamigen Classe, zu der diejenige Permutation der n Zeiger gehört, welche aus der in Rede stehenden Permutation durch Vorschreiben des sich nicht ändernden Zeigers 1 erhalten wird. Die Function B_{11} wird daher gleich der Determinante des Schemas von $(n-1)^2$ Elementen, das aus dem Schema (1) durch Weglassen der ersten Horizontalreihe und der ersten Vertikalreihe entsteht. Nun kann man aber ein be-

liebiges Element $b_{\varrho\sigma}$ in dem Schema (1) an die Stelle des Elements b_{11} bringen, indem man erstens die 1te bis zu der $(\varrho-1)$ten Horizontalreihe um je eine Stelle vorwärts schiebt, die ϱte aber an die Stelle der ersten setzt, und zweitens die 1te bis zu der $(\sigma-1)$ten Vertikalreihe um je eine Stelle vorwärts schiebt, dann aber die σte an die Stelle der ersten bringt. Die Permutation der Horizontalreihen ist eine cyclische, die durch $\varrho-1$ Vertauschungen von zwei Reihen hervorgebracht werden kann, und die Permutation der Vertikalreihen ist eine cyclische, die durch $\sigma-1$ Vertauschungen von zwei Reihen hervorgebracht werden kann. Nach dem Satze (2) geht bei der Vertauschung von je zwei Horizontalreihen und bei der Vertauschung von je zwei Vertikalreihen die Determinante R in $-R$ über. Sie erhält daher durch die Permutation der Horizontalreihen den Factor $(-1)^{\varrho-1}$, hierauf durch die Permutation der Vertikalreihen den Factor $(-1)^{\sigma-1}$, mithin wird die Determinante des neuen Schemas, in welchem $b_{\varrho\sigma}$ die Ecke links oben einnimmt, gleich $(-1)^{\varrho+\sigma}R$. In dieser Determinante ist der Factor von $b_{\varrho\sigma}$ gleich der Determinante des Schemas von $(n-1)^2$ Elementen, das durch Weglassen der ersten Horizontalreihe und der ersten Vertikalreihe erhalten wird. Dieses Schema geht aber aus dem Schema (1) dadurch hervor, dass die ϱte Horizontalreihe derselben weggelassen und die σte Vertikalreihe weggelassen ist, und die Reihen ohne Aenderung der Ordnung aneinander gerückt sind. Die aus dem genannten Schema von $(n-1)^2$ Elementen gebildete Determinante war gleich dem Factor des Elements $b_{\varrho\sigma}$ in der Determinante $(-1)^{\varrho+\sigma}R$; die bezeichnete Determinante des $(n-1)$ten Grades ist daher, mit dem Factor $(-1)^{\varrho+\sigma}$ multiplicirt, gleich dem Factor des Elements $b_{\varrho\sigma}$ in der Determinante R, oder der zu bestimmenden Function $B_{\varrho\sigma}$. Der Factor $(-1)^{\varrho+\sigma}$ ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem $\varrho+\sigma$ gerade oder ungerade ist. So erhellt, dass, wenn $\varrho+\sigma$ ungerade ist, durch Umstellung einer Reihe ein Schema erhalten werden kann, dessen Determinante selbst gleich $B_{\varrho\sigma}$ wird; doch empfiehlt es sich für viele Fälle, einen Factor, der nach einer bestimmten Regel gleich der positiven oder der negativen Ein-

heit ist, in der Definition einer Determinante beizubehalten. Die so eben characterisirten Verbindungen $B_{\varrho\sigma}$ gehen, wenn die Zahl $n=3$ ist, und wenn statt des Schemas (1) das Schema (9) des § 72 gesetzt wird, in die Verbindungen über, welche dort respective mit $A_1, A_2, \ldots C_3$ bezeichnet worden und explicite als Determinanten des zweiten Grades dargestellt sind. Sie bilden, nach den drei Buchstaben vertheilt, die Multiplicatoren, welche zu der Auflösung des dortigen Systems (2) von drei Gleichungen mit drei Unbekannten dienen, und genügen diesem Zweck vermöge der Gleichungen

(3), (3*), (3**), (5), (5*), (5**), (6), (6*), (6**).

Es sind jetzt die entsprechenden Eigenschaften der Verbindungen $B_{\varrho\sigma}$ nachzuweisen.

Die Determinante R des $n$ten Grades ist in Bezug auf die n^2 Elemente, aus denen sie besteht, eine homogene Function des $n$ten Grades. Wenn man aber nicht alle Elemente, sondern nur bestimmte Gruppen derselben ins Auge fasst, so kann sich in Bezug auf diese der Grad niedriger gestalten. Nimmt man alle diejenigen Elemente, in denen der erste Zeiger einen und denselben aber beliebigen Werth λ hat, also die in derselben Horizontalreihe des Schemas befindlichen Elemente

$$b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \ldots b_{\lambda n},$$

so muss jedes Glied der Determinante in eines dieser Elemente und nur in ein einziges multiplicirt sein, weil in jedem Gliede alle ersten Zeiger unter sich verschieden und alle zweiten Zeiger unter sich verschieden sind. Die Determinante R ist deshalb eine homogene Function des ersten Grades in Bezug auf die Elemente $b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \ldots b_{\lambda n}$, und die betreffenden Factoren sind die vorhin bestimmten Verbindungen $B_{\lambda 1}, B_{\lambda 2}, \ldots B_{\lambda n}$, in denen jene n Elemente nicht auftreten. Hieraus entspringt für die Function R die für jeden Werth von λ gültige Darstellung

$$(6) \qquad R = b_{\lambda 1} B_{\lambda 1} + b_{\lambda 2} B_{\lambda 2} + \ldots b_{\lambda n} B_{\lambda n}.$$

Nach dem Satze (3) muss die Determinante eines Schemas verschwinden, welches aus dem Schema (1) entsteht, indem die λte Horizontalreihe der Elemente durch *eine von ihr verschiedene Horizontalreihe, welche die λ'te sein möge, ersetzt wird;* denn in dem neu zu bildenden Schema existiren dann zwei einander

gleiche Horizontalreihen. Weil nun in diesem neuen Schema alle Reihen mit Ausnahme der λten ungeändert geblieben sind, die Verbindungen $B_{\lambda 1}, B_{\lambda 2}, \ldots B_{\lambda n}$ indessen nur aus diesen ungeänderten Horizontalreihen zusammengesetzt werden, so entsteht die Determinante des neuen Schemas dadurch, dass in dem Ausdrucke (6) $b_{\lambda' 1}$ für $b_{\lambda 1}$, $b_{\lambda' 2}$ für $b_{\lambda 2}$ u. s. f. substituirt wird. Auf diese Weise erhalten wir eine Determinante, die gleich Null ist; mithin gilt die Gleichung, bei der λ und λ' beliebige Werthe haben dürfen, die von einander verschieden sind,

(7) $$0 = b_{\lambda' 1}\, B_{\lambda 1} + b_{\lambda' 2}\, B_{\lambda 2} + \ldots + b_{\lambda' n}\, B_{\lambda n}.$$

Offenbar lässt sich die Determinante R auch als Function der n Elemente auffassen, welche eine bestimmte Vertikalreihe bilden

$$b_{1\nu}, b_{2\nu}, \ldots b_{n\nu},$$

und ist in Bezug auf diese ebenfalls eine homogene Function des ersten Grades. Durch Anwendung der gleichen Schlüsse ergiebt sich dann für R die für jeden Werth von ν gültige Darstellung

(7) $$R = b_{1\nu}\, B_{1\nu} + b_{2\nu}\, B_{2\nu} + \ldots + b_{n\nu}\, B_{n\nu},$$

und auf Grund des obigen Satzes (3) die Relation

(8) $$0 = b_{1\nu'}\, B_{1\nu} + b_{2\nu'}\, B_{2\nu} + \ldots + b_{n\nu'}\, B_{n\nu},$$

wo ν und ν' irgend zwei von einander verschiedene Zeiger bedeuten.

Mit Hülfe der letzten Gleichungen erhalten wir unter der Voraussetzung, dass die Determinante R nicht gleich Null ist, die Auflösung des Systems von n Gleichungen mit den n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$, das in § 73 mit (2) bezeichnet ist. Durch die Multiplication der auf einander folgenden Gleichungen in (2) mit den respectiven Factoren $B_{1\nu}, B_{2\nu}, \ldots B_{n\nu}$, wo ν successive die n Zahlen 1, 2, 3, ... n bedeutet, und die jedesmalige Addition ergiebt sich als Consequenz dieser Gleichungen, da der Factor von x_ν wegen (7) gleich der Determinante R wird, die Factoren der übrigen Unbekannten jedoch wegen (8) verschwinden, die Gleichung

(9) $$R\, x_\nu = B_{1\nu}\, r_1 + B_{2\nu}\, r_2 + \ldots + B_{n\nu}\, r_n.$$

Aus derselben folgt durch Division mit der von Null ver-

schiedenen Determinante R für die sämmtlichen Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Bestimmung

$$(10) \qquad x_\nu = \frac{B_{1\nu}\, r_1 + B_{2\nu}\, r_2 + \ldots + B_{n\nu}\, r_n}{R}.$$

Andere Werthe, als die vorliegenden, können das System von Gleichungen, aus dem die Bestimmung der Werthe abgeleitet ist, nicht erfüllen. Wenn man aber diese Werthe in die einzelnen Gleichungen des Systems substituirt, so werden sie allerdings befriedigt. Nimmt man die linke Seite der λten Gleichung des Systems, so kommt

$$\begin{aligned} b_{\lambda 1}\, x_1 + b_{\lambda 2}\, x_2 + \ldots + b_{\lambda n}\, x_n & \\ = b_{\lambda 1} & \frac{(B_{11}\, r_1 + B_{21}\, r_2 + \ldots + B_{n1}\, r_n)}{R} \\ + b_{\lambda 2} & \frac{(B_{12}\, r_1 + B_{22}\, r_2 + \ldots + B_{n2}\, r_n)}{R} \\ + \ldots & \\ + b_{\lambda n} & \frac{(B_{1n}\, r_1 + B_{2n}\, r_2 + \ldots + B_{nn}\, r_n)}{R}. \end{aligned}$$

Es werden aber die Summen, mit denen hier beziehungsweise $r_1, r_2, \ldots r_n$ multiplicirt erscheinen,

$$\frac{b_{\lambda 1}\, B_{11} + b_{\lambda 2}\, B_{12} + \ldots + b_{\lambda n}\, B_{1n}}{R},$$

$$\frac{b_{\lambda 1}\, B_{21} + b_{\lambda 2}\, B_{22} + \ldots + b_{\lambda n}\, B_{2n}}{R},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_{\lambda 1}\, B_{n1} + b_{\lambda 2}\, B_{n2} + \ldots + b_{\lambda n}\, B_{nn}}{R},$$

durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmt. Die Zähler aller dieser Brüche verschwinden nach (7) mit Ausnahme von dem Zähler desjenigen Bruches, der als Factor zu r_λ gehört, und dieser wird nach (6) gleich R. Da nun jeder der Zähler durch den Nenner R zu dividiren ist, so sind alle Factoren von $r_1, r_2, \ldots r_n$ mit Ausnahme des Factors von r_λ gleich Null, und dieser gleich der Einheit. Man hat deshalb, wie zu beweisen war, in Folge der Werthe (10) die Gleichung

$$b_{\lambda 1}\, x_1 + b_{\lambda 2}\, x_2 + \ldots + b_{\lambda n}\, x_n = r_\lambda.$$

Das System (10) *giebt daher für ein von Null verschiedenes* R *die einzigen Werthe der Unbekannten* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *an, durch welche das System von Gleichungen* (2) *in* § 73 *befriedigt wird.*

§ 75. Vollständige Discussion der Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten für den Fall einer verschwindenden Determinante.

Die n Functionen des ersten Grades $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche in (1) des § 73 definirt sind, werden von einander unabhängige Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ genannt, wenn es möglich ist, die n Variabeln so zu bestimmen, dass die n Functionen ein System von n ganz beliebig gewählten Werthen annehmen. Dies ist nach dem vorigen § stets der Fall, wofern die Determinante R einen von Null verschiedenen Werth hat; folglich *sind die n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ von einander unabhängig, sobald die zugehörige Determinante R nicht gleich Null ist.* Man kann die Unabhängigkeit der n Functionen von einander auch dadurch definiren, dass man sagt, die n Functionen seien von einander unabhängig, sobald es unmöglich ist, mit Hülfe von n Constanten $E_1, E_2, \ldots E_n$, die nicht, jede für sich, gleich Null sind, eine Gleichung zu bilden

$$E_1 f_1 + E_2 f_2 + \ldots + E_n f_n = 0;$$

denn gäbe es eine solche Gleichung, so würde auf Grund derselben, da wenigstens eine der Grössen $E_1, \ldots E_n$ nicht gleich Null sein darf, wenn etwa E_1 nicht gleich Null wäre, der Werth von f_1 bestimmt sein, nachdem über die Werthe von $f_2, f_3, \ldots f_n$ verfügt worden ist.

Dagegen heissen n Functionen des ersten Grades $f_1, f_2, \ldots f_n$ von einander abhängig, sobald es möglich ist, eine oder mehrere derselben durch die übrigen Functionen auszudrücken. Es hat sich bei zwei Functionen mit zwei Variabeln und bei drei Functionen mit drei Variabeln gezeigt, dass sie von einander abhängig sind, sobald die betreffende Determinante gleich Null wird. In gleicher Weise gilt der Satz, *dass n Functionen des ersten Grades $f_1, f_2, \ldots f_n$ von einander abhängig sind, wenn die betreffende Determinante R verschwindet*; der zu führende Beweis desselben bedarf noch einiger vorbereitenden Bemerkungen.

Im vorigen § sind in der Determinante des $n$ten Grades R die Factoren der einzelnen Elemente $b_{\varrho\sigma}$ aufgesucht und mit $B_{\varrho\sigma}$ bezeichnet worden; diese haben sich mit Hinzuziehung eines Factors $(-1)^{\varrho+\sigma}$, der entweder gleich der positiven oder der negativen Einheit ist, als diejenigen Determinanten des $(n-1)$ten Grades erwiesen, deren Elemente aus dem Schema der n^2 Elemente hervorgehen, indem eine bestimmte Horizontalreihe und eine bestimmte Vertikalreihe fortgelassen wird. Wenn man denselben Process mit jeder der Verbindungen $B_{\varrho\sigma}$ vornimmt, so entstehen unter Hinzufügung von Factoren, die wieder nur gleich der positiven oder negativen Einheit sind, Determinanten des $(n-2)$ten Grades, deren Elemente aus dem Schema der n^2 Elemente erhalten werden, indem man zwei Horizontalreihen und gleichzeitig zwei Vertikalreihen weglässt. Dieses Verfahren kann aber so lange fortgesetzt werden, bis zuletzt *die einzelnen Elemente* des Schemas als Vertreter von *Determinanten des ersten Grades* zurück bleiben. Man nennt nun jede Determinante des $(n-l)$ten Grades, deren Elemente aus dem Schema der n^2 Elemente durch Weglassen von l Horizontalreihen und l Vertikalreihen gefunden werden, *eine partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades von dem ursprünglichen System der n^2 Elemente.* Die Verbindungen $B_{\varrho\sigma}$ sind demnach gleich bestimmten mit $(-1)^{\varrho+\sigma}$ multiplicirten *partiellen Determinanten des $(n-1)$ten Grades*, werden aber noch mit einem besonderen Namen *adjungirte Elemente des Systems* genannt, und zwar sagt man, dass das adjungirte Element $B_{\varrho\sigma}$ mit dem Element $b_{\varrho\sigma}$ des ursprünglichen Schemas correspondire. Wenn nun für ein System von Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ die zugeordnete Determinante R verschwindet, so muss man, um die Abhängigkeit dieser Functionen sicher zu beurtheilen, zuerst prüfen, ob die sämmtlichen adjungirten Elemente $B_{\varrho\sigma}$ mit R zusammen verschwinden oder nicht. Findet das erstere statt, so sind die sämmtlichen partiellen Determinanten des $(n-2)$ten Grades zu untersuchen, und es ist überhaupt mit der Betrachtung der sämmtlichen partiellen Determinanten der absteigend auf einander folgenden Grade so lange fortzufahren, bis man zum ersten Mal zu einem Grade gelangt, bei dem wenigstens *eine* partielle Determinante nicht

gleich Null ist. Die letzten partiellen Determinanten können die Elemente $b_{\varrho\sigma}$ selbst sein, die nicht sämmtlich verschwinden dürfen, wenn nicht $f_1, f_2, \ldots f_n$ stets gleich Null sein sollen.

Wir nehmen jetzt an, dass alle partiellen Determinanten des $(n-1)$ten, $(n-2)$ten bis $(n-l+1)$ten Grades verschwinden, dass dagegen eine partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades nicht den Werth Null habe; es sei zunächst diejenige, welche zu dem Schema

$$(1) \qquad \begin{array}{llll} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,\,n-l} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,\,n-l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-l,\,1} & b_{n-l,\,2} & \ldots & b_{n-l,\,n-l} \end{array}$$

gehört, und sie möge mit K bezeichnet werden. Die betreffenden Elemente sind die Coefficienten der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ in den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{n-l}$. Wenn eine partielle Determinante desselben Grades von einem anderen Schema als von Null verschieden gegeben ist, so werden durch die ersten Zeiger $n-l$ Functionen unter den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, und durch die zweiten Zeiger $n-l$ Variabeln unter den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet, mit denen entsprechend verfahren werden kann. Aus dem Umstande, dass die Determinante K des Schemas (1) nicht gleich Null ist, lässt sich nun schliessen, dass man den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{n-l}$ ganz beliebige Werthe vorschreiben darf und die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ entsprechend bestimmen kann, während die Variabeln $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ ganz beliebige Werthe erhalten, und dass ferner jede der Functionen $f_{n-l+1}, \ldots f_n$ gleich einem homogenen Ausdrucke des ersten Grades von den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{n-l}$, mithin von diesen abhängig ist. Man fordere für jede der $n-l$ Functionen $f_1, \ldots f_{n-l}$ einen ganz beliebigen Werth, respective die Werthe $r_1, r_2, \ldots r_{n-l}$, dann erlauben die $(n-l)$ Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} b_{11}\, x_1 + \ldots + b_{1,\,n-l}\, x_{n-l} + b_{1,\,n-l+1}\, x_{n-l+1} + \ldots + b_{1,\,n}\, x_n = r_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n-l,\,1}\, x_1 + \ldots + b_{n-l,\,n-l}\, x_{n-l} + b_{n-l,\,n-l+1}\, x_{n-l+1} + \ldots + b_{n-l,\,n}\, x_n = r_{n-l} \end{cases}$$

die $(n-l)$ Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ durch das in dem vorigen §

entwickelte Verfahren unzweifelhaft zu bestimmen, während den Variabeln $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ ganz beliebige Werthe beigelegt sind.

Denn, wenn die Gleichungen (2) in die Gestalt gesetzt werden

$$(2^*)\quad \left\{\begin{array}{l} b_{11}\, x_1 + \ldots + b_{1,n-l}\, x_l = -b_{1,n-l+1}\, x_{n-l+1} - \ldots + r_1, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n-l,1}\, x_1 + \ldots + b_{n-l,n-1}\, x_l = -b_{n-l,n-l+1}\, x_{n-l+1} - \ldots + r_{n-l} \end{array}\right.$$

so enthalten die linken Seiten $(n-l)$ Ausdrücke des ersten Grades von den $(n-l)$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$, deren Determinante K genannt worden ist und nach der Annahme einen von Null verschiedenen Werth hat; auf der rechten Seite befinden sich dagegen Ausdrücke, die als gegeben betrachtet werden, und daraus folgt die Richtigkeit des Behaupteten. Die Abhängigkeit, in welcher jede Function f_σ aus der Reihe der Functionen $f_{n-l+1}, \ldots f_n$ von den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{n-l}$ steht, ergiebt sich dadurch, dass man zu den Darstellungen der letztern die Darstellung der Function f_σ hinzufügt

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 = b_{11} x_1 + \ldots + b_{1,n-l}\, x_{n-l} + b_{1,n-l+1}\, x_{n-l+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b_{1,n}\, x_n \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n-l} = b_{n-l,1}\, x_1 + \ldots + b_{n-l,n-l}\, x_{n-l} + b_{n-l,n-l+1}\, x_{n-l+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b_{n-l,n}\, x_n \\ f_\sigma = b_{\sigma,1}\, x_1 + \ldots + b_{\sigma,n-l}\, x_{n-l} + b_{\sigma,n-l+1}\, x_{n-l+1} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b_{\sigma,n}\, x_n \end{array}\right.$$

und jetzt die einzelnen Functionen mit solchen Factoren multiplicirt, als ob in den Ausdrücken rechts die $n - l + 1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}, x_{n-l+1}$ die Unbekannten wären, und die Unbekannte x_{n-l+1} bestimmt werden sollte. Die bezeichneten, nach den Vorschriften des vorigen § zu bildenden Factoren werden respective die partiellen Determinanten unseres Schemas von n^2 Elementen, die zugleich adjungirte Elemente des Schemas

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdot\cdot & b_{1,n-l} & b_{1,n-l+1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot\cdot & b_{2,n-l} & b_{2,n-l+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-l,1} & b_{n-l,2} & \cdot\cdot & b_{n-l,n-l} & b_{n-l,n-l+1} \\ b_{\sigma,1} & b_{\sigma,2} & \cdot\cdot & b_{\sigma,n-l} & b_{\sigma,n-l+1} \end{matrix}$$

sind, und hier mit den Elementen der letzten Vertikalreihe correspondiren. Das letzte adjungirte Element fällt mit der Determinante K zusammen, die anderen mögen von oben nach unten gehend so bezeichnet werden

$$\mathfrak{J}_1^{(\sigma)}, \mathfrak{J}_2^{(\sigma)}, \ldots \mathfrak{J}_{n-l}^{(\sigma)}.$$

Multiplicirt man jetzt die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_{n-l}, f_\sigma$ beziehungsweise mit den Factoren $\mathfrak{J}_1^{(\sigma)}, \mathfrak{J}_2^{(\sigma)}, \ldots \mathfrak{J}_{n-l}^{(\sigma)}, K$ und addirt, so werden die Factoren der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ wegen der Relationen (7) des vorigen § an und für sich gleich Null, dagegen die Factoren der Variabeln $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ gleich partiellen Determinanten des $(n-l+1)$ten Grades. Diese sind aber vermöge der getroffenen Annahme sämmtlich gleich Null. Also verschwinden die Factoren sämmtlicher Variabeln $x_1, \ldots x_n$ und es bleibt die Gleichung

$$(4) \qquad \mathfrak{J}_1^{(\sigma)} f_1 + \mathfrak{J}_2^{(\sigma)} f_2 + \ldots + \mathfrak{J}_{n-l}^{(\sigma)} f_{n-1} + K f_\sigma = 0.$$

Aus dieser folgt, weil K nicht gleich Null ist, für f_σ die Darstellung

$$(5) \qquad f_\sigma = \frac{-\mathfrak{J}_1^{(\sigma)} f_1 - \mathfrak{J}_2^{(\sigma)} f_2 - \ldots \mathfrak{J}_{n-l}^{(\sigma)} f_{n-l}}{K},$$

welche nachgewiesen werden sollte; für σ hat man successive die Zeiger $n-l+1, n-l+2, \ldots n$ zu setzen, wobei die Determinanten $\mathfrak{J}_1^{(\sigma)}, \mathfrak{J}_2^{(\sigma)}, \ldots \mathfrak{J}_{n-l}^{(\sigma)}$ nach den gegebenen Vorschriften zu bilden sind.

Wenn jetzt ein System von n Gleichungen

$$(6) \qquad f_1 = r_1, f_2 = r_2, \ldots f_{n-l} = r_{n-l}, f_{n-l+1} = r_{n-l+1}, \ldots f_n = r_n$$

aufgelöst werden soll, so können $r_1, \ldots r_{n-l}$ frei gewählt werden, doch müssen unter den obwaltenden Umständen den Functionen $f_{n-l+1}, \ldots f_n$ solche Werthe $r_{n-l+1}, \ldots r_n$ vorgeschrieben sein, die den Relationen (5) genügen; andernfalls würde das System von Gleichungen sich selbst widersprechen. Umge-

kehrt aber werden, sobald jene Bedingungen befriedigt sind, wenn die Grössen $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ willkürlich angenommen und die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ aus den ersten $n-l$ Gleichungen bestimmt werden, die letzten l Gleichungen

$$f_{n-l+1} = r_{n-l+1}, \ldots f_n = r_n$$

wegen der Relationen (5) von selbst erfüllt sein.

Wir denken uns jetzt in dem System (6) von n Gleichungen mit n Unbekannten, welches, vollständig hingeschrieben, mit dem System (2) des § 73 zusammenfällt und die folgende Gestalt hat

$$(6^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \ldots + b_{1n} x_n = r_1 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \ldots + b_{2n} x_n = r_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \ldots + b_{nn} x_n = r_n \end{array} \right.$$

die Werthe $r_1, r_2, \ldots r_n$ so gewählt, dass sie den bezeichneten Bedingungen genügen, und dass also eine Auflösung des Systems möglich ist. Dann ist es von Interesse, zu wissen, ob durch die so eben auseinander gesetzte Methode *jede Auflösung* erhalten werden kann. Es sei irgend eine Auflösung gegeben, bei welcher die Unbekannten $x_1, x_2 \ldots x_n$ respective die Werthe

$$(7) \qquad \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$$

erhalten, und diese möge mit einer Auflösung verglichen werden, welche durch die in Rede stehende Methode erhalten ist und die Werthe

$$(8) \qquad X_1, X_2, \ldots X_n$$

geliefert hat. Wir substituiren in die Gleichungen (6*) zuerst die Werthe (7) und hierauf die Werthe (8), subtrahiren die betreffenden Gleichungen, die den gleichen ersten Zeiger haben, und erhalten durch das Fortheben der Ausdrücke rechts die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{array}{l} b_{11}(\xi_1 - X_1) + b_{12}(\xi_2 - X_2) + \ldots + b_{1n}(\xi_n - X_n) = 0 \\ b_{21}(\xi_1 - X_1) + b_{22}(\xi_2 - X_2) + \ldots + b_{2n}(\xi_n - X_n) = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1}(\xi_1 - X_1) + b_{n2}(\xi_2 - X_2) + \ldots + b_{nn}(\xi_n - X_n) = 0. \end{array}$$

Es können nun wieder, da die Derterminante K des Systems (1) von Null verschieden ist, die $(n-l)$ ersten Gleichungen als Gleichungen gelten, welche zu der Bestimmung der $(n-l)$ Grössen

$$\xi_1 - X_1, \ \xi_2 - X_2, \ .. \ \xi_{n-l} - X_{n-l}$$

dienen sollen. Weil die Auflösung (8) durch die vorhin entwickelte Methode hervorgebracht ist, so dürfen den Grössen

(10) $$X_{n-l+1}, \ X_{n-l+2}, \ .. \ X_n$$

ganz beliebige Werthe beigelegt sein, aus denen vollkommen bestimmte Werthe der Grössen

(11) $$X_1, \ X_2, \ .. \ X_{n-l}$$

hervorgegangen sind. Wir setzen, was immer möglich ist, voraus, *dass die Grössen* (10) *diejenigen Werthe haben, welche den Grössen desselben Zeigers in der gegebenen Auflösung* $\xi_1, \xi_2, .. \xi_n$ *entsprechen, so dass*

(12) $$\xi_{n-l+1} - X_{n-l+1} = 0, \ ... \ \xi_n - X_n = 0.$$

ist. Dann verwandeln sich die $(n-l)$ ersten Gleichungen des Systems (9) in die folgenden

(9*) $$b_{11}(\xi_1 - X_1) + ... + b_{1,n-l}\ (\xi_{n-l} - X_{n-l}) = 0$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$b_{n-l,n}(\xi_1 - X_1) + ... + b_{n-l,n-l}(\xi_{n-l} - X_{n-l}) = 0.$$

Diese bilden ein System von Gleichungen, bei denen die Determinante K nicht gleich Null ist, die sämmtlichen Ausdrücke rechts aber gleich Null sind. Ein solches System lässt nach dem vorigen § nur eine Auflösung, und zwar die Auflösung zu, bei der die sämmtlichen Unbekannten gleich Null sind; demnach gelten hier die Bestimmungen

(13) $$\xi_1 - X_1 = 0, \ \xi_2 - X_2 = 0, \ .. \ \xi_{n-l} - X_{n-l} = 0.$$

Es müssen daher, nachdem den Grössen $X_{n-l+1}, \ ... \ X_n$ *respective die Werthe der Grössen* $\xi_{n-l+1}, \ ... \ \xi_n$ *beigelegt sind, auch die Grössen* $\xi_1, \xi_2, ... \xi_{n-l}$ *respective den Grössen* $X_1, X_2, ... X_{n-l}$ *gleich werden. Also kann jede gegebene Auflösung des Systems* (6*) *in einer bestimmten Weise durch das vorgetragene Auflösungsverfahren erhalten werden.*

Bei der Wahl der Werthe, welche in dem System von n Gleichungen mit n Unbekannten für die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ verlangt werden können, zeichnet sich der Fall aus, in dem diese Werthe sämmtlich gleich Null werden. Wir haben dann statt des Systems (6*) das System von Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
(14) & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\
& b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0 \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n = 0.
\end{array}
$$

Wofern die Determinante R nicht gleich Null ist, so müssen, wie schon bei Gelegenheit des Systems (9*) bemerkt worden, *alle Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwinden. Sobald die Determinante R gleich Null ist, und alle partiellen Determinanten des $(n-1)$ten, $(n-l)$ten Grades, . . bis zum $(n-l+1)$ten Grade verschwinden, jedoch eine partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades nicht verschwindet, so sind die Bedingungen, welche sich aus* (5) *für die den Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ beizulegenden Werthe ergeben, durch die Werthe Null immer erfüllt, und daher ist stets eine Auflösung möglich. Man erhält ferner, sobald die mit K bezeichnete partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades nicht gleich Null ist, eine Auflösung, in welcher alle vorhandenen Auflösungen enthalten sind, dadurch, dass man die Grössen $x_{n-l+1}, x_{n-l+2}, \ldots x_n$ unbestimmt lässt und die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$ mit Hülfe von diesen ausdrückt.* Es sei x_α eine von den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n-l}$, welche durch das entwickelte Verfahren bestimmt werden soll, so sind die Gleichungen (2*), nachdem $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, . . $r_l = 0$ gesetzt worden ist, mit den angemessenen adjungirten Elementen des Schemas (1) zu multipliciren und hierauf zu addiren. Dabei erscheint auf der linken Seite als Factor von x_α die Determinante K des Schemas (1), und auf der rechten Seite treten als Factoren der Grössen $x_{n-l+1}, \ldots x_n$ bestimmte partielle Determinanten des $(n-l)$ten Grades auf, die wir der Kürze halber beziehungsweise mit $K^{(\alpha)}_{n-l+1}, \ldots K^{(\alpha)}_n$ bezeichnen. *Demnach wird die vollständige Auflösung des Systems* (14) *durch die Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
(15)\qquad Kx_1 &= K^{(1)}_{n-l+1}\, x_{n-l+1} + \dots + K^{(1)}_n\, x_n \\
Kx_2 &= K^{(2)}_{n-l+1}\, x_{n-l+1} + \dots + K^{(2)}_n\, x_n \\
&\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\
Kx_{n-l} &= K^{(n-l)}_{n-l+1}\, x_{n-l+1} + \dots + K^{(n-l)}_n\, x_n
\end{aligned}
$$

dargestellt.

Wenn sich bei verschwindendem R unter den partiellen Determinanten des $(n-l)$ten Grades wenigstens eine befindet, die nicht gleich Null ist, und wenn wieder die Determinante K des Schemas (1) nicht gleich Null ist, so ist jetzt die Zahl $l=1$, und die Determinante K wird zu dem adjungirten Elemente B_{nn}. Gleichzeitig gehen die rechten Seiten der Gleichungen (15) in die aus den Factoren $K^{(1)}_n, \dots K^{(n-1)}_n$ und der Grösse x_n gebildeten Producte über. Es bestimmen sich also in diesem Falle die Verhältnisse der $(n-1)$ Grössen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ zu der Grösse x_n. Ferner zeigt eine einfache Ueberlegung, dass die partiellen Determinanten des $(n-1)$ten Grades $K^{(1)}_n, \dots K^{(n-1)}_n$ respective mit den adjungirten Elementen $B_{n1}, B_{n2}, \dots B_{n,n-1}$ zusammenfallen. Demnach erhält man die Verhältnisse der Grössen $x_1\, x_2, \dots x_n$ durch die aus (15) entstehenden Gleichungen

$$(16)\qquad B_{nn}x_1 = B_{n1}x_n,\quad B_{nn}x_2 = B_{n2}x_n, \dots B_{nn}x_{n-1} = B_{n,n-1}x_n.$$

Das System von Gleichungen (14) wird offenbar erfüllt, indem man statt $x_1, x_2, \dots x_n$ respective die adjungirten Elemente irgend einer Horizontalreihe, jedes mit demselben unbestimmten Factor s multiplicirt, substituirt

$$(17)\qquad B_{\lambda 1}s,\ B_{\lambda 2}s, \dots B_{\lambda n}s.$$

Denn bei der Substitution wird die linke Seite der λten Gleichung (6) des § 74 gleich Rs, mithin gleich Null, weil $R=0$ ist, und die linken Seiten aller übrigen Gleichungen werden wegen der Gleichung (7) desselben § überhaupt gleich Null. Die Ausdrücke (17) bilden also eine Auflösung des Systems (14); da nun *jede Auflösung* in (16) enthalten sein muss, und da eine beliebig gegegebene Auflösung mit der aus den Gleichungen (16) hervor-

gehenden Auflösung zusammenfällt, sobald die respectiven Werthe von x_n zusammenfallen, so zieht die Gleichung $x_n = B_{\lambda n}\, s$ die Gleichungen

$$(18)\quad x_1 = \frac{B_{n1} x_n}{B_{nn}} = B_{\lambda 1}\, s,\; x_2 = \frac{B_{n2} x_n}{B_{nn}} = B_{\lambda 2}\, s, \ldots$$
$$x_{n-1} = \frac{B_{n,n-1} x_n}{B_{nn}} = B_{\lambda, n-1}\, s$$

nach sich. Die Verhältnisse der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ werden deshalb durch die Verhältnisse von den adjungirten Elementen $B_{\lambda 1}, B_{\lambda 2}, \ldots B_{\lambda n}$ der beliebig gewählten λten Horizontalreihe dargestellt, wofern diese adjungirten Elemente nicht sämmtlich gleich Null sind. Mithin stehen bei einer verschwindenden Determinante R die zu verschiedenen Horizontalreihen gehörenden adjungirten Elemente unter einander in denselben Verhältnissen.

§ 76. Transformation eines Systems von n Functionen des ersten Grades mit n Variabeln durch eine Substitution des ersten Grades. Multiplicationssatz der Determinanten.

Wir sind jetzt im Stande, die in § 70 aufgeworfene Frage vollständig zu beantworten, ob bei einem vorgelegten, dort mit (4) bezeichneten System von Gleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1 &= c_{11}\, x'_1 + c_{12}\, x'_2 + \ldots + c_{1n}\, x'_n \\ x_2 &= c_{21}\, x'_1 + c_{22}\, x'_2 + \ldots + c_{2n}\, x'_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= c_{n1}\, x'_1 + c_{n2}\, x'_2 + \ldots + c_{nn}\, x'_n, \end{aligned}$$

wenn für die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmte Werthe vorgeschrieben werden, solche Werthe $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ existiren, die dem System von Gleichungen genügen, und, falls es solche Werthe giebt, wie dieselben gefunden werden können. Es zeigt sich durch die in den letzten §§ geführte Untersuchung, dass es vor allen Dingen darauf ankommt, ob die Determinante des Systems von Coefficienten, welche mit S bezeichnet werden möge, einen von Null verschiedenen Werth oder den Werth Null hat. Wofern die Determinante S nicht verschwindet, so gehört zu jedem System von Werthen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein einziges System von Werthen $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$. Dasselbe wird nach der Vorschrift der

Gleichung (10) des § 74, indem $C_{\varrho\sigma}$ das mit dem Element $c_{\varrho\sigma}$ correspondirende adjungirte Element aus dem Schema der Coefficienten

$$(2) \qquad \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{matrix}$$

bedeutet, durch die Gleichung

$$(3) \qquad x'_\varrho = \frac{C_{1\varrho}x_1 + C_{2\varrho}x_2 + \ldots + C_{n\varrho}x_n}{S}$$

ausgedrückt, in welcher ϱ successive gleich den Zahlen 1, 2, 3, ..n zu setzen ist. Wenn dagegen die Determinante S gleich Null ist, so lehrt der vorhergehende §, dass die Werthe x_1, x_2,...x_n stets eine oder mehrere Bedingungen zu erfüllen haben, damit es überhaupt entsprechende Werthe x'_1, x'_2. . . . x'_n gebe, und dass, wenn diese Bedingungen befriedigt sind, in der Bestimmung der Werthe x'_1, x'_2 . . . x'_n, eine gewisse Willkür bleibt. *Soll also zu jedem System von Werthen x_1, x_2, . . . x_n ein und nur ein System von Werthen x'_1, x'_2, . . . x'_n gehören, so ist es nothwendig und hinreichend, dass die Determinante S nicht gleich Null sei und dann werden die Werthe x'_ϱ durch die Gleichung* (3) *ausgedrückt.*

An der erwähnten Stelle des § 70 ist bemerkt, dass die in Rede stehenden homogenen Ausdrücke der n Variabeln x_1, . . . x_n durch die n Variabeln x'_1, x'_2, . . x'_n als eine *Substitution* benutzt werden, vermittelst deren eine ganze homogene Function oder mehrere zusammengehörige ganze homogene Functionen der n Variabeln x_1, x_2, . . x_n in eine ganze homogene Function oder in entsprechende ganze homogene Functionen der n Variabeln x'_1, x'_2,.. x'_n, *transformirt* werden. Indem man hier verlangt, und zwar geschieht dies durchgehends, dass ebenso, wie zu jedem System von Werthen x'_1. . . x'_n ein vollkommen bestimmtes System von Werthen x_1, x_2, . . x_n gehört, auch umgekehrt zu jedem System von Werthen x_1, x_2, . . . x_n ein vollkommen bestimmtes System von Werthen x'_1, x'_2, . . x'_n gehöre, so folgt daraus mit Nothwendigkeit, dass die Determinante

S, welche alsdann die *Determinante der Substitution* genannt wird, nicht verschwinden darf.

Durch eine Substitution der bezeichneten Art kann auch *ein System von n ganzen homogenen Functionen* transformirt werden, *die sämmtlich selbst von dem ersten Grade sind.* Wir stellen ein System solcher Functionen in der seit dem § 73 gebrauchten Weise so dar

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad f_1 &= b_{11}\, x_1 + b_{12} x_2 + \ldots + b_{1n} x_n \\
f_2 &= b_{21}\, x_1 + b_{22} x_2 + \ldots + b_{2n} x_n \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
f_n &= b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \ldots + b_{nn} x_n,
\end{aligned}
$$

und wenden die Substitution (1) an.

Zufolge einer in § 70 gemachten allgemeinen Bemerkung bleibt der Grad der durch die Substitution (1) transformirten homogenen Functionen ungeändert; mithin geht gegenwärtig jede der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ wieder in eine ganze homogene Function des ersten Grades von den n Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ über. Um das Ergebniss der auszuführenden Substitutionen bequemer darzustellen, kann man sowohl die Gleichungen (4) wie auch die Gleichungen (1) durch Anwendung von Summenzeichen ausdrücken. In jeder der Gleichungen (4) durchläuft der zweite Zeiger der Coefficienten, mit den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ correspondirend, die Reihe der Zahlen 1, 3, 3, . . n, während der erste Zeiger der Coefficienten sich nach dem Zeiger der Function richtet. Wenn daher λ successive die natürlichen Zahlen von 1 bis n bedeutet, so ist f_1 gleich der Summe der n Glieder $b_{1\lambda} x_\lambda$, f_2 gleich der Summe der n Glieder $b_{2\lambda} x_\lambda$, u. s. f. Die vollständige Bezeichnung hiefür ist diese

$$
(5) \qquad f_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} b_{1\lambda} x_\lambda,\; f_2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} b_{2\lambda} x_\lambda, \;\ldots f_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} b_{n\lambda} x_\lambda\,;
$$

sobald indessen die Ausdehnung der Summation, das heisst, die Ausdehnung des Systems von Zahlen, welches der Buchstabe der Summation λ durchlaufen soll, sich immer gleich bleibt, werden häufig die Grenzen der Summation, die hier gleich 1 und n sind, fortgelassen, und man notirt nur den Buchstaben der Summation λ. Die n Gleichungen (5) lassen sich, indem man für den Zeiger der Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, der den ersten

Zeiger der Coefficienten von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmt, einen Buchstaben α einführt, durch die eine Gleichung repräsentiren

$$f_\alpha = \Sigma_\lambda b_{\alpha\lambda} x_\lambda. \tag{6}$$

In ganz derselben Weise werden die n Gleichungen (1), sobald wieder λ und μ beliebige Zeiger aus der Reihe der Zahlen von 1 bis n bedeuten, durch die folgende Gleichung vertreten, in welcher μ der Buchstabe der Summation ist

$$x_\lambda = \Sigma_\mu c_{\lambda\mu} x'_\mu. \tag{7}$$

Die Transformation der n Functionen f_α erfolgt dadurch, dass in (6) die Variabeln x_λ durch die aus (7) genommenen Ausdrücke ersetzt werden, und es entstehen die Ausdrücke

$$f_\alpha = \Sigma_\lambda b_{\alpha\lambda} \Sigma_\mu c_{\lambda\mu} x'_\mu. \tag{8}$$

Wenn die Coefficienten, mit welchen in der vorliegenden Darstellung der n Functionen f_α die Variabeln x'_μ behaftet sind, respective mit $e_{\alpha\mu}$ notirt werden, so dass

$$f_\alpha = \Sigma_\mu e_{\alpha\mu} x'_\mu \tag{9}$$

ist, so setzen sich diese n^2 Coefficienten $e_{\alpha\mu}$ aus den n^2 Elementen $b_{\alpha\lambda}$ und den n^2 Elementen $c_{\lambda\mu}$ folgendermassen zusammen

$$\begin{aligned} e_{\alpha\mu} &= \Sigma_\lambda b_{\alpha\lambda} c_{\lambda\mu} \\ &= b_{\alpha 1} c_{1\mu} + b_{\alpha 2} c_{2\mu} + \ldots + b_{\alpha n} c_{n\mu}. \end{aligned} \tag{10}$$

Eine Gegenüberstellung des Schemas der Elemente $b_{\alpha\beta}$, das in § 74 mit (1) bezeichnet ist, und des Schemas der Elemente $c_{\lambda\mu}$, das sich oben in (2) befindet,

$$\left|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{matrix}\right| \qquad \left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{matrix}\right| \tag{11}$$

lehrt, *dass das Element $e_{\alpha\mu}$ erhalten wird, indem man die αte Horizontalreihe des ersten mit der μten Vertikalreihe des zweiten verbindet, immer die zwei gleichstelligen Elemente multiplicirt und von den n Producten die Summe nimmt.*

Wir werden jetzt die Determinante E des Schemas der n^2 Elemente $e_{\alpha\mu}$ untersuchen

(12)
$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix}$$

und dadurch zu dem Beweise des Satzes gelangen, *dass die Determinante E gleich dem Product ist, das aus der Determinante R der n^2 Elemente $b_{\alpha\beta}$ und der Determinante S der n^2 Elemente $c_{\lambda\mu}$ erhalten wird.*

Vermöge der in § 74 gegebenen Regel ist die Determinante E gleich einer Summe von Gliedern

(13)
$$\Sigma_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n} \delta_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n} e_{1\mu_1} e_{2\mu_2} \dots e_{n\mu_n},$$

wo die Zeiger $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ nach einander alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots n$ durchlaufen, und wo das Zeichen $\delta_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n}$ gleich der positiven oder der negativen Einheit ist, je nachdem die betreffende Permutation zu der ersten oder der zweiten von den definirten beiden Classen gehört. Man hat jetzt jede der in einem bestimmten Product vorkommenden Grössen $e_{1\mu_1}, e_{2\mu_2}, \dots e_{n\mu_n}$ durch den von der Gleichung (10) herrührenden Ausdruck zu ersetzen. Da die einzelnen Ausdrücke mit einander zu multipliciren sind, so verlangt die Deutlichkeit, dass für die Summationsbuchstaben von einander verschiedene Zeichen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ genommen werden. Man bildet demnach die Gleichungen

(14)
$$\begin{aligned} e_{1\mu_1} &= \Sigma_{\lambda_1} b_{1\lambda_1} c_{\lambda_1\mu_1} \\ e_{2\mu_2} &= \Sigma_{\lambda_2} b_{2\lambda_2} c_{\lambda_2\mu_2} \\ &\vdots \\ e_{n\mu_n} &= \Sigma_{\lambda_n} b_{n\lambda_n} c_{\lambda_n\mu_n}, \end{aligned}$$

wo jeder der Zeiger $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ unabhängig von dem andern die ganze Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \dots n$ durchläuft. Bei der Ausführung des Products $e_{1\mu_1} e_{2\mu_2} \dots e_{n\mu_n}$ ist jeder Summand aus dem ersten Ausdrucke mit jedem Summanden aus dem zweiten, dritten, bis $n$ten Ausdrucke zu multipliciren, und von allen Einzelproducten die Summe zu nehmen. Diese Gesammtsumme, mit dem Factor $\delta_{\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n}$ multiplicirt, ist als

Ausdruck des Products $\delta_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n} e_{1\mu_1} \ldots e_{n\mu_n}$ in die Formel (13) einzusetzen. Statt dessen wählen wir ein bestimmtes λ_1, ein bestimmtes λ_2, u. s. f. bis λ_n, bilden das Einzelproduct

(15) $$b_{1\lambda_1}\ c_{\lambda_1\mu_1}\ b_{2\lambda_2}\ c_{\lambda_2\mu_2} \ldots b_{n\lambda_n}\ c_{\lambda_n\mu_n},$$

und substituiren nach einander alle vorhandenen Einzelproducte, mit dem Factor $\delta_{\mu_1\mu_2, \ldots \mu_n}$ multiplicirt, in die Formel (13).

Die Substitution des Einzelproducts (15), mit dem Factor $\delta_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}$ multiplicirt, in den Ausdruck (13) liefert die Summe

(16) $$\Sigma_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}\ \delta_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}\ b_{1\lambda_1}\ c_{\lambda_1\mu_1} \ldots b_{n\lambda_n}\ c_{\lambda_n\mu_n}.$$

Wenn wir jetzt den Werth dieser Summe, in welcher $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die ausgewählten bestimmten Werthe bedeuten, ermitteln, hierauf für die sämmtlichen Verbindungen von Werthen der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ dasselbe thun, und dann alle diese Summen addiren, so erhalten wir die gesuchte Determinante E.

Allein die Summe (16) ist gleich der, mit dem Producte $b_{1\lambda_1} \ldots b_{n\lambda_n}$ multiplicirten Summe

(17) $$\Sigma_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}\ \delta_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}\ c_{\lambda_1\mu_1}\ c_{\lambda_2\mu_2} \ldots c_{\lambda_n\mu_n}.$$

Die letztere geht aus der Summe

(18) $$\Sigma_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}\ \delta_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}\ c_{1\mu_1}\ c_{2\mu_2} \ldots c_{n\mu_n}$$

hervor, sobald statt der ersten Zeiger $1, 2, 3, \ldots n$ beziehungsweise die Zeiger $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gesetzt werden; sie fällt daher auf Grund der gegebenen Definition mit der Determinante eines Schemas zusammen, das aus dem obigen Schema (2) entsteht, indem die einzelnen Horizontalreihen statt der Zeiger $1, 2, 3, \ldots n$ respective die Zeiger $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ erhalten. Nach dem Satze (3) des § 74 verschwinden aber die Determinanten, bei deren Schema irgend zwei Horizontalreihen übereinstimmen; es *verschwinden* daher gegenwärtig *alle Determinanten*, bei denen unter den Zeigern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *irgend zwei einander gleich* sind. Folglich hat die Summe (17) nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn *die Zeiger* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *alle von einander verschieden* sind. Unter dieser Bedingung repräsentiren dieselben eine *Permutation* der Zeiger $1, 2, \ldots n$. Ferner sagt uns das Corollar des Satzes (2) in § 74, dass die Determinante eines Schemas, bei dem die Horizontalreihen eine bestimmte Permutation erfahren haben, gleich

der Determinante des ursprünglichen Schemas oder gleich dem entgegengesetzten Werthe ist, je nachdem die angewendete Permutation zu der ersten oder der zweiten Classe gehört. Die Summe (17) wird deshalb gleich der Determinante S oder gleich $-S$, je nachdem die Permutation $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ zu der ersten oder zweiten Classe gehört, und diese Bestimmung kann vermöge der für $\delta_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n}$ aufgestellten Definition durch das Zeichen

(19) $$\delta_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n} S$$

ausgedrückt werden.

Wir müssen jetzt die Werthe der Summe (16) addiren, die allen möglichen Verbindungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ entsprechen. Die Summe (16) ist das Product von $b_{1\lambda_1}\ b_{2\lambda_2} \ldots b_{n\lambda_n}$ in die Summe (17); von dieser sahen wir aber, dass sie, wenn die Zeiger $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ nicht sämmtlich von einander differiren, verschwindet, und, wenn die Zeiger $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ eine Permutation der Zeiger $1, 2, \ldots n$ darstellen, durch (19) ausgedrückt wird. Die zu bildende Determinante E ist daher gleich der über alle Permutationen der Zeiger $1, 2, \ldots n$ zu nehmenden Summe

(20) $$\Sigma_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n} \delta_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n} b_{1\lambda_1}\ b_{2\lambda_2} \ldots b_{n\lambda_n} S.$$

Hier haben wir das Product der Determinante S in eine Summe, welche nichts anderes ist als die Determinante R der n^2 Elemente $b_{\alpha\beta}$. Daher gilt die Gleichung

(21) $$E = R \,.\, S,$$

welche zu beweisen war.

Bei diesem Anlass kann erwähnt werden, dass die Determinante eines Schemas, bei dem die ersten und die zweiten Zeiger respective die durch α und β angedeuteten Reihen von Zahlen durchlaufen, nicht nur durch das in (3) des § 74 angegebene Zeichen sondern auch durch das zwischen zwei verticale Striche gestellte allgemeine Element ausgedrückt wird. Auf diese Weise hat man

(22) $$R = |\, b_{\alpha\beta} \,|, \quad S = |\, c_{\lambda\mu}$$

und der so eben bewiesene *Multiplicationssatz der Determinanten* nimmt die Gestalt an

(23) $$|\, e_{\alpha\mu} \,| = |\, b_{\alpha\beta} \,| \cdot |\, c_{\lambda\mu} \,| .$$

Für die Benutzung desselben ist es wesentlich zu bemerken,

dass, wenn man in dem Schema der $b_{\alpha\beta}$ die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen vertauscht, ferner, wenn man in dem Schema der $c_{\lambda\mu}$ die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen vertauscht, zwar die Grössen $e_{\alpha\mu}$ eine andere Bedeutung annehmen, indessen die Determinanten der betreffenden vier Schemata der $e_{\alpha\mu}$ einen und denselben Werth haben.

Die Determinante E gehört in sofern zu den Functionen f_α, als diese durch die in (9) enthaltenen Gleichungen als Functionen der Variabeln x'_μ dargestellt werden. Nach dem früher bewiesenen und mehrfach erwähnten Satze sind die f_α unabhängige Functionen der x'_μ, je nachdem E von Null verschieden oder gleich Null ist; ebenso sind die f_α unabhängige Functionen der x_β, je nachdem die Determinante R der $b_{\alpha\beta}$ von Null verschieden oder gleich Null ist, und die x_λ unabhängige Functionen der x'_μ, je nachdem die Determinante S des $c_{\lambda\mu}$ von Null verschieden oder gleich Null ist. Nun verschwindet das Product $E = R.S$ niemals, ausser wenn einer seiner beiden Factoren R oder S gleich Null ist. Daher besteht der Satz:

Die Functionen f_α sind dann und nur dann unabhängige Functionen der Variabeln x'_μ, wenn sowohl die f_α unabhängige Functionen der Variabeln x_β wie auch die x_λ unabhängige Functionen der Variabeln x'_μ sind.

§ 77. Eigenschaften der adjungirten Elemente eines gegebenen Systems von Elementen.

Eine merkwürdige Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten ergiebt sich, wenn man das erste der zu combinirenden Schemata unbeschränkt lässt, das zweite Schema dagegen aus den adjungirten Elementen des ersten Schemas bildet. Statt der beiden in (11) des vorigen § angeführten Schemata nehme man also die Schemata

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot\cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdot\cdot & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdot\cdot & B_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdot\cdot & B_{nn} \end{vmatrix}$$

und bilde vermöge der dortigen Gleichung (10) die zugehörigen Elemente $e_{\alpha\mu}$. Alsdann kommt

(2) $$e_{\alpha\mu} = b_{\alpha 1} B_{\mu 1} + b_{\alpha 2} B_{\mu 2} + \ldots + b_{\alpha n} B_{\mu n},$$

und die Grundeigenschaften der adjungirten Elemente greifen ein. Die rechte Seite wird zufolge der Gleichung (6) des § 74 gleich der Determinante R, sobald der Zeiger α und der Zeiger μ einander gleich sind, dagegen wegen der dortigen Gleichung (7) gleich *Null*, sobald die Zeiger α und μ von einander differiren. Das Schema der $e_{\alpha\mu}$ verwandelt sich deshalb in das folgende

(3) $$\begin{vmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{vmatrix}$$

und die Determinante der $e_{\alpha\mu}$ geht in das einzige Glied über, welches nicht den Werth Null hat und durch die Multiplication der Glieder aus der absteigend von links nach rechts gehenden Diagonale erhalten wird. Die Determinante E wird also gleich der $n$ten Potenz der Determinante R, mithin erzeugt der Multiplicationssatz $E = R.S$ die Gleichung $R^n = R.S$. Die Determinante S des Systems der adjungirten Elemente ist deshalb, wenn R von Null verschieden ist, gleich der $(n-1)$ten Potenz der Determinante R. Da die Gleichung $S = R^{n-1}$ für *alle beliebigen Schemata gilt, bei denen die Determinante R nicht gleich Null ist*, so gilt sie vermöge des Satzes, welcher in § 58 bewiesen und in § 70 aufs neue hervorgehoben ist, in der Weise, dass, wenn die linke und die rechte Seite nach den Potenzen und den Producten der Potenzen der Elemente $b_{\alpha\beta}$ entwickelt werden, die zugeordneten Coefficienten einander gleich sein müssen, sie besteht also *in voller Allgemeinheit*, und wir dürfen das Resultat aussprechen:

Die aus den adjungirten Elementen eines gegebenen Schemas von n^2 Elementen gebildete Determinante ist gleich der $(n-1)$ten Potenz der Determinante des gegebenen Schemas.

Es kann jetzt leicht erkannt werden, welche Verbindungen der Elemente eines gegebenen Schemas entstehen, wenn von den adjungirten Elementen desselben abermals die adjungirten

Elemente gebildet werden. Die adjungirten Elemente des Schemas

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

mögen $\mathfrak{B}_{\alpha\gamma}$ genannt werden, so dass das neue adjungirte Element $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ mit dem Element $B_{\alpha\beta}$ und dieses mit dem Element $b_{\alpha\beta}$ des ursprünglichen Schemas correspondirt. Wofern nun die Determinante R nicht gleich Null ist, so stellt die Gleichung (9) des § 74

(4) $$R\,x_\nu = B_{1\nu}\,r_1 + B_{2\nu}\,r_2 + \dots + B_{n\nu}\,r_n$$

die vollständig bestimmten Werthe $x_1, x_2, \dots x_n$ dar, welche für beliebig gewählte Werthe $r_1, r_2, \dots r_n$ das System von Gleichungen (2) in § 73 befriedigen, das durch die Gleichung

(5) $$b_{\alpha 1}\,x_1 + b_{\alpha 2}\,x_2 + \dots + b_{\alpha n}\,x_n = r_\alpha$$

repräsentirt wird. Man kann jetzt die in (4) enthaltenen n Gleichungen nach den n Grössen $r_1, r_2, \dots r_n$ auflösen, da die Determinante der Coefficienten $B_{\alpha\gamma}$ gleich R^{n-1} ist und, weil R von Null verschieden sein soll, nicht verschwindet. Durch Multiplication der Gleichung (4) mit dem neuen adjungirten Element $\mathfrak{B}_{\alpha\nu}$ und eine auf den Buchstaben ν bezügliche Summation entsteht für die Grösse r_α die unzweifelhafte Bestimmung

(6) $$R^{n-1}\,r_\alpha = R\,(\mathfrak{B}_{\alpha 1}\,x_1 + \mathfrak{B}_{\alpha 2}\,x_2 + \dots + \mathfrak{B}_{\alpha n}\,x_n).$$

Man darf sich vorstellen, dass die n Werthe $r_1, r_2, \dots r_n$ hervorgebracht sind, indem den n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ beliebige Werthe beigelegt wurden. Dann muss für alle n Werthe des Zeigers α der Ausdruck von r_α aus (5) mit dem Ausdruck von r_α aus (6) zusammenfallen, und zwar müssen nach dem vorhin benutzten Satze die Coefficienten der einzelnen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ in den betreffenden Darstellungen beziehungsweise einander gleich sein. So ergiebt sich für jedes Paar von Zeigern α und β die Gleichung

(7) $$\mathfrak{B}_{\alpha\beta} = R^{n-2}\,b_{\alpha\beta}.$$

Auch diese Gleichung ist, wie vorhin die Bestimmung der Determinante der $B_{\alpha\beta}$, unter der Voraussetzung abgeleitet, dass

die Determinante R nicht gleich Null sei; da die Gleichung aber für *alle möglichen* Systeme $b_{\alpha\beta}$ gelten muss, *deren Determinante nicht verschwindet*, so ist es nach dem so eben angewendeten Satze nothwendig, dass bei einer Entwickelung der beiden Seiten nach den Potenzen und Producten der Potenzen der Elemente $b_{\alpha\beta}$ die entsprechenden Coefficienten einander gleich sind, und deshalb hat die Gleichung (7) ebenfalls eine unbeschränkte Gültigkeit. Sie lautet in Worten so:

Wenn man zu den adjungirten Elementen eines gegebenen Schemas von n^2 Elementen abermals die adjungirten Elemente bildet, so ist jedes der neuen adjungirten Elemente gleich dem Product aus dem correspondirenden Element des ursprünglichen Schemas und aus der $(n-2)$ten Potenz der Determinante des ursprünglichen Schemas.

Mit den gegenwärtigen Hülfsmitteln kann eine allgemeine Frage beantwortet werden, welche sich auf ein *System von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten bezieht, bei dem die gegebenen Coefficienten ganze Zahlen sind.* In dem System (1) des § 76 seien die Coefficienten $c_{11}, \ldots c_{nn}$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen, die aus denselben gebildete Determinante S, welche dann ebenfalls eine ganze Zahl sein muss, von Null verschieden. Dann folgt aus den in Rede stehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}\ x'_1 + c_{12}\ x'_2 + \ldots + c_{1n}\ x'_n \\ x_2 &= c_{21}\ x'_1 + c_{22}\ x'_2 + \ldots + c_{2n}\ x'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}\ x'_1 + c_{n2}\ x'_2 + \ldots + c_{nn}\ x'_n \end{aligned}$$

die dort mit (3) bezeichnete Auflösung

$$x'_\varrho = \frac{C_{1\varrho}\ x_1 + C_{2\varrho}\ x_2 + \ldots + C_{n\varrho}\ x_n}{S},$$

wo ϱ nach einander gleich den Zeigern $1, 2, 3, \ldots n$ zu setzen ist. Die adjungirten Elemente $C_{11}, \ldots C_{nn}$ werden aus den Elementen des gegebenen Systems von Coefficienten nur durch die Operationen des Addirens, Subtrahirens und Multiplicirens abgeleitet, und sind deshalb, da die letztern gegenwärtig ganze Zahlen sein sollen, ebenfalls ganze Zahlen. Die Coefficienten der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ in den für $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ gefundenen

Ausdrücken entstehen aus den betreffenden adjungirten Elementen durch Division mit der ganzen Zahl S. Hieran knüpft sich *die Frage nach den Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit diese sämmtlichen Coefficienten ebenfalls ganze Zahlen werden.* Ihre jetzt abzuleitende Lösung wird später benutzt werden.

Wir nehmen an, dass die sämmtlichen Brüche

$$\frac{C_{11}}{S}, \quad \frac{C_{12}}{S}, \ldots \frac{C_{nn}}{S}$$

gleich ganzen Zahlen sind; werden dann die zu dem Schema derselben adjungirten Elemente gebildet, so müssen diese aus dem so eben erwähnten Grunde ebenfalls lauter ganze Zahlen sein. Die in Rede stehenden Brüche haben den übereinstimmenden Nenner S. Weil nun jedes zu bildende adjungirte Element ein ganzer homogener Ausdruck des $(n-1)$ten Grades in Bezug auf die Elemente ist, aus denen es zusammengesetzt wird, so wird jedes aus den erwähnten Brüchen zu bildende adjungirte Element gleich einem Bruche, dessen Zähler das aus den Grössen $C_{11}, C_{12}, \ldots C_{nn}$ zu bildende correspondirende adjungirte Element, und dessen Nenner die Potenz S^{n-1} ist. Das adjungirte Element, das im Zähler auftritt, wird aber vermöge des zuletzt bewiesenen Satzes gleich dem Product eines Elements $c_{\lambda\mu}$ und der $(n-2)$ten Potenz der Determinante S. Folglich werden die zu den Grössen $\frac{C_{11}}{S}, \ldots \frac{C_{nn}}{S}$ gehörigen adjungirten Elemente respective gleich den n^2 Ausdrücken $\frac{c_{11}}{S}, \frac{c_{12}}{S}, \ldots \frac{c_{nn}}{S}$. Unter der geltenden Voraussetzung müssen daher diese Quotienten sämmtlich gleich ganzen Zahlen sein.

Aus diesem Umstande kann der Schluss gezogen werden, dass für die n^2 Zahlen $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$ keine von der Einheit verschiedene Zahl existirt, welche in jede derselben aufgeht und dass die Determinante S derselben gleich der positiven oder der negativen Einheit sein muss. Man suche die grösseste Zahl auf, welche in jede der Zahlen $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$ aufgeht, dieselbe heisse f, und es sei

(8) $$c_{11} = c'_{11} f, \quad c_{12} = c'_{12} f, \ldots c_{nn} = c'_{nn} f.$$

Ferner werde die aus den ganzen Zahlen $c'_{11}, \ldots c'_{nn}$ gebildete Determinante mit S' bezeichnet, dann ist die Determinante S gleich dem Product der ganzen Zahl S' und der $n$ten Potenz der Zahl f,

(9) $$S = S' f^n,$$

und es bestehen die Gleichungen

(10) $$\frac{c_{11}}{S} = \frac{c'_{11}}{S' f^{n-1}}, \quad \frac{c_{12}}{S} = \frac{c'_{12}}{S' f^{n-1}}, \ldots \frac{c_{nn}}{S} = \frac{c'_{nn}}{S' f^{n-1}}.$$

Die Zahlen $c'_{11}, c'_{12}, \ldots c'_{nn}$ haben jetzt keinen Theiler, der ihnen allen gemeinsam ist. Nun ist in § 37 bewiesen, dass, wenn zwei ganze Zahlen n_1 und n_2 keinen gemeinsamen Theiler haben, sich immer zwei ganze Zahlen p_1 und p_2 so bestimmen lassen, dass die Gleichung

$$p_1 n_1 + p_2 n_2 = 1$$

erfüllt wird. Hievon ausgehend kann gezeigt werden, dass, wenn eine beliebige Anzahl von ganzen Zahlen gegeben ist, $n_1, n_2, \ldots n_\omega$, für die kein allen gemeinsamer Theiler existirt, ω ganze Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_\omega$ sich so bestimmen lassen, dass sie der Gleichung

(11) $$p_1 n_1 + p_2 n_2 + \ldots + p_\omega n_\omega = 1$$

genügen. Es sei $\omega = 3$, dann muss der grösseste gemeinsame Theiler ν von den zwei Zahlen n_2 und n_3 relative Primzahl zu der Zahl n_1 sein. Man kann deshalb zuerst zwei ganze Zahlen p_1 und q so bestimmen, dass

$$p_1 n_1 + q\nu = 1$$

wird. Da ferner $\frac{n_2}{\nu}$ und $\frac{n_3}{\nu}$ relative Primzahlen sind, so kann man zwei ganze Zahlen s_2 und s_3 bestimmen, welche die Gleichung

$$\frac{s_2 n_2}{\nu} + \frac{s_3 n_3}{\nu} = 1$$

befriedigen. Die Substitution in die vorige Gleichung liefert das Resultat

$$p_1 n_1 + q s_2 n_2 + q s_3 n_3 = 1,$$

so dass $p_1 = p_1$, $p_2 = q s_2$, $p_3 = q s_3$ zu nehmen ist, um das gesteckte Ziel zu erreichen. Es leuchtet ein, dass die Gleichung (11),

deren Auflösbarkeit für $\omega = 3$ begründet ist, auch für den nächst grösseren Werth von ω auflösbar sein muss, und dass durch die Wiederholung derselben Schlussweise sich ihre allgemeine Auflösbarkeit ergiebt.

Unter der geltenden Voraussetzung mussten die Brüche (10) sämmtlich gleich ganzen Zahlen sein. Wenn man jetzt für die in den Zählern auftretenden Zahlen $c'_{11}, c'_{12}, \ldots c'_{nn}$, für die kein allen gemeinsamer Theiler existirt, sich die Gleichung aufgelöst denkt, welche der obigen Gleichung (11) entspricht, und die so bezeichnet sein möge

(12) $$p_{11}\, c'_{11} + p_{12}\, c'_{12} + \ldots + p_{nn}\, c'_{nn} = 1,$$

dann muss das Aggregat, welches entsteht, indem die ganzen Zahlen (10) respective mit den ganzen Zahlen $p_{11}, p_{12}, \ldots p_{nn}$ multiplicirt werden, selbst gleich einer ganzen Zahl sein. Das heisst, der Bruch $\frac{1}{S' f^{n-1}}$ muss gleich einer ganzen Zahl sein. Dies ist aber nicht anders möglich, als indem sowohl die Zahl f gleich der Einheit, wie auch die Zahl S' gleich der positiven oder negativen Einheit ist. *Aus der Voraussetzung, dass die sämmtlichen Brüche* $\frac{c_{11}}{S}, \frac{c_{12}}{S}, \ldots \frac{c_{nn}}{S}$ *ganze Zahlen, folgt daher mit Nothwendigkeit, dass die grösseste ganze Zahl f, die in die sämmtlichen Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$ aufgeht, gleich der Einheit sein muss, und es folgt weiter, da alsdann $S' = S$ wird, dass die aus den Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$ zu bildende Determinante S gleich der positiven oder der negativen Einheit sein muss. Diese Bedingungen sind nothwendig, damit die sämmtlichen Coefficienten* $\frac{C_{11}}{S}, \frac{C_{12}}{S}, \ldots \frac{C_{nn}}{S}$ *gleich ganzen Zahlen werden, und sie sind zu gleicher Zeit auch hinreichend, weil die Brüche* $\frac{C_{11}}{S}, \frac{C_{12}}{S}, \ldots \frac{C_{nn}}{S}$ *dann keinen anderen Nenner haben als die positive oder negative Einheit und deshalb gleich ganzen Zahlen sind.* Hiemit ist die aufgeworfene Frage vollständig erledigt.

Capitel V.

Ganze homogene Functionen eines beliebig hohen Grades mit zwei Variabeln.

§ 78. Zerlegung der ganzen homogenen Functionen mit zwei Variabeln in homogene Factoren des ersten Grades.

Nach einer in § 70 gemachten Bemerkung lässt sich *jede ganze Function eines beliebigen Grades von Einer Veränderlichen als homogene Function desselben Grades von zwei Veränderlichen* auffassen, in der die hinzugefügte Variable gleich der Einheit gesetzt ist, und jede gegebene ganze homogene Function von zwei Variabeln verwandelt sich, indem die eine Variable gleich der Einheit gesetzt wird, in eine bestimmte Function desselben Grades von der nicht determinirten andern Variable. Aus diesem Grunde können gewisse Eigenschaften der ganzen homogenen Functionen von zwei Variabeln aus den entsprechenden Eigenschaften der ganzen Functionen von Einer Variable abgeleitet werden. Eine homogene ganze Function des $n$ten Grades von den zwei Variabeln x und y hat die allgemeine Gestalt

$$(1)\; f(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

wo $a_0, a_1, \ldots a_n$ von den Variabeln x, y unabhängige Coefficienten sind. Legt man der Variable y einen von Null verschiedenen Werth bei, so kann die rechte Seite durch y^n dividirt und mit dieser Grösse multiplicirt werden, wodurch der Ausdruck entsteht

$$(2) \qquad f(x,y) = y^n \left(a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_n \right).$$

In der Klammer befindet sich hier eine allgemeine ganze Function der Grösse $\frac{x}{y}$, und zwar vom $n$ten Grade, wofern der Coefficient a_0 nicht gleich Null ist, sonst aber von einem leicht zu bestimmenden niedrigern Grade; wenn nämlich $a_0 = 0$ ist, so sind die folgenden Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ zu untersuchen, ob sie etwa auch verschwinden, und wenn $a_{n-\lambda}$ der erste von

Null verschiedene Coefficient ist, so reducirt sich die Klammer auf die Function des λten Grades von der Grösse $\frac{x}{y}$.

$$(3)\qquad a_{n-\lambda}\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}+a_{n-\lambda+1}\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda-1}+\ldots+a_{n}.$$

Weil nun nach dem in § 67 ausgesprochenen Fundamentaltheorem die vorliegende Function des λten Grades stets und nur auf eine Weise in λ Factoren des ersten Grades in Bezug auf die Grösse $\frac{x}{y}$ zerlegt werden kann, so existirt die mit bestimmten Werthen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ gebildete Darstellung

$$(4)\qquad a_{n-\lambda}\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}+a_{n-\lambda+1}\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda-1}+\ldots+a_{n}$$
$$=a_{n-\lambda}\left(\frac{x}{y}-\xi_1\right)\left(\frac{x}{y}-\xi_2\right)\ldots\left(\frac{x}{y}-\xi_\lambda\right).$$

Wenn dieselbe in die rechte Seite von (2) substituirt wird, so lässt sich die Potenz y^n in das Product $y^{n-\lambda}\ y^{\lambda}$ auflösen, und jeder der λ Factoren y von y^{λ} mit jedem der Factoren $\frac{x}{y}-\xi_1, \ldots \frac{x}{y}-\xi_\lambda$ multipliciren. Die Factoren $x-\xi_1 y, \ldots x-\xi_\lambda y$ werden nach x und y homogen und vom ersten Grade, und die Potenz $y^{n-\lambda}$ vertritt $n-\lambda$ Factoren, die gleich y, also von derselben Art sind. Auf diese Weise entsteht die für jede ganze homogene Function $f(x,y)$ gültige Umformung

$$(5)\qquad f(x,y)=a_{n-\lambda}(x-\xi_1 y)(x-\xi_2 y)\ldots(x-\xi_\lambda y)\,y^{n-\lambda}.$$

Vermöge derselben *ist jede ganze homogene Function des nten Grades von zwei Variabeln gleich einem Product von n Factoren, die in Bezug auf die beiden Variabeln ganz, homogen und vom ersten Grade sind.* Wenn umgekehrt eine Zerlegung der Function $f(x,y)$ in ganze homogene Factoren des ersten Grades nach x und y gegeben ist, so liefert die Function $f(x,y)$, für einen von Null verschiedenen Werth von y durch die Potenz y^n dividirt, eine Zerlegung der ganzen Function $a_0\left(\frac{x}{y}\right)^{n}+a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}+\ldots+a_n$ in Factoren des ersten Grades nach $\frac{x}{y}$. Da die Zerlegung der letztern aber nur auf *eine Weise*

ausgeführt werden kann, so ist es nothwendig, dass die gegebene Zerlegung der Function $f(x,y)$ mit der in (5) ausgeführten Zerlegung übereinstimme und die in den beiden Zerlegungen correspondirenden einzelnen Factoren durch Multiplication mit Constanten in einander übergehen.

Wenn man die homogene Function $f(x,y)$ durch Anwendung einer Substitution transformirt, bei der x und y wie in (4) des § 70 ganze homogene Functionen des ersten Grades der neuen Variabeln x' und y' werden

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad (6)$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

und wo die *Determinante der Substitution*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varkappa \qquad (7)$$

einen von Null verschiedenen Werth haben soll, so geht jeder Factor des ersten Grades in Bezug auf x und y in einen Factor des ersten Grades in Bezug auf x' und y' über, und es wird, indem man die hervorgehende Function $g(x',y')$ nennt,

$$f(x,y) = g(x',y'), \qquad (8)$$

$$g(x',y') = a_{n-\lambda}((\alpha - \xi_1\gamma)x' + (\beta - \xi_1\delta)y')\ldots \qquad (9)$$
$$((\alpha - \xi_\lambda\gamma)x' + (\beta - \xi_\lambda\delta)y')(\gamma x' + \delta y')^{n-\lambda}.$$

Wir beschränken jetzt die Betrachtung auf *die ganze homogene Function des zweiten Grades von zwei Variabeln.* In dem Ausdruck (1) ist dann n gleich *zwei* zu nehmen, und ausserdem ersetzen wir a_0 durch a, a_1 durch $2b$, a_2 durch c, so dass der Ausdruck

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad (10)$$

entsteht. Die in (5) enthaltene Zerlegung der in Rede stehenden Function $f(x,y)$ in Factoren des ersten Grades wird, wenn der Coefficient a nicht gleich Null ist, die folgende

$$f(x,y) = a(x - \xi_1 y)(x - \xi_2 y); \qquad (11)$$

wenn dagegen $a = 0$ und b nicht gleich Null ist, so hat man

$$f(x,y) = 2b\left(x + \frac{c}{2b}y\right)y; \qquad (11^*)$$

wofern aber $a = 0$ und $b = 0$ ist, kommt

$$f(x,y) = cyy. \qquad (11^{**})$$

Die in (11) auftretenden Grössen ξ_1 und ξ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(12) $$a\xi^2 + 2b\,\xi + c = 0,$$

und haben daher nach § 28 die Ausdrücke

(13) $$\begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{b}{a} + \omega,\ \xi_2 = -\dfrac{b}{a} - \omega, \\ \omega^2 = \dfrac{-ac + b^2}{a^2}. \end{cases}$$

Es lässt sich jetzt leicht entscheiden, unter welcher Bedingung die beiden Factoren des ersten Grades, in welche die Function $f(x, y)$ zerfällt, wesentlich von einander verschieden sind, das heisst, sich durch Multiplication mit einer Constante nicht auf einander zurückführen lassen, und unter welcher Bedingung dies der Fall ist. In der Darstellung (11), welche sich auf die Voraussetzung bezieht, dass a nicht gleich Null sei, ist der Factor $x - \xi_1 y$ wesentlich von dem Factor $x - \xi_2 y$ verschieden, sobald ξ_1 und ξ_2 verschieden sind, und die Factoren fallen zusammen, sobald $\xi_1 = \xi_2$ ist; in der Darstellung (11*), welche für $a = 0$, $b \gtrless 0$ gilt, kann der Factor $x + \dfrac{c}{2b}\,y$ niemals durch Multiplication mit einer Constante gleich dem Factor y werden; in der Darstellung (11**), die zu der Voraussetzung $a = 0$, $b = 0$ gehört, ist y^2 das Product der beiden Factoren y. Die Grössen ξ_1 und ξ_2 differiren dann und nur dann von einander, wenn die Grösse ω nicht gleich Null ist, und diese verschwindet dann nicht und nur dann nicht, wenn die Verbindung

(14) $$D = ac - b^2$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Sobald $a = 0$, aber b nicht gleich Null ist, kann D nicht gleich Null sein; sobald $a = 0$ und $b = 0$ ist, muss D verschwinden. Hieraus folgt der Satz, *dass die beiden Factoren des ersten Grades, in welche die Function des zweiten Grades $f(x, y)$ zerfällt, wesentlich von einander verschieden sind, oder nicht, je nachdem die Verbindung D einen von Null verschiedenen Werth, oder den Werth Null hat.*

Die Transformation einer Function des zweiten Grades vermöge der Substitution (6) giebt unter der Annahme, dass der Coefficient a nicht gleich Null sei, nach (8) und (9) das Resultat

(15) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

(16) $a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2 =$

$$a((\alpha - \xi_1 \gamma) x' + (\beta - \xi_1 \delta) y')((\alpha - \xi_2 \gamma) x' + (\beta - \xi_2 \delta) y');$$

die Coefficienten der Function $g(x', y')$ sind hier den Coefficienten der Function $f(x, y)$ entsprechend mit $a', 2b', c'$ bezeichnet. Setzt man die Coefficienten von $x'^2, x' y', y'^2$ auf beiden Seiten der Gleichung (16) einander gleich, dann entstehen für $a', 2b', c'$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} (17) \qquad a' &= a(\alpha - \xi_1 \gamma)(\alpha - \xi_2 \gamma) \\ 2b' &= a(\alpha - \xi_1 \gamma)(\beta - \xi_2 \delta) + a(\beta - \xi_1 \delta)(\alpha - \xi_2 \gamma) \\ c' &= a(\beta - \xi_1 \delta)(\beta - \xi_2 \delta). \end{aligned}$$

Es mögen nun die Grössen α und γ so gewählt sein, dass weder $\alpha - \xi_1 \gamma$ noch $\alpha - \xi_2 \gamma$ gleich Null, mithin auch a' nicht gleich Null ist, so kann auf der rechten Seite von (16) die erste Klammer durch $\alpha - \xi_1 \gamma$, die zweite Klammer durch $\alpha - \xi_2 \gamma$ dividirt und das Product dieser beiden Ausdrücke mit a nach (17) zu der Grösse a' vereinigt werden. Dann kommt

$$(18) \qquad a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2$$
$$= a'\left(x' + \frac{\beta - \xi_1 \delta}{\alpha - \xi_1 \gamma} y'\right)\left(x' + \frac{\beta - \xi_2 \delta}{\alpha - \xi_2 \gamma} y'\right).$$

Legt man hier der Variable y' einen beliebigen von Null verschiedenen Werth bei, und dividirt beide Seiten der Gleichung durch y'^2, so hat man eine Zerlegung des Ausdruckes $a'\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + 2b'\left(\frac{x'}{y'}\right) + c'$ in zwei Factoren des ersten Grades in Bezug auf die Grösse $\frac{x'}{y'}$; eine solche Zerlegung kann nur auf eine einzige Weise und zwar durch die Wurzeln ξ'_1 und ξ'_2 der Gleichung

$$(19) \qquad a' \xi'^2 + 2b' \xi' + c' = 0$$

bewerkstelligt werden, so dass

$$(20) \qquad \frac{a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2}{y'^2} = a'\left(\frac{x'}{y'} - \xi'_1\right)\left(\frac{x'}{y'} - \xi'_2\right)$$

ist. *Die Wurzeln* ξ'_1 *und* ξ'_2 *der Gleichung* (19) *hängen deshalb mit den Wurzeln* ξ_1 *und* ξ_2 *der Gleichung* (12) *durch die Gleichungen*

$$(21) \qquad \xi'_1 = \frac{-\beta + \xi_1 \delta}{\alpha - \xi_1 \gamma}, \quad \xi'_2 = \frac{-\beta + \xi_2 \delta}{\alpha - \xi_2 \gamma},$$

oder, wie leicht zu folgern ist, durch die Gleichungen

(21*) $$\xi_1 = \frac{\alpha \xi'_1 + \beta}{\gamma \xi'_1 + \delta}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha \xi'_2 + \beta}{\gamma \xi'_2 + \delta}$$

zusammen.

Die Wurzeln ξ'_1 und ξ'_2 werden aus den Coefficienten der Gleichung (19) genau ebenso abgeleitet, wie die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 aus den Coefficienten der Gleichung (12), und ihre Werthe gehen deshalb aus (13) durch Substitution der entsprechenden Bestandtheile hervor,

(22) $$\begin{cases} \xi'_1 = -\dfrac{b'}{a'} + \omega', \quad \xi'_2 = -\dfrac{b'}{a'} - \omega', \\ \omega'^2 = \dfrac{-a'c' + b'^2}{a'^2}. \end{cases}$$

Die Darstellung von ξ'_1 und ξ'_2 in (21) gestattet eine Beziehung zwischen den beiden Grössen ω und ω' aufzusuchen, deren jede von der Auflösung einer reinen quadratischen Gleichung abhängt. In Folge von (13) und von (22) ist respective

(23) $$\xi_1 - \xi_2 = 2\omega, \quad \xi'_1 - \xi'_2 = 2\omega'.$$

Aus (21) ergiebt sich aber für $\xi'_1 - \xi'_2$ der Ausdruck

(24) $$\xi'_1 - \xi'_2 = \frac{-\beta + \xi_1 \delta}{\alpha - \xi_1 \gamma} - \frac{-\beta + \xi_2 \delta}{\alpha - \xi_2 \gamma} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\xi_1 - \xi_2)}{(\alpha - \xi_1 \gamma)(\alpha - \xi_2 \gamma)}.$$

Nun ist $\alpha\delta - \beta\gamma$ die in (7) mit $\varkappa$ bezeichnete, von Null verschiedene *Determinante der Substitution* (6), ferner nach (17) das Product $a(\alpha - \xi_1 \gamma)(\alpha - \xi_2 \gamma)$ gleich dem Coefficienten a'. Daher folgt aus (24) durch Multiplication mit a' die Gleichung

(25) $$a'(\xi'_1 - \xi'_2) = \varkappa a (\xi_1 - \xi_2),$$

und durch Anwendung von (23) die Gleichung zwischen ω und ω'

(26) $$a'\omega' = \varkappa a \omega.$$

Die Grösse $a'\omega'$ wird also aus der Grösse $a\omega$ durch Multiplication mit der Substitutionsdeterminante $\varkappa$ gebildet.

Nach (22) ist $a'^2 \omega'^2 = -a'c' + b'^2$, nach (13) $a^2\omega^2 = -ac + b^2$. Wenn daher die zu der Function $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ gehörende Verbindung

(27) $$D' = a'c' - b'^2$$

eingeführt wird, so liefert die Quadrirung von den beiden Seiten der Gleichung (26) die Gleichung

(28) $$D' = \varkappa^2 D.$$

Wir haben diese Gleichung unter der Voraussetzung de-

ducirt, dass sowohl der Coefficient a in $f(x, y)$ wie auch der Coefficient a' in $g(x', y')$ nicht verschwinde. Die Gleichung (28) gilt jedoch unbeschränkt. Führt man die Substitution (6) unmittelbar in die Function $a x^2 + 2bxy + cy^2$ ein, so erhalten a', b', c' die Ausdrücke

$$(29)\qquad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{cases}$$

Dieselben können die Gestalt annehmen

$$(30)\qquad \begin{aligned} a' &= (a\alpha + b\gamma)\alpha + (b\alpha + c\gamma)\gamma \\ b' &= (a\alpha + b\gamma)\beta + (b\alpha + c\gamma)\delta \\ b' &= (a\beta + b\delta)\alpha + (b\beta + c\delta)\gamma \\ c' &= (a\beta + b\delta)\beta + (b\beta + c\delta)\delta. \end{aligned}$$

Es sei nun für den Augenblick

$$(31)\qquad \begin{aligned} a\alpha + b\gamma &= p \quad & b\alpha + c\gamma &= q \\ a\beta + b\delta &= r \quad & b\beta + c\delta &= s, \end{aligned}$$

so kommt

$$(32)\qquad \begin{aligned} a' &= p\alpha + q\gamma \quad & b' &= p\beta + q\delta \\ b' &= r\alpha + s\gamma \quad & c' &= r\beta + s\delta. \end{aligned}$$

Die vier auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke werden erzeugt, indem man die Horizontalreihen und Vertikalreihen der beiden Schemata von 4 Elementen

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

so combinirt, wie in § 76 die beiden mit (11) notirten Schemata von n^2 Elementen combinirt sind, um die neuen Elemente $e_{\alpha\mu}$ zu erhalten. Die Determinante des Schemas

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

ist daher nach dem dort bewiesenen Multiplicationssatze der Determinanten gleich dem Product der beiden Determinanten der in Rede stehenden Schemata, das heisst

$$(33)\qquad a'c' - b'^2 = (ps - qr)\ (\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Die Ausdrücke p, q, r, s in (31) werden durch eine ebensolche Combination der Schemata

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

erhalten, und deshalb ist

(34) $$ps - qr = (ac - b^2)\,(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Die Vereinigung von (33) und (34) bringt demnach die Gleichung

(28*) $$a' c' - b'^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2\,(ac - b^2)$$

hervor, welche mit (28) zusammenfällt.

Die Verbindung $D = ac - b^2$ *heisst die Determinante der Function* $ax^2 + 2bxy + cy^2$, *die Verbindung* $D' = a'c' - b'^2$ *entsprechend die Determinante der Function* $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. *Die so eben allgemein bewiesene Gleichung lehrt daher, dass die Determinante der transformirten Function aus der Determinante der ursprünglichen Function erhalten wird, indem man die letztere mit dem Quadrate der Determinante der angewendeten Substitution multiplicirt.*

Die Determinante $ac - b^2$ steht in einer sehr nahen Beziehung zu der *Discriminante* der Gleichung (12)

$$a\xi^2 + 2b\xi + c = 0.$$

Nach der in § 59 gegebenen Definition ist die Discriminante $\mathfrak{D}$ einer quadratischen Gleichung, deren Wurzeln ξ_1 und ξ_2 sind, die Verbindung der Wurzeln

(34) $$\mathfrak{D} = -(\xi_1 - \xi_2)^2,$$

und die dortige Darstellung (13) verwandelt sich in den Ausdruck

(35) $$\mathfrak{D} = \frac{4ac - 4b^2}{a^2}.$$

Die *Discriminante* $\mathfrak{D}$ *und die Determinante* D *sind also durch die Gleichung verbunden*

(36) $$\mathfrak{D} = \frac{4D}{a^2}.$$

Ebenso hat man, wenn $\mathfrak{D}'$ *die Discriminante der Gleichung* (19) bezeichnet, die Relationen

(37) $$\mathfrak{D}' = -(\xi'_1 - \xi'_2)^2 = \frac{4a'c' - 4b'^2}{a'^2} = \frac{4D'}{a'^2}.$$

Den Relationen (21*) darf man auch den Ausdruck geben, dass *die Gleichung* (12) *durch Anwendung der Substitution*

(38) $$\xi = \frac{\alpha\xi' + \beta}{\gamma\xi' + \delta}$$

in die Gleichung (19) *transformirt sei.* Alsdann folgt aus der zwischen den Determinanten D und D' bestehenden Relation (28), dass *für die Discriminanten* $\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{D}'$ *die Relation*

(39) $$a'^2\,\mathfrak{D}' = \varkappa^2 a^2\,\mathfrak{D}$$

gilt.

Es ist jetzt wesentlich, insbesondere die Voraussetzung ins Auge zu fassen, *dass die Coefficienten der Function* $f(x, y)$, a, $2b$, c *reelle Grössen, und auch die Coefficienten der Substitution* (6) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *reelle Grössen sind.* Bei der Annahme, dass a nicht gleich Null ist, entscheidet das Vorzeichen der Discriminante $\mathfrak{D}$ und, was damit zusammenfällt, das Vorzeichen der Determinante D über die Natur der Wurzeln ξ_1 und ξ_2. Wir stützen uns hier auf die Resultate der §§ 24 bis 28 und zwar ist die Verbindung (6) des § 24 gleich dem vierfachen Werth der Determinante D. *Zu einer positiven Determinante D gehören zwei complexe conjungirte, zu einer negativen Determinante D zwei verschiedene reelle, zu einer verschwindenden Determinante D zwei zusammenfallende reelle Wurzeln ξ_1 und ξ_2.* Wenn $a = 0$, dagegen b nicht gleich Null ist, so zerfällt $f(x, y)$ nach (11*) in ein Product von zwei wesentlich verschiedenen reellen Factoren. Wenn $a = 0$, $b = 0$ und nur c nicht $= 0$ ist, so wird $f(x, y)$ gleich dem Product der Constante c in das Quadrat der Variable y. Es können diese Ergebnisse dahin zusammengefasst werden, *dass, je nachdem die Determinante D entweder positiv, oder negativ, oder gleich Null ist, die Factoren des ersten Grades, in welche $f(x, y)$ zerfällt, entweder complex sind, oder reell und von einander wesentlich verschieden, oder reell und bis auf einen constanten Factor einander gleich.* Da nun vermöge der Gleichung (28) die Determinante D' durch Multiplication der Determinante D mit dem vollen Quadrate $\varkappa^2$ der Substitutionsdeterminante, also einer wesentlich positiven Grösse, erzeugt wird, so befindet sich die Determinante D' mit der Determinante D stets in demselben Falle: sie sind gleichzeitig positiv, gleichzeitig negativ und gleichzeitig Null. Aus diesem Grunde zeigt die transformirte Function nothwendig in Betreff ihrer Factoren denselben Character wie die ursprüngliche Function $f(x, y)$.

Capitel VI.

Ganze homogene Functionen des zweiten Grades, oder quadratische Formen mit beliebig vielen Variabeln.

§ 79. Eintheilung der ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades mit zwei Variabeln und reellen Coefficienten.

Die ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades von zwei Veränderlichen gehören zu zwei getrennten Gruppen von Functionen, die in sehr verschiedenen Gebieten der mathematischen Wissenschaft eine hervorragende Stelle einnehmen; die zuerst genannten Functionen haben gewisse Eigenschaften, welche sich auf die eine Gruppe, und gewisse Eigenschaften, welche sich auf die andere Gruppe übertragen. Die *eine Gruppe, welche aus den ganzen homogenen Functionen eines beliebigen Grades besteht*, ist im vorigen § erörtert worden. Die Functionen dieser Gruppe besitzen, wie wir sahen, *die gemeinsame Eigenschaft, immer in Factoren des ersten Grades zerlegbar zu sein, vorausgesetzt, dass die Rechnung mit complexen Grössen zugelassen ist.* Die *andere Gruppe wird durch die ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades von beliebig vielen Veränderlichen gebildet*, und ist durch andere Eigenschaften ausgezeichnet. Bei der bisherigen Untersuchung der ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades von zwei Veränderlichen stand ihre Zerlegbarkeit im Vordergrunde. Nur der allgemeine Nachweis der Relation, welche zwischen den Determinanten einer gegebenen Function und der transformirten Function stattfindet, ist ohne Zuziehung der Zerlegbarkeit geführt worden. Es kommt aber namentlich auch darauf an, dass die im vorigen § gegebene Eintheilung der Functionen, deren *Coefficienten reell* sind, in solche, deren *Determinante positiv oder negativ oder gleich Null ist*, auf eine Definition gegründet werde, die nur relle Werthe der Variabeln x und y voraussetzt und nicht von der Zerlegbarkeit der Functionen ausgeht.

Bei den Functionen $f(x, y)$, deren *Determinante* $D = ac - b^2$ *positiv* ist, kann weder die Grösse a noch die Grösse c verschwinden, weil sonst D gleich der niemals positiven Grösse

$-b^2$ sein müsste. Es gilt daher in diesem Falle die Darstellung (11) des vorigen §, wo ξ_1 und ξ_2 complexe conjugirte Grössen sind. Weder der Factor $x-\xi_1 y$, noch der Factor $x-\xi_2 y$ kann für ein *Paar von reellen Werthen der Veränderlichen* x und y gleich Null werden, die einzigen Werthe $x=0$, $y=0$ ausgenommen. Für jedes Paar von *reellen Werthen* x und y sind die beiden Factoren $x-\xi_1 y$ und $x-\xi_2 y$ einander conjugirt, folglich wird ihr Product gleich der *Norm* derselben, das ist *gleich der Summe der Quadrate von zwei reellen Grössen*, und diese *Summe verschwindet dann und nur dann*, wenn zugleich $x=0$ und $y=0$ ist. Die Function $f(x,y)$ ist gleich dem erwähnten Product, in den von Null verschiedenen Coefficienten a multiplicirt, und hat deshalb, sobald a *positiv* ist, *für alle reellen Werthpaare* x und y stets das *positive*, sobald a *negativ* ist, stets das *negative* Vorzeichen. Deshalb ist $f(x,y)$, wofern $ac-b^2$ *positiv* und zugleich a *positiv* ist, *eine wesentlich positive*, wofern $ac-b^2$ *positiv* und zugleich a *negativ* ist, *eine wesentlich negative Function.* Das Vorzeichen von a und von c muss immer dasselbe sein, da andernfalls die Determinante $ac-b^2$ nothwendig negativ wäre. Eine Function $f(x,y)$, deren *Determinante* $ac-b^2$ *negativ* ist, zerfällt, wie sich gezeigt hat, in ein Product von zwei *wesentlich verschiedenen reellen* Factoren des ersten Grades, und kann deshalb für beliebige reelle Werthe x und y *sowohl gleich einer positiven, wie gleich einer negativen Grösse* werden. Eine Function, $f(x,y)$, deren *Determinante* $ac-b^2$ *verschwindet*, ist gleich einem in eine Constante multiplicirten *Quadrat einer ganzen Function des ersten Grades von* x *und* y; die Function $f(x,y)$ kann daher für reelle Werthe von x und y kein anderes Vorzeichen annehmen, als das Vorzeichen jener Constante, und dieses ist für ein nicht verschwindendes a das Vorzeichen von a, für ein verschwindendes a das Vorzeichen von c. Doch verschwindet die Function $f(x,y)$ in diesem Falle *nicht nur für das eine* reelle Werthpaar $x=0$, $y=0$, sondern *für alle diejenigen reellen Werthpaare*, durch welche die *Function des ersten Grades* verschwindet, welche dem bezeichneten Quadrat als *Basis* dient.

Wir kennen jetzt die *Bedingungen*, von denen es abhängt, *ob eine Function* $ax^2+2bxy+cy^2$ *mit reellen Coefficienten,*

und bei der die Variabeln x und y beliebige reelle Werthe erhalten, entweder wesentlich positiv sei, oder wesentlich negativ sei, und dabei nur für die zusammengehörigen Werthe $x=0$ und $y=0$ verschwinde, oder sowohl positive als negative Werthe annehmen könne, oder so beschaffen sei, dass sie zwar niemals das Vorzeichen wechseln aber für unbegrenzt viele Werthsysteme x und y den Werth Null annehmen kann.

Nun ist es nicht schwierig, die Gültigkeit der gefundenen Bedingungen durch Ueberlegungen zu beweisen, welche das Gebiet der reellen Grössen nicht verlassen und sich genau den Betrachtungen des § 24 über die ganzen Functionen zweiten Grades von einer Variable anschliessen.

Damit eine Function $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ *wesentlich positiv oder wesentlich negativ sei, und nur für das Werthsystem* $x=0$, $y=0$ *verschwinde*, ist es nothwendig, dass der Coefficient a nicht gleich Null sei; denn wenn $a=0$ und dabei b nicht gleich Null ist, so kann jeder der beiden Factoren des Ausdruckes $2b\left(x+\frac{c}{2b}y\right)y$ nach Belieben positiv und negativ gemacht werden, und wenn $a=0$, $b=0$, c jedoch nicht gleich Null ist, so hat der Ausdruck $c y^2$ zwar das Vorzeichen der Grösse c, verschwindet jedoch für die Verbindung *des Werthes* $y=0$ *mit jedem Werthe von* x. Da also für eine Function des bezeichneten Charakters a nicht gleich Null sein darf, was sich auch für die Grösse c beweisen lässt, so gilt die Darstellung

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{1}{a}\left((a x + b y)^2 + (a c - b^2) y^2\right),$$

welche dem Ausdrucke (5) des § 24 entspricht und zu entsprechenden Folgerungen berechtigt. Je nachdem die Determinante $D = a c - b^2$ einen *positiven*, einen *negativen* oder einen *verschwindenden Werth* hat, wird der auf der rechten Seite von (1) in der Klammer befindliche Ausdruck gleich *einer Summe von zwei Quadraten, deren Basen beliebige reelle Werthe erhalten können, einer Differenz von zwei Quadraten, deren Basen beliebige reelle Werthe erhalten können, oder gleich einem einzigen Quadrate.* Eine Summe von den Quadraten zweier reeller Grössen ist stets positiv und nur dann gleich Null, wenn die beiden Basen gleichzeitig verschwinden; die Function $f(x, y)$ ist daher, sobald

$ac - b^2 > 0$, $a > 0$ ist, wesentlich positiv, sobald $ac - b^2 > 0$, $a < 0$ ist, wesentlich negativ, und sie verschwindet nur, indem $y = 0$ und $x = 0$ wird. Eine Differenz von den Quadraten zweier reeller Grössen ist im Stande, nach Willkür das positive und das negative Vorzeichen zu erhalten; die Function $f(x, y)$ kann deshalb, wenn $ac - b^2 < 0$ ist, positive und negative Werthe annehmen. Das Quadrat einer reellen Grösse ist immer positiv und nur dann gleich Null, wenn seine Basis gleich Null wird; die Function $f(x, y)$ ändert darum, wofern $ac - b^2 = 0$ ist, ihr Vorzeichen nicht, verschwindet aber für unbegrenzt viele Werthpaare x und y.

§ 80. *Gauss'* geometrische Darstellung der wesentlich positiven ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades mit zwei Variabeln. System parellelogrammatisch geordneter Punkte in der Ebene. Verschiedene Anordnungen eines solchen Systems.

Die eigenthümlichen Begriffe, welche bei der Betrachtung der ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades von zwei Variabeln auftreten, können für die wesentlich positiven Functionen durch eine geometrische Interpretation veranschaulicht werden, welche *Gauss* im Jahre 1831 bei Gelegenheit der Anzeige eines Werkes von *Seeber* bekannt gemacht hat. Die Forderung, *für kein System reeller Werthe ausser dem System $x = 0$, $y = 0$ zu verschwinden* ist hier, wie auch im Folgenden in die Definition einer *wesentlich positiven Function* aufgenommen. Da für eine solche wesentlich positive Function $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ die Determinante $D = ac - b^2$ positiv ist und auch die Coefficienten a und c positiv sind, so haben die Quadratwurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{D}$ von Null verschiedene reelle Werthe, die wir uns im Einklange mit den bisher gebrauchten Bezeichnungen als positiv denken wollen. Der Quotient $\frac{ac - b^2}{ac}$ ist jetzt ein nie verschwindender positiver echter Bruch, der für $b = 0$ der Einheit gleich wird, und deshalb hat auch die Grösse $\frac{b}{\sqrt{a}\sqrt{c}}$ einen positiven oder negativen, für $b = 0$ verschwindenden aber niemals die Einheit erreichenden

Werth. Es giebt daher immer einen bestimmten zwischen 0 und π liegenden Winkel ω, dessen Cosinus gleich der Grösse $\frac{b}{\sqrt{a}\sqrt{c}}$, und dessen Sinus gleich der positiven Grösse $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}\sqrt{c}}$ ist. Vermöge der bezeichneten Gleichungen

$$(1) \qquad \cos\omega = \frac{b}{\sqrt{a}\sqrt{c}}, \ \sin\omega = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}\sqrt{c}}$$

wird der Winkel ω ein spitzer oder stumpfer, je nachdem b positiv oder negativ ist, für $b = 0$ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder einem rechten Winkel; er *verschwindet niemals* und *erreicht auch niemals den Werth* π, weil die Annahme $D = 0$ ausgeschlossen ist. Man ziehe nun, um die *Gauss*'sche Interpretation einer wesentlich positiven Function $ax^2 + 2bxy + cy^2$ zu erhalten, in einer Ebene durch einen beliebig gewählten Punkte O eine unbegrenzte gerade Linie, und unterscheide, wie dies früher in § 42 geschehen ist, eine Seite derselben als die positive. Ferner ziehe man durch den Punkt O eine zweite gerade Linie, für die eine eben solche Bestimmung eingeführt wird, in der Weise, dass die positive Seite der ersten Linie mit der positiven Seite der zweiten Linie den so eben bestimmten Winkel ω bildet. Weil ω weder gleich Null noch gleich π oder zwei rechten Winkeln sein kann, ist es unmöglich, dass die beiden Linien zusammenfallen. Um eine feste Vorstellung zu wählen, möge die positive Seite der ersten Linie in die positive Seite der zweiten Linie übergehen, sobald man die erstere von der linken zu der rechten Hand um den Winkel ω dreht. Sobald jetzt den Variabeln x und y irgend welche reelle Werthe beigelegt werden, so schneide man unter Anwendung einer bestimmten Längeneinheit von dem Punkte O aus auf der ersten Geraden eine Strecke ab, die durch die Grösse $x\sqrt{a}$ gemessen wird, und zwar für ein positives x auf der positiven, für ein negatives x auf der negativen Seite der Linie, und nenne den Endpunkt P; man schneide ferner von dem Punkte O aus auf der zweiten Linie eine Strecke ab, die durch die Grösse $y\sqrt{c}$ gemessen und deren Lage durch das Vorzeichen von y in gleicher Weise bestimmt wird, und nenne den Endpunkt Q. Es soll jetzt durch

den Punkt P eine Parallele zu der ersten Linie, durch den Punkt Q eine Parallele zu der zweiten Linie gezogen werden, diese Parallelen mögen sich in dem Punkte R schneiden, alsdann *wird das Quadrat der Entfernung des Punktes R von dem Punkte O durch die Function* $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ *ausgedrückt.* Denn nachdem die Verbindungslinie OR gezogen ist, so giebt eine Ausdehnung des *Pythagoräischen Lehrsatzes* die folgende Gleichung zwischen den Seiten und dem einen Winkel des Dreiecks OPR

(2) $$OR^2 = OP^2 - 2\, OP.PR \cos OPR + PR^2.$$

Ferner entsteht für die Function $f(x, y)$ durch die Einführung des $\cos \omega$ statt des Coefficienten b der Ausdruck

(3) $$f(x, y) = a x^2 + 2 \sqrt{a} \sqrt{c}\, x y \cos \omega + c y^2,$$

dessen Vergleichung mit (2) die ausgesprochene Behauptung rechtfertigt.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $OPRQ$ wird erhalten, indem man das Product von zwei aneinanderstossenden Seiten OP und OQ mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ω multiplicirt. Wenn x und y dasselbe Vorzeichen haben, so drückt sich das Product der beiden Seiten durch $\sqrt{a} \sqrt{c}\, x y$, im entgegengesetzten Falle durch $-\sqrt{a} \sqrt{c}\, x y$ aus. Fügt man hiezu den aus (1) folgenden Werth $\sin \omega = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a} \sqrt{c}}$, so erhellt, *dass der Flächeninhalt des Parallelogramms $OPRQ$ durch den positiven unter den beiden Ausdrücken*

(4) $$x y \sqrt{D}, \; - x y \sqrt{D}$$

dargestellt wird.

Wenn man den Grössen $x \sqrt{a}$ und $y \sqrt{c}$ nach einander alle möglichen Paare von reellen Werthen beilegt, so nimmt der Punkt R nach einander die Oerter aller Punkte der Ebene und den Ort eines jeden Punktes ein Mal ein. Die Grössen $x \sqrt{a}$ und $y \sqrt{c}$ dienen also, wie die in § 42 eingeführten Stücke, zu der Bestimmung eines Ortes in einer Ebene, und werden entsprechend die *Coordinaten des Punktes R in Bezug auf die beiden Axen* genannt, welche bisher als die *erste* und die *zweite Linie* bezeichnet worden sind und den *Winkel* ω mit einander bilden. Sie verwandeln sich in *rechtwinklige Coordinaten,*

sobald der Winkel ω gleich einem rechten Winkel wird; dies geschieht in dem gegenwärtigen Falle nur dann, wenn $b = 0$, mithin wenn

(5) $$f(x, y) = a x^2 + b y^2$$

ist. Damit auch die *Bezeichnung* mit der in § 42 gebrauchten übereinstimme, muss ausserdem $a = 1$ und $c = 1$, folglich

(6) $$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sein. Man kann bei einer beliebigen Function $f(x, y)$ von den Coordinaten $x\sqrt{a}$ und $y\sqrt{c}$ eines Punktes R zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, indem man von dem betreffenden Punkte R auf die erste Axe ein Loth RR_1 herablässt und festsetzt, dass der auf der ersten Axe von dem Punkte O gemessene Abstand OR_1 und das erwähnte Loth RR_1 die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η des Punktes R liefern sollen. Zur Feststellung der Vorzeichen möge angenommen werden, dass die positive Seite der ξ-Axe mit der positiven Seite der zu Anfang angenommenen ersten Axe zusammenfalle, und dass die positive Seite der η-Axe erhalten werde, wenn man die positive Seite der in Rede stehenden Axe von der linken zu der rechten Hand um einen rechten Winkel dreht. Diese Annahme correspondirt mit der vorhin getroffenen Annahme, dass die positive Seite der ursprünglichen ersten Axe in die positive Seite der ursprünglichen zweiten Axe übergehen soll, sobald die erstere von der linken zu der rechten Hand um den zwischen Null und zwei rechten Winkeln liegenden Winkel ω gedreht wird. Der Abstand OR_1 setzt sich aus den Stücken OP und PR_1 zusammen, mithin kommen für ξ und η die Werthe

(7) $$\xi = x\sqrt{a} + y\sqrt{c}\,\cos\omega,\ \eta = y\sqrt{c}\,\sin\omega,$$

welche sich durch die Anwendung von (1) in die folgenden verwandeln

(8) $$\xi = \frac{ax + by}{\sqrt{a}},\ \eta = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\, y.$$

Auf diese Weise wird das *Quadrat der Entfernung* OR oder die *Function* $f(x,y)$ gleich der *Summe der Quadrate* $\xi^2 + \eta^2$. Diese Darstellung geht aber aus der Darstellung (1) einer wesentlich positiven Function $f(x, y)$ hervor, sobald hier der Factor $\frac{1}{a}$ sowohl dem ersten Quadrate $(ax + by)^2$ wie dem zweiten

Quadrate $D y^2$ beigefügt wird. Demnach ergiebt sich, dass zwischen der *Gauss'schen Interpretation einer complexen Grösse* und der *Gauss'schen Interpretation einer wesentlich positiven ganzen homogenen Function des zweiten Grades von zwei Variabeln* ein inniger Zusammenhang besteht. Insofern als ξ und η die *rechtwinkligen Coordinaten* des Punktes R in der Ebene sind, wird die *complexe Grösse*

$$\xi + i\eta$$

durch den Punkt R vertreten. Wenn aber ξ und η vermöge der Gleichungen (8) in den Variabeln x und y ausgedrückt werden, so liefern die *conjugirten complexen Grössen*

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi + i\eta &= \frac{ax + by}{\sqrt{a}} + i\,\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\,y \\ \xi - i\eta &= \frac{ax + by}{\sqrt{a}} - i\,\frac{\sqrt{D}}{a}\,y \end{aligned} \right.$$

das *Product* $\xi^2 + \eta^2 = a x^2 + 2 b x y + c y^2$, und bilden die *beiden conjugirten Factoren des ersten Grades, in welche die wesentlich positive Function* $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ *unter Anwendung der Rechnung mit imaginären Grössen zerlegt werden kann.* Da keine der ursprünglichen zwei Axen einen Vorzug vor der andern hat, so hätte mit gleichem Rechte ein rechtwinkliges Coordinatensystem eingeführt werden können, dessen eine Axe die ursprüngliche zweite Axe ist; hiemit würde die Darstellung der Function $f(x, y)$

$$(10) \qquad f(x, y) = \frac{1}{c}\left((c y + b x)^2 + (ac - b^2)\, x^2\right)$$

correspondiren.

Die geometrische Interpretation einer wesentlich positiven Function $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ benutzt *Gauss* vornehmlich zu dem Zwecke, um diejenigen Punkte der Ebene zu betrachten, welche entstehen, indem die Variable x und die Variable y gleich *beliebigen positiven oder negativen ganzen Zahlen* gesetzt werden. Wenn die Variable x successive gleich den positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . genommen wird, so erhält der auf der ersten Axe liegende vorhin mit P bezeichnete Punkt die ersten Ordinaten $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$, $3\sqrt{a}, \ldots$, er bewegt sich daher von dem Nullpunkte O an nach der positiven Seite so vorwärts, dass die

Oerter immer um die Strecke $\sqrt{a}$ von einander abstehen; die Werthe $x = -1, -2, -3, \ldots$ bestimmen für den Punkt P eine Reihe von Oertern, die auf der negativen Seite derselben Axe in denselben gleichen Abständen aufeinander folgen. Ebenso liefern die ganzzahligen Werthe der Variable y für den oben mit Q bezeichneten Punkt auf der zweiten Axe lauter Oerter, die von dem Nullpunkte O aus stets den gleichen Abstand $\sqrt{c}$ haben und sich nach der positiven wie nach der negativen Seite der Axe unbegrenzt fortsetzen. Weil nun die Lage des Punktes R fixirt wird, indem man durch P eine Parallele zu der zweiten Axe, durch Q eine Parallele zu der ersten Axe zieht, und diese Parallelen sich schneiden lässt, so theilen die Parallelen, welche den *ganzzahligen Werthen* von x und von y entsprechen, die Ebene in *lauter gleiche Parallelogramme*, und *die Ecken derselben sind die Punkte, welche betrachtet werden.* Der Flächeninhalt des *Grundparallelogramms*, dem alle bezeichneten Parallelogramme gleich sind, folgt aus (4), wenn P der auf der positiven Seite der ersten Axe mit O benachbarte Punkt und gleichzeitig Q der auf der positiven Seite der zweiten Axe mit O benachbarte Punkt ist, das heisst, wenn für den Punkt R $x = 1$ und $y = 1$ ist. *Der Flächeninhalt des Grundparallelogramms in dem zu der Function* $a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2$ *gehörenden System parallelogrammatisch geordneter Punkte der Ebene ist daher gleich der Grösse* $\sqrt{D}$, *der Quadratwurzel aus der Determinante* $D = a\,c - b^2$.

Im vorigen § hat sich ergeben, dass eine wesentlich positive Function $f(x, y)$ durch eine Substitution mit reellen Coefficienten

$$\begin{aligned} x &= \alpha\,x' + \beta\,y' \\ y &= \gamma\,x' + \delta\,y, \end{aligned} \tag{11}$$

wofern die Substitutionsdeterminante $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \varkappa$ nicht gleich Null ist, wieder in eine wesentlich positive Function $g(x', y') = a'\,x'^2 + 2\,b'\,x'\,y' + c'\,y'^2$ übergeht. Diese Transformation kann ebenfalls den eingeführten Anschauungen gemäss interpretirt werden. Da zu jedem Paar von Werthen x', y' ein bestimmtes Paar von Werthen x, y gehört, und, weil $\varkappa$ nicht gleich Null ist, auch umgekehrt zu jedem Paar von Werthen x, y ein bestimmtes Paar von Werthen x', y', so ist ein Punkt R

in der Ebene sowohl durch das eine wie durch das andere zugeordnete Paar vollständig bestimmt, und darf deshalb sowohl durch die Anführung des einen wie des anderen Paares von Werthen bezeichnet werden. Wenn etwa in (11) $x' = 1$, $y' = 0$ gesetzt wird, so folgt $x = \alpha$, $y = \gamma$; wenn $x' = 0$, $y' = 1$ gesetzt wird, kommt $x = \beta$, $y = \delta$. Demnach ist der Punkt $x' = 1$, $y' = 0$ mit dem Punkte $x = \alpha$, $y = \gamma$ identisch, und der Punkt $x' = 0$, $y' = 1$ mit dem Punkte $x = \beta$, $y = \delta$ identisch.

Das Quadrat der Entfernung OR wird bei der definirten Interpretation durch die Function $a x^2 + 2 b x y + c y^2$, und deshalb vermöge der aus (11) fliessenden Gleichung

$$(12) \qquad a x^2 + 2b\, x y + c\, y^2 = a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2$$

zugleich durch die auf der rechten Seite befindliche neue Function dargestellt. Indem, wie wir sahen, der Punkt $x = \alpha, y = \gamma$ mit dem Punkte $x' = 1$, $y' = 0$ und der Punkt $x = \beta$, $y = \delta$ mit dem Punkte $x' = 0$, $y' = 1$ zusammenfällt, so hat das Quadrat der von dem Punkte O aus genommenen Entfernung für den Punkt $x' = 1$, $y' = 0$ den Werth

$$(13) \qquad a\, \alpha^2 + 2b\, \alpha\, \gamma + c\, \gamma^2 = a',$$

und für den Punkt $x' = 0$, $y' = 1$ den Werth

$$(14) \qquad a\, \beta^2 + 2b\, \beta\, \delta + c\, \delta^2 = c'.$$

Wir wollen jetzt den Winkel φ_1 bestimmen, welchen die Verbindungslinie des Punktes O mit dem Punkte $x' = 1$, $y' = 0$ oder $x = \alpha$, $y = \gamma$ gegen die ursprüngliche erste Axe macht, und den Winkel φ_2, welchen die Verbindungslinie des Punktes O mit dem Punkte $x' = 0$, $y' = 1$ oder $x = \beta$, $y = \delta$ gegen dieselbe Axe macht. Zu diesem Ende können für den Punkt $x = \alpha$, $y = \gamma$ wie für den Punkt $x = \beta$, $y = \delta$ die *rechtwinkligen Coordinaten* verwendet werden, die vorhin ξ und η genannt und in (9) durch x und y dargestellt sind. Für den ersten der in Rede stehenden Punkte sei $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$, für den zweiten $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_2$. Nun hat das Quadrat der von dem Punkte O aus genommenen Entfernung für den ersten und den zweiten Punkt vermöge (13) und (14) die respectiven Werthe $\xi_1^2 + \eta_1^2 = a'$, $\xi_2^2 + \eta_2^2 = c'$; mithin liefert die Einführung der Winkel φ_1 und φ_2 die Gleichungen

$$(15)\qquad \xi_1 = \sqrt{a'}\cos\varphi_1,\ \eta_1 = \sqrt{a'}\sin\varphi_1$$
$$\xi_2 = \sqrt{c'}\cos\varphi_2,\ \eta_2 = \sqrt{c'}\sin\varphi_2.$$

Andrerseits geben die beiden Substitutionen $x=\alpha$, $y=\gamma$ und $x=\beta$, $y=\delta$ die Gleichungen

$$(16)\qquad \xi_1 = \frac{a\alpha + b\gamma}{\sqrt{a}},\ \eta_1 = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\gamma$$
$$\xi_2 = \frac{a\beta + b\delta}{\sqrt{a}},\ \eta_2 = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}}\delta.$$

Der Winkel, welchen die von dem Nullpunkte nach dem Punkte $x=\beta$, $y=\delta$ gezogene Linie mit der von dem Nullpunkte nach dem Punkte $x=\alpha$, $y=\gamma$ gezogenen Linie macht, ist gleich der Differenz der eingeführten Winkel $\varphi_2-\varphi_1$. Man findet aber aus (15) die Gleichungen

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1 &= \sqrt{a'}\sqrt{c'}(\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\\ &= \sqrt{a'}\sqrt{c'}\sin(\varphi_2-\varphi_1)\\ \xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2 &= \sqrt{a'}\sqrt{c'}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\ &= \sqrt{a'}\sqrt{c'}\cos(\varphi_2-\varphi_1), \end{aligned}\right.$$

und aus (16) mit Beachtung von (29) des § 78 die Gleichungen

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1 &= (\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{D}\\ \xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2 &= b', \end{aligned}\right.$$

deren Combination die Gleichungen

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{a'}\sqrt{c'}\sin(\varphi_2-\varphi_1) &= (\alpha\delta-\beta\gamma)\sqrt{D}\\ \sqrt{a'}\sqrt{c'}\cos(\varphi_2-\varphi_1) &= b', \end{aligned}\right.$$

hervorbringt. Vermöge derselben ist der Winkel $\varphi_2-\varphi_1$ demjenigen Winkel gleich, welchen *zwei Axen* haben müssen, die nach der entwickelten Methode zu *einer geometrischen Interpretation der Function* $a'x'^2+2b'x'y'+c'y^2$ anzuwenden sind. Da die betreffenden Coefficienten und Coefficientenverbindungen aus denen, welche zu der Function $ax^2+2bxy+cy^2$ gehören, durch Hinzufügung von Accenten abgeleitet werden, so liefern die Formeln (1) für den Neigungswinkel ω' der zu wählenden *neuen Axen* die Bestimmung

$$(20)\qquad \cos\omega' = \frac{b'}{\sqrt{a'}\sqrt{c'}},\ \sin\omega' = \frac{\sqrt{D'}}{\sqrt{a'}\sqrt{c'}},$$

wo die Quadratwurzeln wieder positiv zu deuten sind. Die De-

terminanten D und D' sind durch die Gleichung (28) des § 78

$$D' = \varkappa^2 D = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D$$

verknüpft. *Wenn man also die Werthe*

$$(21) \quad \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b'}{\sqrt{a'}\sqrt{c'}}, \quad \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\sqrt{D}}{\sqrt{a'}\sqrt{c'}}$$

den Werthen (20) *gegenüber stellt, so fallen* cos ω' *und* cos $(\varphi_2 - \varphi_1)$ *stets zusammen, ferner unterscheiden sich* sin ω' *und* sin $(\varphi_2 - \varphi_1)$ *nicht von einander, wenn die Substitutionsdeterminante* $\varkappa = \alpha\delta - \beta\gamma$ *einen positiven Werth hat, unterscheiden sich dagegen nur durch das Vorzeichen, wenn die Substitutionsdeterminante* $\varkappa$ *einen negativen Werth hat.* Hieraus folgt, dass in dem ersten Falle die Winkel ω' und $\varphi_2 - \varphi_1$ einander gleich, im zweiten Falle einander im Vorzeichen entgegengesetzt, dem absoluten Werthe nach aber ebenfalls gleich sind.

Wir sehen, dass der Sinus des Winkels $\varphi_2 - \varphi_1$ für ein positives $\varkappa$ positiv, für ein negatives $\varkappa$ negativ ausfällt. Hiemit wird ein *characteristischer Unterschied* ausgedrückt, welchen die *Lage der Linien* haben kann, die sich von dem Nullpunkte nach dem Punkte $x = \alpha$, $y = \gamma$ und nach dem Punkte $x = \beta$, $y = \delta$ erstrecken, und die wir der Kürze halber *die erste neue* und *die zweite neue Linie* nennen wollen. Bei der eingeführten Bestimmung werden die Winkel φ_1 und φ_2 in dem Sinne einer Drehung von der linken zu der rechten Hand positiv gerechnet. Die erste neue Linie und die zweite neue Linie schliessen einen bestimmten Winkel ein, der zwischen Null und zwei rechten Winkeln liegt oder *concav* ist. *Wofern* sin $(\varphi_2 - \varphi_1)$ *positiv ist, muss in Bezug auf diesen Winkel die erste neue Linie links, die zweite neue Linie rechts liegen; wofern* sin $(\varphi_2 - \varphi_1)$ *negativ ist, muss in Bezug auf den entsprechenden concaven Winkel umgekehrt die erste neue Linie rechts und die zweite neue Linie links liegen. Für ein positizes* $\varkappa$ *tritt der erste, für ein negatives* $\varkappa$ *der zweite Fall ein.*

Es war die Lage der ursprünglichen beiden zu der Function $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ gehörigen Axen so angenommen worden, *dass in Bezug auf den von denselben eingeschlossenen concaven Winkel* ω *die erste Axe links, die zweite Axe rechts liegt.* Die Untersuchung hat gezeigt, dass die *erste neue Linie*, welche

sich von dem Nullpunkte O nach dem Punkte $x = \alpha$, $y = \gamma$ oder $x' = 1$, $y' = 0$ erstreckt, dessen Entfernung von O gleich $\sqrt{a'}$ ist, und die *zweite neue Linie*, welche sich von dem Nullpunkte O nach dem Punkte $x = \beta$, $y = \delta$ oder $x' = 0$, $y' = 1$ erstreckt, dessen Entfernung von O gleich $\sqrt{c'}$ ist, *zwei Axen* liefern, die in der genau entsprechenden Weise zu der Function $a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2$ gehören. *Hiebei waltet aber der Unterschied ob, dass, sobald die Substitutionsdeterminante $\alpha\delta - \beta\gamma = \varkappa$ positiv ist, die erste neue Axe in Bezug auf den concaven Winkel ω' zu der zweiten neuen Axe ebenso liegt, wie die erste ursprüngliche Axe zu der zweiten ursprünglichen Axe, dass dagegen, sobald $\varkappa$ negativ ist, die erste neue Axe zu der zweiten neuen Axe entgegengesetzt liegt, wie die ursprüngliche erste Axe zu der ursprünglichen zweiten Axe.* Denken wir uns durch den Punkt $x' = 1$, $y' = 0$ eine Parallele zu der zweiten neuen Axe, und durch den Punkt $x' = 0$, $y' = 1$ eine Parallele zu der ersten neuen Axe gezogen, so schneiden sich diese Parallelen in dem Punkte $x' = 1$, $y' = 1$, und der Flächeninhalt des Parallelogramms, dessen vier Seiten durch die beiden neuen Axen und die betreffenden beiden Parallelen gebildet werden, hat auf Grund der für die Function $ax^2 + 2bxy + cy^2$ gefundenen Resultate zu seinem Ausdruck *die Quadratwurzel aus der Determinante $D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D$. Ein beliebiger Punkt der Ebene, der vorhin mit R bezeichnet ist, bekommt in Bezug auf die beiden neuen Axen respective die Coordinaten $x'\sqrt{a'}$ und $y'\sqrt{c'}$.*

Wenn festgesetzt wird, dass die vier Grössen α, β, γ, δ *ganze Zahlen* sein sollen, so bewirken die Substitutionsgleichungen

$$(22) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y', \end{cases}$$

dass aus irgend zwei ganzen Zahlen x' und y' ganze Zahlen für x und y hervorgehen. *Die ganzzahligen Werthe von x' und y' bringen in der zu der geometrischen Interpretation benutzten Ebene ein System von parallelogrammatisch geordneten Punkten hervor, die auf den Parallelen zu der ersten neuen Axe in den gleichen Abständen $\sqrt{a'}$ und auf den Parallelen zu der zweiten neuen Axe in den gleichen Abständen $\sqrt{c'}$ auf einander folgen.* Der Flächeninhalt des Grundparallelogramms $\sqrt{D'}$ ist gleich dem Product des Flächeninhalts von dem zuerst betrach-

teten Grundparallelogramm $\sqrt{D}$ mit dem absoluten Werthe der Substitutionsdeterminante $\alpha\delta-\beta\gamma$, welche gegenwärtig gleich einer ganzen Zahl ist. *Alle Punkte dieses neuen Systems sind zugleich Punkte des ursprünglichen Systems, das der Function* $ax^2+2bxy+cy^2$ *zugehört*, weil jeder Punkt dem ein ganzzahliges x' und ein ganzzahliges y' entspricht, auch durch ein ganzzahliges x und ein ganzzahliges y bezeichnet wird. Ob aber auch das umgekehrte der Fall sei, hängt davon ab, ob vermöge der Substitutionsgleichungen (22) aus ganzzahligen Werthen von x und y sich ganzzahlige Werthe von x' und y' ergeben. Die Auflösung von (22) liefert die Gleichungen

$$(23)\qquad x'=\frac{\delta x-\beta y}{\varkappa}$$

$$y'=\frac{-\gamma x+\alpha y}{\varkappa}.$$

Es werden daher x' und y' dann und nur dann die betreffende allgemeine Eigenschaft haben, wenn $\frac{\alpha}{\varkappa}, \frac{\beta}{\varkappa}, \frac{\gamma}{\varkappa}, \frac{\delta}{\varkappa}$ lauter ganze Zahlen sind. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist am Schlusse des § 77 aufgestellt worden, und besteht darin, dass *die Determinante* $\alpha\delta-\beta\gamma$ *entweder gleich der positiven oder der negativen Einheit sein muss. Unter der Voraussetzung, dass* $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ *oder* $=-1$ *ist, sind also alle Punkte des neuen parallelogrammatischen Systems zugleich Punkte des ursprünglichen Systems, und auch alle Punkte des ursprünglichen Systems zugleich Punkte des neuen Systems*; wegen der Gleichungen $D'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 D$ und $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=1$ ist ferner $D'=D$, und deshalb *haben die Grundparallelogramme bei den beiden Systemen denselben Flächeninhalt.* Man erkennt hieraus, dass gegenwärtig *dasselbe System von Punkten der Ebene erstens nach den beiden ursprünglichen Axen, und zweitens nach den beiden neuen Axen geordnet ist. Die relative Lage der ersten zu der zweiten Axe stimmt für die beiden Anordnungen überein oder ist entgegengesetzt, je nachdem* $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ *oder* $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$ *ist.*

Eine ganze homogene Function $ax^2+2bxy+cy^2$, in welcher a, b, c *gegebene ganze Zahlen* und x, y *beliebige ganze Zahlen* bedeuten, stellt *ganze Zahlen* dar und bildet insofern einen Gegenstand für die *Lehre von den ganzen Zahlen* oder die

Arithmetik. *Gauss* hat diesen Functionen die fünfte Section seiner *disquisitiones arithmeticae* gewidmet und nennt sie dort *Formen des zweiten Grades.* Im Verlaufe der Untersuchung erwähnt er auch die *algebraischen rationalen ganzen homogenen Functionen von mehreren Variabeln und verschiedenen Graden*, und bemerkt, dass dieselben in Bezug auf *die Höhe des Grades in Formen des zweiten, dritten, vierten Grades* u. s. w., in Bezug auf *die Anzahl der Variabeln* in *binäre, ternäre, quaternäre Formen* u. s. w. eingetheilt werden können. Diese Bezeichnungsweise ist immer mehr zur Herrschaft gekommen und wird auch im Folgenden angewendet werden. Die ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades von zwei Variabeln sind nach dieser Ausdrucksweise *die binären Formen des zweiten Grades* oder *die binären quadratischen Formen*, und die erklärte geometrische Interpretation bezieht sich auf die *wesentlich positiven binären quadratischen Formen.*

Eine quadratische Form $a x^2 + 2 b x y + c y^2$, in welcher a, b, c *ganze Zahlen* sind, geht vermöge der Substitution (22), bei der α, β, γ, δ wieder ganze Zahlen sein sollen, in die Form $a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2$ über, bei der a', b', c' ebenfalls ganze Zahlen sind. Alle ganzen Zahlen, welche durch die Form $a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2$ dargestellt werden können, sind auch durch die Form $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ darstellbar. Dagegen sind umgekehrt alle Zahlen, welche durch die erste Form dargestellt werden können, dann und nur dann auch durch die zweite Form darstellbar, wenn die Substitutionsdeterminante $\alpha \delta - \beta \gamma$ gleich der *positiven Einheit*, oder gleich der *negativen Einheit* ist. Alsdann heissen die beiden Formen *aequivalent*, und zwar *im ersten Falle eigentlich aequivalent*, *im zweiten Falle uneigentlich aequivalent.* Sobald die Form $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ wesentlich positiv ist, so ist dies auch die Form $a' x'^2 + 2 b' x' y' + c' y'^2$. Zu jeder der beiden Formen gehört ein parallelogrammatisch geordnetes System von Punkten in der Ebene; bei jedem der beiden Systeme werden die vermöge der betreffenden Form durch ganzzahlige Werthe der Variabeln darstellbaren Zahlen durch die Quadrate der Abstände aller Punkte des Systems von dem Nullpunkte vertreten. Wenn die beiden Formen *aequivalent* sind, so fallen die zugehörigen Systeme von Punkten zusammen.

Als Beispiel möge die Form (6) gelten, der Typus aller wesentlich positiven Formen,

$$x^2 + y^2.$$

Vermöge der Substitution

$$x = 2x' + 5y'$$
$$y = x' + 3y',$$

deren Determinante $2.3 - 5.1 = +1$ ist, geht dieselbe in die wesentlich positive Form

$$5x'^2 + 2.13\,x'y' + 34\,y'^2$$

über. Sie verwandelt sich vermöge der Substitution

$$x = 3x' + 4y'$$
$$y = 4x' + 5y',$$

deren Determinante $3.5 - 4.4 = -1$ ist, in die wesentlich positive Form

$$25\,x'^2 + 2.32\,x'y' + 41\,y'^2.$$

Das System der Punkte, welches zu der Form $x^2 + y^2$ gehört, besteht aus *Quadraten, deren Seite gleich der Einheit ist.* Die beiden andern Systeme enthalten, da $\alpha\delta - \beta\gamma$ das erste Mal gleich der positiven Einheit, das andere Mal gleich der negativen Einheit ist, dieselben Punkte, nach zwei verschiedenen schiefwinkligen Parallelogrammen geordnet.

§ 81. Transformation der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln. Eigenschaften der Determinante einer quadratischen Form.

Die ganzen homogenen Functionen des zweiten Grades, oder *die quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln* $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche die in § 79 erwähnte zweite Gruppe von Functionen ausmachen, mögen folgendermassen bezeichnet werden

$$(1)\quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{11}\,x_1^2 &+ 2a_{12}\,x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n}\,x_1 x_n \\ &+ a_{22}\,x_2^2 \quad + \ldots + 2a_{2n}\,x_2 x_n \\ &\qquad\qquad + \ldots\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + a_{nn}\,x_n^2 \quad . \end{aligned}$$

Unter den $\frac{n(n+1)}{2}$ Coefficienten $a_{11}, 2a_{12}, \ldots a_{nn}$ sind die Coefficienten der Quadrate als einfach genommene Grössen, die Coefficienten der Producte von zwei verschiedenen Variabeln als doppelt genommene Grössen notirt, was auch schon bei den

binären quadratischen Formen geschehen ist. Es wird sich als vortheilhaft erweisen, festzusetzen, dass bei den mit zwei verschiedenen Zeigern versehenen Grössen eine Vertauschung der beiden Zeiger unter einander gestattet sein soll, so dass für zwei beliebige Zeiger λ und μ stets

(2) $$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$$

ist.

Wir werden zunächst das Resultat ermitteln, welches entsteht, sobald in die quadratische Form (1) statt jeder der n Variabeln x_λ ein *Aggregat von zwei beliebigen Grössen*

(3) $$x_\lambda + \xi_\lambda$$

substituirt wird. Die Form (1) ist, wie so eben bemerkt worden, ein Aggregat zweier verschiedener Gattungen von Gliedern, von denen die eine Gattung die Quadrate der Variabeln x_λ^2, die andere Gattung die Producte von zwei verschiedenen Variabeln $x_\lambda\, x_\mu$ enthält. Vermöge der angegebenen Substitution erzeugt das ursprüngliche Glied $a_{\lambda\lambda}\, x_\lambda^2$ die neuen Glieder

(4) $$a_{\lambda\lambda}\, x_\lambda^2 + 2a_{\lambda\lambda}\, x_\lambda\, \xi_\lambda + a_{\lambda\lambda}\, \xi_\lambda^2,$$

dagegen das ursprüngliche Glied $2a_{\lambda\mu}\, x_\lambda\, x_\mu$ die neuen Glieder

(5) $$2a_{\lambda\mu}\, x_\mu + 2a_{\lambda\mu}\, (x_\lambda\, \xi_\mu + \xi_\lambda\, x_\mu) + 2a_{\lambda\mu}\, \xi_\lambda\, \xi_\mu.$$

Zieht man jetzt alle neuen Glieder zusammen, welche nur die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten, dann alle diejenigen, welche nur die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ enthalten, und endlich alle diejenigen, in denen die einen wie die andern Grössen mit einander verbunden vorkommen, so erhält man erstens das Aggregat der Glieder $a_{\lambda\lambda}\, x_\lambda^2$ und $2a_{\lambda\mu}\, x_\lambda\, x_\mu$, das heisst die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ selbst; man erhält zweitens das Aggregat der Glieder $a_{\lambda\lambda}\, \xi_\lambda^2$ und $2a_{\lambda\mu}\, \xi_\lambda\, \xi_\mu$, das heisst den Werth der Form, welcher den Bestimmungen $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, .. $x_n = \xi_n$ entspricht und der durch $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ ausgedrückt werden kann; man erhält drittens den doppelten Werth des folgenden Aggregats, das in Bezug auf die Grössen $x_1, \ldots x_n$ vom *ersten Grade* und in Bezug auf die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ebenfalls vom *ersten Grade*, in Bezug auf beide Systeme von n Grössen zusammen jedoch, wie nicht anders möglich, vom *zweiten Grade* ist,

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}(x_1\xi_2+\xi_1x_2) + \dots + a_{1n}(x_1\xi_n+\xi_1x_n) \\
& \quad + a_{22}\,x_2\,\xi_2 \qquad + \dots + a_{2n}(x_2\xi_n+\xi_2x_n) \\
& \qquad\qquad\qquad + \;\dots\dots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}\,x_n\,\xi_n.
\end{aligned}
$$

Das Bildungsgesetz desselben wird leicht erkennbar, sobald das Aggregat durch die Anwendung der eingeführten Gleichungen $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ die Gestalt erhält

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad & \quad\; a_{11}x_1\xi_1 + a_{12}x_1\xi_1 + \dots + a_{1n}x_1\xi_n \\
& + a_{21}x_2\xi_1 + a_{22}x_2\xi_2 + \dots + a_{2n}x_2\xi_n \\
& + \;\dots\dots\dots\dots \\
& + a_{n1}x_n\xi_1 + a_{n2}x_n\xi_2 + \dots + a_{nn}x_n\xi_n.
\end{aligned}
$$

Die λte Horizontalreihe enthält das Product der Function des ersten Grades $a_{\lambda 1}\xi_1 + a_{\lambda 2}\xi_2 + \dots + a_{\lambda n}\xi_n$ mit der Grösse x_λ, die μte Vertikalreihe enthält das Product der Function des ersten Grades $a_{1\mu}x_1 + a_{2\mu}x_2 + \dots + a_{n\mu}x_n$ mit der Grösse ξ_μ; wegen der Gleichungen $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ *stimmen aber die Coefficienten der λten Horizontalreihe und der λten Vertikalreihe der Folge nach überein.* Wenn man daher die *n Functionen des ersten Grades* einführt

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & f_1(x_1, x_2, \dots x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
& f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& f_n(x_1, x_2, \dots x_n) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n,
\end{aligned}
$$

so folgt für das Aggregat (7) die doppelte Darstellung

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & f_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\,x_1 + \dots + f_n(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\,x_n \\
& = f_1(x_1, x_2, \dots x_n)\,\xi_1 + \dots + f_n(x_1, x_2, \dots x_n)\,\xi_n.
\end{aligned}
$$

Dieselbe lehrt zugleich, dass das Aggregat seinen Werth nicht ändert, sobald die Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ unter Beibehaltung der betreffenden Reihenfolge mit den Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ vertauscht werden. Für das Ergebniss der Substitution der Ausdrücke (3) in die gegebene Form findet sich, indem man die drei erwähnten Aggregate zusammenfasst, die Entwickelung

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & f(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, \dots x_n+\xi_n) \\
& \quad = f(x_1, x_2, \dots x_n) \\
& \quad + 2f_1(x_1, x_2, \dots x_n)\,\xi_1 + \dots + 2f_n(x_1, x_2, \dots x_n)\,\xi_n \\
& \quad + f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).
\end{aligned}
$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, sobald in dem Aggregat (7) die Grössen $\xi_1, \ldots \xi_n$ beziehungsweise den Grössen $x_1, \ldots x_n$ gleich gesetzt werden, die sämmtlichen Bestandtheile der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ erscheinen, und dass in Folge dessen die Gleichung gilt

$$(11) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)\, x_1 + \ldots + f_n(x_1, x_2 \ldots x_n)\, x_n.$$

Die Gleichungen (10) und (11) enthalten die Rechtfertigung dafür, dass in der zu untersuchenden quadratischen Form den Coefficienten der Producte von zwei verschiedenen Variabeln der Factor 2 beigelegt ist.

Eine Substitution, durch welche die gegebene quadratische Form der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ in eine quadratische Form der Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ übergeht und die eine *Substitution des ersten Grades* genannt wird, sei die folgende

$$(12) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}\, x'_1 + \gamma_{12}\, x'_2 + \ldots + \gamma_{1n}\, x'_n \\ x_2 &= \gamma_{21}\, x'_1 + \gamma_{22}\, x'_2 + \ldots + \gamma_{2n}\, x'_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \gamma_{n1}\, x'_1 + \gamma_{n2}\, x'_2 + \ldots + \gamma_{nn}\, x'_n; \end{aligned}$$

dabei wird vorausgesetzt, dass die Determinante Γ der n^2 Elemente $\gamma_{\lambda\mu}$ nicht gleich Null ist, jedoch keine andere Beschränkung als diese angenommen. Die Coefficienten der hervorgehenden Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ sollen aus den entsprechenden Coefficienten der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch Hinzufügung von Accenten erhalten werden, so dass

$$(13) \quad \begin{aligned} g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) = a'_{11} x'^2_1 + 2a'_{12} x'_1 x_2 &+ \ldots + 2a'_{1n} x'_1 x'_n \\ + \; a'_{22} x'^2_2 &+ \ldots + 2a'_{2n} x'_2 x'_n \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ \; a'_{nn} x'^2_n \end{aligned}$$

und wieder $a'_{\lambda\mu} = a'_{\mu\lambda}$ ist.

Vollständige Ausdrücke für die Coefficienten der Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ lassen sich auf Grund der Bemerkung finden, dass, wenn λ und μ irgend zwei von einander verschiedene Zeiger bedeuten, und wenn alle n Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ mit Ausnahme der beiden Variabeln x'_λ und x'_μ die Werthe Null erhalten, die Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ in die binäre Form

$$(14)\qquad a_{\lambda\lambda}\,x'^2_\lambda + 2\,a_{\lambda\mu}\,x'_\lambda\,x'_\mu + a_{\mu\mu}\,x'^2_\mu$$

übergeht. Wenn nun die sämmtlichen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ mit Ausnahme von x'_λ und x'_μ in den Gleichungen (12) gleich Null gesetzt werden, so verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden

$$(15)\qquad x_1 = \gamma_{1\lambda}\,x'_\lambda + \gamma_{1\mu}\,x'_\mu, \ldots x_n = \gamma_{n\lambda}\,x'_\lambda + \gamma_{n\mu}\,x'_\mu.$$

Das Resultat dieser speciellen Substitution kann aber aus der Gleichung (10) gezogen werden, und liefert dann bei der Vergleichung mit (14) die Ausdrücke von $a'_{\lambda\lambda}, a'_{\lambda\mu}, a'_{\mu\mu}$. Man erhält durch die Anwendung von (10) die Gleichung

$$(16)\qquad f(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda + \gamma_{1\mu}x'_\mu, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda + \gamma_{n\mu}x'_\mu) = f(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda)$$
$$+ 2f_1(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda)\,\gamma_{1\mu}x'_\mu + \ldots + 2f_n(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda)\,\gamma_{n\mu}x'_\mu$$
$$+ f(\gamma_{1\mu}x'_\mu, \cdots \gamma_{n\mu}x'_\mu).$$

Weil nun die ersten Bestandtheile der einzusetzenden Aggregate den gemeinsamen Theiler x'_λ, die zweiten Bestandtheile den gemeinsamen Theiler x'_μ haben, so tritt bei der Substitution der in Rede stehenden Producte in die homogenen Functionen des ersten Grades der gemeinsame Factor, und bei der Substitution in die homogene Function des zweiten Grades das Quadrat des gemeinsamen Factors als Factor heraus. Es wird deshalb

$$(17)\qquad \begin{aligned} f(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda) &= f(\gamma_{1\lambda}, \cdots \gamma_{n\lambda})\,x'^2_\lambda, \\ f_1(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda) &= f_1(\gamma_{1\lambda}, \cdots \gamma_{n\lambda})\,x'_\lambda, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_n(\gamma_{1\lambda}x'_\lambda, \cdots \gamma_{n\lambda}x'_\lambda) &= f_n(\gamma_{1\lambda}, \cdots \gamma_{n\lambda})\,x'_\lambda, \\ f(\gamma_{1\mu}x'_\mu, \cdots \gamma_{n\mu}x'_\mu) &= f(\gamma_{1\mu}, \cdots \gamma_{n\mu})\,x'^2_\mu, \end{aligned}$$

und die rechte Seite von (16) zerfällt von selbst in die drei Summanden $a_{\lambda\lambda}\,x'^2_\lambda$, $2\,a_{\lambda\mu}\,x'_\lambda\,x'_\mu$, $a_{\mu\mu}\,x'^2_\mu$. So gewinnen wir die Ausdrücke

$$(18)\qquad \begin{cases} a'_{\lambda\lambda} = f(\gamma_{1\lambda}, \gamma_{2\lambda}, \cdots \gamma_{n\lambda}) \\ a'_{\lambda\mu} = f_1(\gamma_{1\lambda}, \cdots \gamma_{n\lambda})\,\gamma_{1\mu} + \cdots + f_n(\gamma_{1\lambda}, \cdots \gamma_{n\lambda})\,\gamma_{n\mu} \\ a'_{\mu\mu} = f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \cdots \gamma_{n\mu}). \end{cases}$$

Wegen der Gleichung (9) existirt für die Grösse $a'_{\lambda\mu}$ auch der

zweite Ausdruck

(18*) $a'_{\lambda\mu} = f_1(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots \gamma_{n\mu})\, \gamma_{1\lambda} + \ldots + f_n(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots \gamma_{n\mu})\, \gamma_{n\lambda}$,

welcher aus dem zuerst angegebenen Ausdrucke durch Vertauschung der $\gamma_{1\lambda}, \gamma_{2\lambda}, \ldots \gamma_{n\lambda}$ mit den $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots \gamma_{n\mu}$ entsteht. Da ferner das Aggregat

$$f_1(\gamma_{1\lambda}, \ldots \gamma_{n\lambda})\, \gamma_{1\mu} + \ldots + f_n(\gamma_{1\lambda}, \ldots \gamma_{n,\lambda})\, \gamma_{n\mu}$$

vermöge der Gleichung (11) die Eigenschaft hat, sobald

$$\gamma_{1\mu} = \gamma_{1\lambda}, \ldots \gamma_{n\mu} = \gamma_{n\lambda}$$

genommen wird, gleich dem Ausdrucke $f(\gamma_{1\lambda}, \ldots \gamma_{n\lambda})$ zu werden, so ist die für $a'_{\lambda\mu}$ abgeleitete Darstellung nicht nur dann gültig, wenn λ und μ verschiedene Zeiger bedeuten, sondern auch dann, wenn $\lambda = \mu$ wird; sie gilt daher *für alle Combinationen zweier Zeiger ohne Ausnahme.* Ihre vollständige Entwickelung ist diese

(19)
$$\begin{aligned} &(a_{11}\gamma_{1\lambda} + a_{12}\gamma_{2\lambda} + \ldots + a_{1n}\gamma_{n\lambda})\, \gamma_{1\mu} \\ +\, &(a_{21}\gamma_{1\lambda} + a_{22}\gamma_{2\lambda} + \ldots + a_{2n}\gamma_{n\lambda})\, \gamma_{2\mu} \\ +\, &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\, &(a_{n1}\gamma_{1\lambda} + a_{n2}\gamma_{2\lambda} + \ldots + a_{nn}\gamma_{n\lambda})\, \gamma_{n\mu}. \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (8) wird ein System von n Functionen des ersten Grades der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ definirt, für das die in Betreff solcher Systeme in den früheren § gefundenen Resultate zur Anwendung gebracht werden können. Die Coefficienten der in Rede stehenden n Functionen bilden das System von n^2 Elementen

(20)
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix}$$

bei dem die Gleichungen (2)

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$$

bestehen. Denkt man sich in dem vorliegenden quadratisch geordneten Schema die Diagonale gezogen, welche absteigend von links nach rechts geht, so hat in Bezug auf diese die λte Horizontalreihe und die λte Vertikalreihe, in welchen die aufeinander folgenden Elemente beziehungsweise einander gleich sind,

dieselbe Lage. Man darf daher sagen, dass in dem Schema (20) je zwei Elemente, die zu der beschriebenen Diagonale eine gleiche relative Lage oder eine *symmetrische Lage* haben, einander gleich sind, und bezeichnet ein solches *System von Elementen* als ein *symmetrisches System von Elementen*, die zugehörige *Determinante* als eine *symmetrische Determinante*. Vermöge der bisherigen Definitionen sind $a_{11}, 2a_{12}, \ldots a_{nn}$ die Coefficienten der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ genannt worden. *Wenn aber nach dem Vorgange von Gauss die Grössen* $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ *die Coefficienten der Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *heissen, so besteht das symmetrische System* (20) *aus den Coefficienten der Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Die Determinante D *des Systems* (20) *wird die Determinante der quadratischen Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *genannt.* Nach § 75 sind die n Functionen des ersten Grades

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

dann und nur dann von einander unabhängig, wenn die Determinante D einen von Null verschiedenen Werth hat. Bei der binären quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ haben die Functionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ die Ausdrücke

$$f_1(x, y) = ax + by$$
$$f_2(x, y) = bx + cy,$$

und die Determinante D hat, wie in den vorhergehenden § den Ausdruck $ac - b^2$. Das System der beiden Functionen $ax + by$ und $bx + cy$ als solches ist daselbst nicht zur Verwendung gekommen, und es ist daher auch der Satz nicht ausgesprochen, dass die Unabhängigkeit dieser Functionen einen von Null verschiedenen Werth der Determinante $ac - b^2$ zur Bedingung habe.

Nach der aufgestellten Definition von D ist die Determinante D' der Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$, in welche die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch die Substitution (12) übergeht, gleich der Determinante des symmetrischen Schemas der zugehörigen Coefficienten

$$(21) \qquad \begin{array}{cccc} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \ldots & a'_{2n} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \ldots & a'_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} \ldots & a'_{nn}. \end{array}$$

Nun werden die Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ für jede Combination von Zeigern durch den Ausdruck (19) dargestellt. Dieser hat das in § 76 erörterte Bildungsgesetz, das auf der Combination der Horizontalreihen eines Schemas von n^2 Elementen mit den Vertikalreihen eines zweiten Schemas von n^2 Elementen beruht. Die λte Horizontalreihe des bei der Bildung von $a'_{\lambda\mu}$ anzuwendenden ersten Schemas ist diese

(22) $a_{11}\gamma_{1\lambda}+\ldots+a_{1n}\gamma_{n\lambda},\ a_{21}\gamma_{1\lambda}+\ldots+a_{2n}\gamma_{n\lambda},\ldots a_{n1}\gamma_{1\lambda}+\ldots+a_{nn}\gamma_{n\lambda},$

während das gleichzeitig anzuwendende zweite Schema

(23) $$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

aus den Coefficienten der Substitution (12) besteht. Nach dem Multiplicationssatze der Determinanten ist die Determinante D' der Elemente $a'_{\lambda\mu}$ gleich dem Product aus der Determinante des ersten Schemas und der Determinante Γ des zweiten Schemas. Die Elemente des bezeichneten ersten Schemas werden jedoch durch eine eben solche Combination der Schemata

(24) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

hervorgebracht, weshalb die Determinante des vorhin bezeichneten ersten Schemas gleich dem Product aus der Determinante D der Elemente $a_{\lambda\mu}$ und der Determinante Γ ist. Für die Determinante D' resultirt daher die Gleichung

(25) $$D' = \Gamma^2 D,$$

welche den Inhalt hat, *dass die Determinante der transformirten quadratischen Form gleich dem Product aus der Determinante der ursprünglichen Form und dem Quadrate der Determinante der Substitution ist.* Sie bildet eine Verallgemeinerung der Gleichung (28) des § 78.

Aus der Gleichung (25) folgt, dass vermöge einer Substitution (12), bei der die Determinante Γ von Null verschieden ist, eine quadratische Form, deren Determinante nicht ver-

schwindet, nur in eine quadratische Form übergeht, deren Determinante ebenfalls nicht verschwindet, und eine quadratische Form, deren Determinante verschwindet, nur in eine quadratische Form übergeht, deren Determinante verschwindet. Eigenschaften einer Form, welche bei der Anwendung einer Substitution von nicht verschwindender Determinante nicht verloren gehen sondern die gleichen Eigenschaften der transformirten Form hervorbringen, werden *unveränderliche* oder *invariable Eigenschaften der Form* genannt. Wenn also eine quadratische Form von beliebig vielen Variabeln eine von Null verschiedene Determinante hat, so ist diese Eigenschaft invariabel, und wenn eine quadratische Form von beliebig vielen Variabeln eine verschwindende Determinante hat, so ist diese Eigenschaft ebenfalls invariabel.

§ 82. Zurückführung einer quadratischen Form, deren Determinante gleich Null ist, auf eine quadratische Form, bei der die Anzahl der Variabeln den kleinsten möglichen Werth hat.

Der Unterschied zwischen den *binären quadratischen Formen*, deren Determinante nicht verschwindet, und denjenigen, deren Determinante verschwindet, ist in § 78 so ausgesprochen, dass *die beiden Factoren des ersten Grades, in welche eine binäre Form zerlegbar ist*, bei den erstern *wesentlich verschieden*, bei den andern *nicht wesentlich verschieden* sind. Eine ganze homogene Function des ersten Grades heisst aber von einer zweiten Function wesentlich verschieden, wenn es nicht möglich ist, die zweite aus der ersten durch Multiplication mit einer Constante abzuleiten, und nicht verschieden, wenn dies möglich ist. Aus diesem Grunde ist eine binäre quadratische Form, je nachdem ihre Determinante gleich Null oder nicht gleich Null ist, entweder gleich einem in eine Constante multiplicirten vollen Quadrate einer ganzen homogenen Function des ersten Grades oder sie kann einem solchen Ausdrucke nicht gleich werden. In dem ersteren Falle darf die Basis des zu bildenden Quadrats als eine einer gewissen Substitution entsprechende neue Variable betrachtet werden, und das Product der erwähnten Constante und des betreffenden Quadrats repräsentirt dann *eine quadratische Form, welche nur die eine neue Variable enthält.* Hierin

liegt eine Andeutung für die characteristische Eigenschaft der quadratischen Formen von mehr als zwei Variabeln, deren Determinante verschwindet. In einer quadratischen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ kommt eine bestimmte Variable x_λ nur in den Gliedern vor, deren Coefficienten mit $a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots a_{\lambda n}$ bezeichnet worden sind. Wenn daher in einer Form die betreffenden n Coefficienten gleich Null werden, so fällt die Variable x_λ überhaupt aus der Form heraus, und nur die übrigen $n-1$ Variabeln können noch auftreten. Unter der erwähnten Voraussetzung besteht in dem Schema der Coefficienten der Form

$$(1) \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

die λte Horizontalreihe aus lauter verschwindenden Elementen und, weil das System ein symmetrisches ist, die λte Vertikalreihe ebenfalls. Vergegenwärtigt man sich nun das Bildungsgesetz der Determinante D eines Systems von n^2 Elementen, und namentlich die Gleichung (6) des § 74, nach welcher D entsteht, indem man zu den Elementen einer beliebigen Reihe des Schemas die betreffenden adjungirten Elemente aufstellt, jedes Element mit dem zugehörigen adjungirten Element multiplicirt und die Summe der Producte nimmt, so leuchtet ein, dass, weil vermöge der bezeichneten Bedingung eine Reihe des Schemas aus verschwindenden Elementen besteht, die Determinante D selbst verschwinden muss. *Eine quadratische Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, in welcher eine der n Variabeln fehlt, hat daher nothwendig eine verschwindende Determinante.* Wenn man eine solche Form durch die Anwendung einer beliebigen Substitution (12) des vorigen § in eine Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ transformirt, so ist nach den Schlüssen desselben § die Determinante derselben D' ebenfalls gleich Null. Hierauf stützt sich *der Satz, dass, wenn es möglich ist, eine gegebene quadratische Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante in eine quadratische Form zu transformiren, welche eine Variable weniger enthält, die Determinante D der gegebenen Form gleich Null sein muss.* Wenn die Substitution (12)

des vorigen § eine solche Transformation hervorruft, so werden, da die Determinante Γ nicht gleich Null sein darf, sobald man die adjungirten Elemente des Systems in der früher angewendeten Weise mit $\Gamma_{\varrho\sigma}$ bezeichnet, die Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ folgendermassen durch die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt

$$(2)\qquad x'_1 = \frac{\Gamma_{11}x_1 + \Gamma_{21}x_2 + \ldots + \Gamma_{n1}x_n}{\Gamma}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x'_2 = \frac{\Gamma_{1n}x_1 + \Gamma_{2n}x_2 + \ldots + \Gamma_{nn}x_n}{\Gamma},$$

und diese Gleichungen bewerkstelligen den Uebergang von der Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ zu der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Wenn nun nach der obwaltenden Voraussetzung in der Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ eine der n Variabeln fehlt, so verschwindet, wie gezeigt worden, ihre Determinante D', und in Folge dessen auch die Determinante D der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Wir sind von der Betrachtung solcher Formen $f(x_1, x_2, .. x_n)$ ausgegangen, in denen eine der n Variablen fehlt, und fanden als ihr Merkmal das Verschwinden der Determinante D. Sobald in der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *zwei Variabeln* x_λ und $x_{\lambda'}$ fehlen, so verschwinden in dem entsprechenden Schema der Coefficienten (1) alle Elemente in den betreffenden zwei Horizontalreihen und in den zwei gleichnamigen Vertikalreihen. Weil aber die sämmtlichen *zu dem Schema gehörenden partiellen Determinanten des* $(n-1)$*ten Grades* erhalten werden, indem man eine beliebige Horizontalreihe und eine beliebige Vertikalreihe fortlässt, so bleibt unter der in Rede stehenden Bedingung immer noch eine Horizontalreihe und eine Vertikalreihe vorhanden, deren sämmtliche Elemente gleich Null sind, und *die sämmtlichen partiellen Determinanten des* $(n-1)$*ten Grades müssen gleich Null sein.* Auf gleiche Weise überzeugt man sich, dass, *wofern in der Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *die Anzahl* k *von Variabeln herausfällt, bei dem entsprechenden Schema der Coefficienten* (1) *in* k *bestimmten Horizontalreihen und in den gleichnamigen* k *Vertikalreihen alle Elemente gleich Null werden, und in Folge dessen die Determinante* D *sammt allen zugehörigen partiellen Determinanten des* $(n-1)$*ten Grades,* $(n-2)$*ten Grades, u. s. w. bis zu dem* $(n-k+1)$*ten Grade einschliesslich verschwindet.* Die übrig blei-

benden $n-k$ Horizontalreihen und $n-k$ Vertikalreihen des Schemas (1) liefern eine partielle Determinante des $(n-k)$ten Grades, welche $\varDelta$ heissen möge.

Wenn man eine solche Form, die nur $n-k$ Variabeln wirklich enthält, durch eine Substitution wie die Substitution (12) des vorigen § transformirt, so fallen in der dort gegebenen und mit (19) bezeichneten allgemeinen Darstellung der Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ diejenigen Glieder heraus, welche in verschwindende Coefficienten der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ multiplicirt sind, und es bleiben in jeder Horizontalreihe und in jeder Vertikalreihe nur die $n-k$ Glieder, welche in die übrigen Coefficienten multiplicirt sind. Wird jetzt eine beliebige zu dem Schema

$$(3)\qquad \begin{array}{cccc} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{array}$$

gehörende partielle Determinante des $(n-k)$ten Grades untersucht, so folgt durch die in dem vorigen § benutzten Schlusse, dass jede solche partielle Determinante entsteht, indem die zu dem Schema (1) gehörende mit $\varDelta$ bezeichnete partielle Determinante des $(n-k)$ten Grades mit dem Product von zwei bestimmten partiellen Determinanten des $(n-k)$ten Grades, welche dem Schema der Substitutionscoefficienten $\gamma_{\varrho\sigma}$ angehören, multiplicirt wird.

Wenn daher die partielle Determinante des $(n-k)$ten Grades $\varDelta$ den Werth Null hat, so verschwinden die sämmtlichen partiellen Determinanten des $(n-k)$ten Grades, die aus dem Schema (3) gebildet werden können, und weil sich die partiellen Determinanten des $(n-k+1)$ten, $(n-k+2)$ten Grades u. s. f. bis zu der Determinante D' selbst respective aus den partiellen Determinanten des $(n-k)$ten, $(n-k+1)$ten Grades u. s. f. bis zum $(n-1)$ten Grade durch Multiplication mit passend gewähltem Elementen und hierauf erfolgende Addition der Producte zusammensetzen, so verschwinden alsdann die sämmtlichen zu dem Schema (3) gehörenden partiellen Determinanten des $(n-k)$ten, $(n-k+1)$ten Grades u. s. f. bis zu der Determinante D' selbst.

Betrachten wir *eine Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, *bei welcher die*

Anzahl l von Variabeln fehlt, so kann dieselbe auch unter die Formen gezählt werden, bei denen $l-1$ Variabeln fehlen, und es ist erlaubt, in der so eben angestellten Erörterung der Anzahl k den Werth $l-1$ beizulegen. Die partielle Determinante des $(n-k)$ten Grades Δ ist dann gleich einer partiellen Determinante des $(n-l+1)$ten Grades des der gegebenen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zugehörigen Schemas (1), und hat, weil in diesem Schema vermöge der getroffenen Voraussetzuug l Horizontalreihen und l Vertikalreihen verschwindende Elemente zeigen, aus den vorhin entwickelten Gründen den Werth Null. Es tritt deshalb der zuletzt bewiesene Satz in Kraft, bei dem die Determinante Δ gleich Null vorausgesetzt wird, und wir ziehen den Schluss, *dass, wenn eine Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, *in welcher l Variabeln fehlen, durch eine beliebige Substitution des ersten Grades in eine Form* $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ *transformirt wird, für das dieser Form zugehörende Schema* (3) *die Determinante D' und alle partiellen Determinanten des* $(n-1)$*ten*, $(n-2)$*ten Grades u. s. f. bis zu dem* $(n-l+1)$*ten Grade einschliesslich verschwinden.* Hieraus wird durch Erwägungen, welche den zu einem entsprechenden Zwecke bereits angestellten vollkommen ähnlich sind, *der Satz* abgeleitet, *dass, wenn es möglich ist, eine gegebene quadratische Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante in eine quadratische Form zu verwandeln, welche nur $n-l$ Variabeln enthält, für das der gegebenen Form zugehörende symmetrische Schema die Determinante D und alle partiellen Determinanten des* $(n-1)$*ten*, $(n-2)$*ten Grades u. s. f. bis zu dem* $(n-l+1)$*ten Grade einschliesslich verschwinden müssen.*

Wir denken uns jetzt eine Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gegeben, welche die Eigenschaft hat, dass für das derselben zugehörende Schema (1) sowohl die Determinante D wie auch alle partiellen Determinanten der niedrigeren Grade bis zu dem $(n-l+1)$ten Grade inclusive verschwinden, dagegen irgend eine partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades nicht verschwindet, und werden durch die That beweisen, dass sich eine solche Form durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante in eine Form von $(n-l)$ Variabeln trans-

formiren lässt. Ein geeignetes Mittel bietet die Gleichung (10) des vorigen §, welche, sobald vermöge der dortigen Gleichung (9) statt der Functionen $f_1(x_1, x_2, \dots x_n), \dots f_n(x_1, x_2, \dots x_n)$ die Functionen $f_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n), \dots f_n(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ eingeführt werden und ferner vermöge der dortigen Gleichung (11) die Function $f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ durch das Aggregat

$$f_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\,\xi_1 + \dots + f_n(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\,\xi_n$$

ersetzt wird, die folgende Gestalt annimmt

$$(4) \qquad \begin{aligned} & f(x_1+\xi_1,\ x_2+\xi_2, \dots x_n+\xi_n) \\ &= f(x_1, x_2, \dots x_n) \\ &+ 2f_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\,x_1 + \dots + 2f_n(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n)\,x_n \\ &+ f_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)\,\xi_1 + \dots + f_n(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n)\,\xi_n. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lehrt, dass, sobald es möglich ist, den Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ Werthe beizulegen, durch welche die n Functionen $f_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ zugleich verschwinden, hiedurch auf der rechten Seite von (4) alle Bestandtheile mit Ausnahme des ersten Bestandtheils $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ zum Verschwinden gebracht werden und die Gleichung

$$(5) \qquad f(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, \dots x_n+\xi_n) = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

hervorgeht. Die zu diesem Behufe zu erfüllenden Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + \dots + a_{1n}\,\xi_n = 0 \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + \dots + a_{2n}\,\xi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = a_{n1}\,\xi_1 + a_{n2}\,\xi_2 + \dots + a_{nn}\,\xi_n = 0 \end{cases}$$

würden in dem Falle, dass die Determinante D von Null verschieden wäre, keine andere Auflösung zulassen als die Auflösung $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0, \dots \xi_n = 0$, und die Gleichung (5) würde inhaltlos bleiben. Unter der geltenden Voraussetzung, dass die Determinante D gleich Null ist, und die sämmtlichen partiellen Determinanten bis zu dem $(n-l+1)$ten Grade gleich Null sind, eine partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades aber nicht verschwindet, gehört das aufzulösende System von Gleichungen (6) zu den Systemen von Gleichungen, die in § 75 mit (14) bezeichnet sind, deren Auflösung immer möglich und daselbst in vollständiger Allgemeinheit vorgetragen ist.

Wenn eine von Null verschiedene partielle Determinante des $(n-l)$ten Grades dadurch erhalten wird, dass man in dem

Schema der Coefficienten (1) die l Horizontalreihen mit den Zeigern $\lambda_{n-l+1}, \lambda_{n-l+2}, \ldots \lambda_n$ und die l Vertikalreihen mit den Zeigern $\mu_{n-l+1}, \mu_{n-l+2}, \ldots \mu_n$ fortlässt, so können in der angeführten Auflösung die Werthe der l Unbekannten

$$\xi_{\mu_{n-l+1}}, \xi_{\mu_{n-l+2}}, \ldots \xi_{\mu_n}$$

vollkommen willkürlich angenommen werden, und die übrigen $n-l$ Unbekannten, die mit $\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2}, \ldots \xi_{\mu_{n-l}}$ bezeichnet werden mögen, sind gleich durchaus bestimmten ganzen homogenen Functionen des ersten Grades von den ersten l Grössen. Es steht jetzt nichts im Wege, über diese so zu verfügen, dass sie den negativ genommenen mit den entsprechenden Zeigern versehenen Variabeln der gegebenen Form gleich werden, oder dass sie den Gleichungen

(7) $x_{\mu_{n-l+1}} + \xi_{\mu_{n-l+1}} = 0, \; x_{\mu_{n-l+2}} + \xi_{\mu_{n-l+2}} = 0, \ldots x_{\mu_n} + \xi_{\mu_n} = 0$

genügen. Dann verwandeln sich die Ausdrücke der Grössen $\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2}, \ldots \xi_{\mu_{n-l}}$ in bestimmte ganze homogene Functionen des ersten Grades von den Variabeln $x_{\mu_{n-l+1}}, \ldots x_{\mu_n}$. Gleichzeitig erhellt, dass die Gleichung (5) eine Umformung der Function $f(x_1, \ldots x_n)$ liefert

(8) $$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1 + \xi_1, \ldots x_n + \xi_n),$$

die für alle Werthsysteme der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gilt, und bei der von den auf der rechten Seite anzuwendenden Argumenten $x_1 + \xi_1, \ldots x_n + \xi_n$, diejenigen, welche zu den Zeigern $\mu_{n-l+1}, \mu_{n-l+2}, \ldots \mu_n$ gehören, verschwinden, die übrigen aber, welche zu den Zeigern $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-l}$ gehören, ganze homogene Functionen des ersten Grades der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. *Die rechte Seite der Gleichung* (8) *ist eine quadratische Form von $n-l$ Variabeln, und zwar diejenige Form, welche abgesehen von den für die Variabeln zu substituirenden Werthen aus der gegebenen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ entsteht, indem die Coefficienten der Variabeln $x_{\mu_{n-l+1}}, x_{\mu_{n-l+2}}, \ldots x_{\mu_n}$ gleich Null gesetzt werden. Die erwähnte Transformation der gegebenen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in eine Form von $n-l$ Variabeln ist hiemit vollzogen.*

Wenn man auch in diesem Falle die Variabeln der transformirten Form mit $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ bezeichnet, so ist zu beden-

ken, dass in der letzten Form nur $n-l$ Variabeln wirklich vorkommen. Wird die Annahme hinzugefügt, dass die in der transformirten Form nicht vorkommenden l Variabeln bei der zu Grunde liegenden Substitution ungeändert bleiben sollen, so ist das System von Gleichungen, welches die Transformation (8) herbeiführt, wie leicht zu erkennen, das folgende

$$(9)\quad x_{\mu_1}+\xi_{\mu_1}=x'_{\mu_1},\; x_{\mu_2}+\xi_{\mu_2}=x'_{\mu_2},\ldots x_{\mu_{n-l}}+\xi_{\mu_{n-l}}=x'_{\mu_{n-l}},$$
$$x_{\mu_{n-l+1}}=x'_{\mu_{n-l+1}},\;\ldots\; x_{\mu_n}=x'_{\mu_n}.$$

In demselben sind die neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ durch die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt, so dass dasselbe dem obigen System (2) entspricht. Eine eindeutige Darstellung der ursprünglichen Variabeln durch die neuen Variabeln ergiebt sich aus (9) unmittelbar, weil die Grössen $\xi_{\mu_1}, \ldots \xi_{\mu_{n-l}}$ ganze homogene Functionen der Grössen $x_{\mu_{n-l+1}}, \ldots x_{\mu_n}$ *allein* sind und sich in genau die gleichen Functionen der Grössen $x'_{\mu_{n-l+1}}, \ldots x'_{\mu_n}$ umsetzen; daher ist die Determinante derjenigen Substitution, welche die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ ausdrückt, keinenfalls gleich Null und insofern von der vorhin supponirten Beschaffenheit.

Eine quadratische Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von den bezeichneten Eigenschaften kann durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante unmöglich in eine Form von $n-l$ Variabeln, deren in Bezug auf die letztern genommene Determinante gleich Null ist, und ebenso wenig in eine Form von weniger als $n-l$ Variabeln transformirt werden. Denn aus beiden Voraussetzungen würde mit Hülfe der bewiesenen Sätze folgen, dass für das der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zugehörige System (1) alle partiellen Determinanten bis zu der $(n-l)$ten Ordnung einschliesslich gleich Null sein müssen, was der getroffenen Annahme widerstreitet. Hieraus folgt auch, dass die Determinante derjenigen Form von $n-l$ Variabeln, welche durch die rechte Seite der obigen Gleichung (8) angedeutet ist, nicht gleich Null sein kann. Diese Determinante ist, wie sich leicht ergiebt, diejenige partielle Determinante des zu der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gehörigen Schemas (1), die durch das Weglas-

sen der horizontalen und vertikalen Reihe von den Zeigern $\mu_{n-l+1}, \mu_{n-l+2}, \ldots \mu_{n-l+n}$ bestimmt wird. Da das System (1) symmetrisch ist, so bleibt durch das Weglassen von gleichnamigen horizontalen und vertikalen Reihen ein symmetrisches Schema übrig, und die zugehörige partielle Determinante ist ebenfalls symmetrisch. Es zeigt sich also, *dass bei einer Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *von der vorausgesetzten Beschaffenheit wenigstens eine von Null verschiedene symmetrische partielle Determinante des* $(n-l)$*ten Grades vorhanden sein muss.* Fasst man nun alles bisherige zusammen, so entsteht der Satz: *Damit eine gegegebene quadratische Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *durch eine Substitution des ersten Grades von nicht verschwindender Determinante in eine quadratische Form verwandelt werden kann, die* $n-l$ *Variabeln enthält, und in keine Form einer geringeren Anzahl von Variabeln verwandelt werden kann, ist es nothwendig und hinreichend, dass für das der gegebenen Form zugehörende Schema die Determinante* D *und alle partiellen Determinanten des* $(n-1)$*ten,* $(n-2)$*ten Grades, bis zu dem* $(n-l+1)$*ten Grade einschliesslich verschwinden, jedoch nicht alle partiellen Determinanten des* $(n-l)$*ten Grades verschwinden.*

Dieser Satz schliesst auch die Antwort auf die Frage in sich, *unter welchen Bedingungen eine quadratische Form von* n *Variabeln gleich einem Product von zwei ganzen homogenen Functionen ersten Grades, das ist, zerlegbar sei.* Hier existiren zwei Fälle: die beiden Functionen des ersten Grades, in welche die Form zerfällt, sind entweder von einander wesentlich different oder sie sind es nicht. In dem ersten Falle muss die gegebene Form in das mit *einer Constante multiplicirte Quadrat einer neuen Variable,* in dem zweiten Falle in das *mit einer Constante multiplicirte Product von zwei neuen Variabeln, oder, was dasselbe ist, in eine binäre Form* übergehen. Damit der erste Fall eintrete, müssen für das Schema der gegebenen Form alle partiellen Determinanten bis zu dem zweiten Grade einschliesslich verschwinden, und dürfen nur nicht alle Coefficienten der Form gleich Null sein. Damit der zweite Fall eintrete, müssen für das Schema der gegebenen Form alle partiellen Determinanten bis zu dem dritten Grade einschliesslich verschwinden, und dürfen nicht alle partiellen Determinanten des zweiten Grades gleich Null sein. Es ist hiernach jede quadratische Form *nicht zer-*

legbar, bei welcher nicht alle partiellen Determinanten bis zu dem dritten Grade einschliesslich verschwinden. Werden die quadratischen Formen nach der Anzahl ihrer Variabeln geordnet, so beginnt die Reihe *der nicht zerlegbaren quadratischen Formen* mit der *ternären quadratischen Form, deren Determinante nicht gleich Null ist.*

§ 83. Zusammenhang einer quadratischen Form mit der zu ihr adjungirten quadratischen Form.

Bei den quadratischen Formen $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, deren Determinante D nicht gleich Null ist, bilden die n Functionen des ersten Grades $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$, wie in § 81 bemerkt, ein System von unabhängigen Functionen. Diese können deshalb als *neue Variable* $X_1, X_2, \ldots X_n$ in die Form eingeführt werden, wobei die Gleichungen gelten

$$(1)\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Wenn die vorstehenden n Gleichungen nach den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgelöst werden sollen, so dienen hiezu die adjungirten Elemente des Systems der Coefficienten der Form, und zwar möge, ähnlich wie früher, das adjungirte Element $A_{\lambda\mu}$ mit dem Element $a_{\lambda\mu}$ correspondiren. Da die Coefficienten der Form vermöge der Gleichungen $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ ein symmetrisches System bilden, so erhellt aus der Entstehungsweise der adjungirten Elemente, dass dieselben ebenfalls ein symmetrisches System bilden und die Gleichungen

$$(2)\qquad A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}$$

erfüllen. Die in Rede stehende Auflösung des Systems (1) wird jetzt die folgende

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}X_1 + A_{21}X_2 + \ldots + A_{n1}X_n}{D} \\ x_2 &= \frac{A_{12}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{n2}X_n}{D} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{A_{1n}X_1 + A_{2n}X_2 + \ldots + A_{nn}X_n}{D}. \end{aligned}$$

Die Transformation der Form $f(x_1, x_2, .. x_n)$ lässt sich sehr bequem aus der Gleichung (11) des § 81 herleiten, welche, sobald statt der Functionen $f_1(x_1, x_2, .. x_n), .. f_n(x_1, x_2, .. x_n)$ die neuen Variabeln $X_1, X_2, .. X_n$ gesetzt werden, in die folgende übergeht

$$(4) \qquad f(x_1, x_2, .. x_n) = X_1 x_1 + X_2 x_2 + .. + X_n x_n.$$

Wenn die linken Seiten der Gleichungen (3) respective mit $X_1, X_2, .. X_n$ multiplicirt und hierauf die Producte addirt werden, so resultirt hier vermöge der vorstehenden Gleichung (4) die Form $f(x_1, x_2, ... x_n)$, die rechte Seite ist dagegen gleich einer quadratischen Form der neuen Variabeln $X_1, X_2, .. X_n$, bei welcher das Quadrat X_λ^2 den Coefficienten $\frac{A_{\lambda\lambda}}{D}$, das doppelte Product von zwei verschiedenen Variabeln $2 X_\lambda X_\mu$ den Coefficienten $\frac{A_{\lambda\mu}}{D} = \frac{A_{\mu\lambda}}{D}$ hat. Die *mit den adjungirten Elementen als Coefficienten gebildete Form*

$$(5) \quad \begin{aligned} F(X_1, X_2, .. X_n) = A_{11} X_1^2 + 2 A_{12} X_1 X_2 &+ .. + 2 A_{1n} X_1 X_n \\ + \ A_{22} X_2^2 \quad &+ .. + 2 A_{2n} X_2 X_n \\ &+ \ldots\ldots \\ &\quad + \ A_{nn} X_n^2 \end{aligned}$$

wird nach dem Vorgange von *Gauss die zu der Form* $f(x_1, x_2, ., x_n)$ *adjungirte quadratische Form* genannt. Vermöge dieser Bezeichnung hat *die gefundene Transformationsgleichung* den Ausdruck

$$(6) \qquad f(x_1, x_2, .. x_n) = \frac{1}{D} F(X_1, X_2, .. X_n).$$

Die in Betreff der adjungirten Elemente eines Schemas von n^2 Elementen in § 77 nachgewiesenen Sätze finden hier eine Anwendung. Die aus den adjungirten Elementen $A_{\lambda\mu}$ gebildete Determinante ist gleich der $(n-1)$ten Potenz der Determinante D der Elemente $a_{\lambda\mu}$; ferner sind die zu den Elementen $A_{\lambda\mu}$ zugehörigen adjungirten Elemente gleich den Producten aus den bezüglichen ursprünglichen Elementen und der $(n-2)$ten Potenz der Determinante D. Aus diesen Gründen *ist die Determinante der zu der Form* $f(x_1, x_2, .. x_n)$ *adjungirten Form* $F(X_1, X_2, .. X_n)$ *gleich der Potenz* D^{n-1}, *und die zu der*

Form $F(X_1, X_2, .. X_n)$ *adjungirte Form gleich der in die Potenz* D^{n-2} *multiplicirten ursprünglichen Form* $f(x_1, x_2, .. x_n)$. Eine Erörterung darüber, wie sich, sobald die Form $f(x_1, x_2, .. x_n)$ vermöge einer beliebigen Substitution des ersten Grades in eine Form $g(x'_1, x'_2, .. x'_n)$ der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, .. x'_n$ transformirt wird, die adjungirte Form der ursprünglichen Form zu der adjungirten Form der transformirten Form verhalte, unterdrücken wir der Kürze wegen.

§ 84. Verwandlung einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten, die mit constanten Factoren multiplicirt sind. Aufstellung der Criterien dafür, dass eine quadratische Form, deren Coefficienten reell sind, wesentlich positiv oder wesentlich negativ oder keines von beiden sei.

Von jetzt ab möge vorausgesetzt werden, dass die Coefficienten einer gegebenen quadratischen Form $f(x_1, x_2, .. x_n)$ reelle Grössen seien, und dass den Variabeln $x_1, x_2, .. x_n$ nur reelle Werthe beigelegt werden. *Eine quadratische Form von n Variabeln, welche für alle möglichen reellen Werthsysteme der Variabeln Werthe von demselben Vorzeichen annimmt und die nur verschwindet, wenn jede einzelne der n Variabeln gleich Null gesetzt wird, heisst, sobald dieselbe nur positive Werthe erhalten kann, eine wesentlich positive Form, sobald sie nur negative Werthe erhalten kann, eine wesentlich negative Form.* Ein Beispiel einer wesentlich positiven Form liefert *die Summe der Quadrate der n Variabeln*

(1) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Eine wesentlich negative Form geht durch die Multiplication mit der negativen Einheit in eine wesentlich positive Form über, und umgekehrt; deshalb genügt es, die wesentlich positiven Formen allein eingehend zu erörtern. Vor allen Dingen bedarf es der *Aufstellung der Criterien, welche darüber entscheiden, ob eine gegebene quadratische Form von n Variabeln wesentlich positiv, wesentlich negativ oder keines von beiden sei.* Wir wollen diese Criterien in der Gestalt auseinandersetzen, in welcher *Lagrange* dieselben in dem 11ten Capitel des zweiten Theiles seiner *théorie des fonctions analytiques* entwickelt hat.

Dieselbe Gestalt hat *Gauss* bei Gelegenheit mehrfacher An-

wendungen beibehalten. Eine Hauptursache, weshalb wir uns an das von *Lagrange* mitgetheilte Verfahren genau anschliessen, liegt aber darin, dass *Lagrange* das gesteckte Ziel mit einem sehr geringen Aufwande von Mitteln erreicht. Seine Methode hat den Apparat der Rechnung mit Determinanten nicht nöthig, und je mehr wir davon überzeugt sind, dass die zu beantwortende Frage eine mathematische Frage vom ersten Range sei, um so höher müssen wir eine Lösung schätzen, welche den Anfangsgründen der Wissenschaft so nahe bleibt. Wir gehen jetzt zu der Behandlung der Frage selbst über.

Wenn die quadratische Form

$$(2)\qquad \begin{aligned} f(x_1, x_2, .. x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ \quad a_{22}x_2^2 \quad + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\qquad\qquad + \dots\dots \\ &\qquad\qquad\qquad + \quad a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

wesentlich positiv oder wesentlich negativ ist, so kann, wie sich sogleich zeigen wird, der Coefficient a_{11} nicht gleich Null sein. Gesetzt er wäre gleich Null, so würde die Form gleich der Summe des Aggregats derjenigen Glieder sein, die in der vorliegenden Anordnung auf das erste Glied folgend die erste Zeile bilden und sämmtlich den Factor x_1 haben, und des Aggregats der übrigen Glieder, welche eine quadratische Form $\varphi(x_2, \dots x_n)$ von den $(n-1)$ Variabeln $x_2, \dots x_n$ ausmachen. Bei dem ersten Aggregat, welches sich als das Product

$$(2^*)\qquad (2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 + .. + 2a_{1n}x_n)\,x_1$$

darstellen lässt, können nicht alle Coefficienten $a_{12}, a_{13}, \dots a_{1n}$ gleich Null sein. In diesem Falle wäre nämlich eine Form $f(x_1, \dots x_n)$, bei der der Coefficient a_{11} schon gleich Null ist, gleich der Form von $(n-1)$ Variabeln $\varphi(x_2, \dots x_n)$, und das widerspräche der für eine wesentlich positive oder wesentlich negative Form aufgestellten Definition; denn selbst dann, wenn die Form $\varphi(x_2, .. x_n)$ nur dadurch verschwinden könnte, dass $x_2, x_3, .. x_n$ sämmtlich verschwinden, würde die Variable x_1, welche in der Form $f(x_1, x_2, .. x_n)$ nicht vorkommt, vollkommen frei bleiben, und es existirten ausser dem *einen Werthsystem* $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots x_n = 0$, *unbeschränkt viele Werthsysteme* $x_1 = \xi_1$,

$x_2 = 0, x_3 = 0, .. x_n = 0$, die der Form $f(x_1, x_2, ... x_n)$ den Werth Null verleihen. Sobald aber nicht alle Coefficienten $a_{12}, a_{13}, .. a_{1n}$ gleich Null sind, so lassen sich offenbar die Werthe $x_2, x_3, ... x_n$ so wählen, dass der Ausdruck

$$a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + .. + a_{1n}\,x_n$$

einen *von Null verschiedenen Werth* ω annimmt, und hiebei erhält auch die Form $\varphi(x_2, ... x_n)$ einen bestimmten Werth. Da auf diese Weise

(3) $$f(x_1, x_2, ... x_n) = 2\,\omega\,x_1 + \varphi(x_2, ... x_n)$$

wird, da ferner der Werth der Variable x_1 noch disponibel bleibt und nach Belieben so eingerichtet werden kann, dass das Product $2\,\omega\,x_1$ positiv oder auch so, dass dasselbe negativ wird, und dass in beiden Fällen das Aggregat $2\,\omega\,x_1 + \varphi(x_2, .. x_n)$ mit dem Producte $2\,\omega\,x_1$ dasselbe Vorzeichen behält, so erhielte die Form $f(x_1, x_2, .. x_n)$ unter der gegenwärtigen Annahme ebensowohl positive als negative Werthe, was gegen die characteristische Eigenschaft einer wesentlich positiven oder wesentlich negativen Form verstösst. Mithin darf bei einer solchen Form der Coefficient a_{11} nicht gleich Null sein, und das war behauptet worden.

Auf diesen Umstand gründet sich das Verfahren, die Form $f(x_1, x_2, .. x_n)$ als ein Aggregat auszudrücken, bei dem der eine Bestandtheil ein durch den Coefficienten a_{11} dividirtes Quadrat einer Function des ersten Grades aller n Variabeln, der andere Bestandtheil aber eine quadratische Form der $n-1$ Variabeln $x_2, x_3, ... x_n$ ist. In der gegebenen Form kommt das Quadrat von x_1 in dem Gliede $a_{11}\,x_1^2$ und die Variable x_1 ausserdem nur noch in dem obigen Product (2*) vor. Wenn nun das Quadrat des Ausdruckes $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + .. + a_{1n}\,x_n$ genommen wird, so entsteht die Entwickelung

(4) $$(a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}\,x_n)^2$$
$$= a_{11}^2 x_1^2 + 2\,a_{11}\,x_1\,(a_{12}\,x_2 + .. + a_{1n}\,x_n) + (a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}\,x_n)^2,$$

welche sich aus dem mit dem Factor a_{11} multiplicirten Gliede $a_{11}\,x_1^2$, aus dem mit dem Factor a_{11} multiplicirten Producte (2*), und aus dem Quadrate einer Function des ersten Grades zu-

sammensetzt, die nur die Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ enthält. Dividirt man die beiden Seiten von (4) durch den Coefficienten a_{11}, so stimmen die Glieder der rechten Seite, in denen die Variable x_1 vorkommt, mit den Gliedern der gegebenen Form, in denen die Variable x_1 vorkommt, vollständig überein, und die Subtraction des Ausdruckes $\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n)^2$ von der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ergiebt das Resultat

$$(5) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 \\ + f^{(1)}(x_2, x_3, \ldots x_n),$$

wo sich die Coefficienten der neuen quadratischen Form $f^{(1)}(x_2, x_3, \ldots x_n)$ durch die Ausführung der Rechnung folgendermassen bestimmen

$$(6) \quad \begin{aligned} f^{(1)}(x_2, x_3, \ldots x_n) = a_{22}^{(1)}x_2^2 &+ 2a_{23}^{(1)}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}^{(1)}x_2x_n \\ &+ a_{33}^{(1)}x_3^2 \quad + \ldots + 2a_{3n}^{(1)}x_3x_n \\ &\qquad + \ldots \\ &\qquad\qquad + a_{nn}^{(1)}x_n^2. \end{aligned}$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \\ a_{23}^{(1)} &= \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}} \\ &\vdots \\ a_{2n}^{(1)} &= \frac{a_{11}a_{2n} - a_{12}a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{33}^{(1)} &= \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}} \\ &\vdots \\ a_{3n}^{(1)} &= \frac{a_{11}a_{3n} - a_{13}a_{1n}}{a_{11}} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(1)} &= \frac{a_{11}a_{nn} - a_{1n}^2}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Bei der Darstellung der gegebenen Form in (5) fällt die Basis des auftretenden Quadrats mit der Function des ersten

Grades zusammen, die früher $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ genannt worden ist. Ferner muss beachtet werden, dass, weil der Coefficient a_{11} gegenwärtig einen von Null verschiedenen Werth hat, der in Rede stehende Ausdruck

$$(8) \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = u_1$$

nicht allein von den Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ abhängt, das heisst jeden beliebigen Werth erhalten kann, wie auch immer die Werthe von $x_2, x_3, \ldots x_n$ gewählt werden mögen. Es wird mithin die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vermöge (5) in eine Form der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ verwandelt

$$(9) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{u_1^2}{a_{11}} + f^{(1)}(x_2, \ldots x_n),$$

welche *die Variable u_1 nur in ihrem Quadrate* enthält.

Die Form $f^{(1)}(x_2, \ldots x_n)$ ist jetzt derselben Behandlung fähig wie die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, wofern es unmöglich ist, dass der Coefficient $a_{22}^{(1)}$ von x_2^2 verschwinde. Von dieser Eigenschaft des Coefficienten $a_{22}^{(1)}$ kann man sich aber durch eine ähnliche Betrachtung überzeugen, wie sie in Betreff des Coefficienten a_{11} angestellt worden ist. Wenn $a_{22}^{(1)}$ gleich Null wäre und gleichzeitig die Coefficienten $a_{23}^{(1)}, \ldots a_{2n}^{(1)}$ verschwänden, so fiele aus der in (9) gegebenen Darstellung der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ die Variable x_2 heraus, und die Form müsste verschwinden, sobald $u_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0, \ldots x_n = 0$ genommen, allein x_2 beliebig gewählt würde; es soll aber die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nur für das Werthsystem $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ verschwinden. Wenn ferner $a_{22}^{(1)}$ gleich Null wäre und nicht alle Coefficienten $a_{23}^{(1)}, \ldots a_{2n}^{(1)}$ verschwänden, so könnte man die Variabeln $x_3, \ldots x_n$ so wählen, dass für das Aggregat der Glieder, welche in der Form $f^{(1)}(x_2, \ldots x_n)$ mit x_2 multiplicirt sind

$$(10) \qquad (2a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + 2a_{2n}^{(1)}x_n)\,x_2$$

die in der Klammer befindliche Function des ersten Grades von Null verschieden würde. Nun besteht die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vermöge (9) aus dem Gliede $\frac{u_1^2}{a_{11}}$, ferner, wenn $a_{22}^{(1)}$ gleich Null

angenommen wird, aus dem Aggregat (10) und endlich aus einer Form der Variabeln $x_3, x_4, \ldots x_n$. Nachdem also die Variabeln $x_3, x_4, \ldots x_n$ in der erwähnten Weise bestimmt sind, und nachdem der Variable u_1 ein beliebiger Werth beigelegt ist, hätte man es immer noch in seiner Gewalt, die Variable x_2 so zu wählen, dass einmal der Ausdruck (10) positiv würde und die hinzu zu addirenden Bestandtheile dem absoluten Werthe nach überträfe, und dass ein zweites Mal der Ausdruck (10) negativ würde und die hinzu zu addirenden Bestandtheile dem absoluten Werthe nach überträfe; dadurch bekäme aber die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sowohl einen positiven wie auch einen negativen Werth, und diese Möglichkeit soll ausgeschlossen bleiben.

Nachdem die Sicherheit gewonnen ist, dass der Coefficient $a_{22}^{(1)}$ nicht gleich Null sein kann, erhält man für die Form $f^{(1)}(x_2, \ldots x_n)$ auf dem für die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eingeschlagenen Wege die Darstellung

$$(11)\quad f^{(1)}(x_2, x_3, \ldots x_n) = \frac{1}{a_{22}^{(1)}}(a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n)^2 + f^{(2)}(x_3, x_4, \ldots x_n),$$

$$(12)\quad \begin{aligned} f^{(2)}(x_3, x_4, \ldots x_n) = a_{33}^{(2)} x_3^2 &+ 2a_{34}^{(2)} x_3 x_4 + \ldots + 2a_{3n}^{(2)} x_3 x_n \\ &+ a_{44}^{(2)} x_4^2 + \ldots + 2a_{4n}^{(2)} x_4 x_n \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ a_{nn}^{(2)} x_n^2, \end{aligned}$$

$$(13)\quad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots a_{3n}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)} a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{nn}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{nn}^{(1)} - a_{2n}^{(1)} a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Auch hier ist der Ausdruck

$$(14)\qquad a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = u_2,$$

weil die Grösse $a_{22}^{(1)}$ nicht gleich Null sein darf, nicht nur von den Variabeln $x_3, \ldots x_n$ abhängig, so dass u_2 als eine neue Variable zu den Variabeln $x_3, \ldots x_n$ hinzutreten kann. Dadurch erhält die

Gleichung (11) die Gestalt

$$(14) \qquad f^{(1)}(x_2, \ldots x_n) = \frac{u_2^2}{a_{22}^{(1)}} + f^{(2)}(x_3, \ldots x_n);$$

wenn hierauf dieser Ausdruck der Form $f^{(1)}(x_2, \ldots x_n)$ in die Gleichung (9) substituirt wird, so entsteht die Darstellung

$$(15) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{a_{11}} u_1^2 + \frac{1}{a_{22}^{(1)}} u_2^2 + f^{(2)}(x_3, \ldots x_n).$$

Das angewendete Verfahren lässt sich nun immer aufs neue anwenden, da bei jeder neu auftretenden Form das Verschwinden des Coefficienten, der dem Quadrate einer Variable zugehört, einen Widerspruch gegen den aufgestellten Begriff einer wesentlich positiven oder wesentlich negativen Form nach sich ziehen würde. Es mögen die nach dem Schema der Gleichungen (17) zu bildenden Coefficienten der auf einander folgenden Formen $f^{(3)}(x_4, \ldots x_n), \ldots$ respective mit $a_{\lambda\mu}^{(3)}, \ldots$ bezeichnet werden, wo die oberen Indices fortwährend zunehmen, dann liefert die Gleichung (8) das Bildungsgesetz für die Functionen des ersten Grades

$$(16) \qquad \begin{array}{rl} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \;\ldots\ldots\; + a_{1n} & x_n = u_1 \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \;\ldots\ldots\; + a_{2n}^{(1)} & x_n = u_2 \\ a_{33}^{(2)} x_3 + \;\ldots\ldots\; + a_{3n}^{(2)} & x_n = u_3 \\ \vdots \qquad & \\ a_{n-1,\,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)} & x_n = u_{n-1}, \end{array}$$

und die quadratische Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bekommt auf Grund der Gleichung (15) den Ausdruck

$$(17) \; f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{a_{11}} u_1^2 + \frac{1}{a_{22}^{(1)}} u_2^2 + \ldots + \frac{1}{a_{n-1,\,n-1}^{(n-2)}} u_{n-1}^2 + a_{n,n}^{(n-1)} x_n^2.$$

Wenn zu den $n-1$ Functionen des ersten Grades $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ die Variable x_n hinzugefügt wird, so stellen dieselben aus der schon erwähnten Ursache, dass die Grössen $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots a_{n-1,\,n-1}^{(n-2)}$ sämmtlich von Null verschieden sind, *ein System von unabhängigen Functionen dar. Die Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ erscheint also in* (17) *als ein Aggregat von n in Constanten multiplicirten Quadraten, deren Basen n von einander unabhängige Functionen*

des ersten Grades der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sind; die Basen* $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, x_n$ *enthalten der Reihe nach* n *Variabeln,* $(n-1)$ *Variabeln u. s. f. bis zu der einen Variable* x_n. Diese Darstellung der Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ liefert unmittelbar die gesuchten Kriterien einer wesentlich positiven und einer wesentlich negativen Form. *Eine quadratische Form* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *ist dann und nur dann wesentlich positiv, wenn die zugehörigen* n *Grössen*

$$a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \ldots a_{n,n}^{(n-1)}$$

sämmtlich positiv sind; sie ist dann und nur dann wesentlich negativ, wenn die betreffenden n *Grössen sämmtlich negativ sind.* Dass keine dieser Grössen verschwinden darf, ist im Laufe der Deduction bewiesen worden und bildet die Grundlage für die Fortführung derselben. Sobald nun unter diesen n Grössen einige das positive Vorzeichen, andere das negative Vorzeichen hätten, so könnte, weil die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, x_n$ von einander unabhängig sind, denselben nach Willkür ein Werthsystem vorgeschrieben werden, bei dem die Summe der positiven Quadrate überwiegt, und ein Werthsystem, bei dem die Summe der negativen Quadrate stärker ist. Ein solcher Effect ist aber mit dem Begriffe einer wesentlich positiven und einer wesentlich negativen Form unverträglich. Dagegen ist es klar, dass, sobald die Coefficienten der vorhandenen n Quadrate sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben, die Form für reelle Werthe der Variabeln nur Werthe annehmen kann, deren Vorzeichen durch das Vorzeichen der Coefficienten bestimmt ist. Endlich kann ein Aggregat von Quadraten, welche in lauter Coefficienten desselben Vorzeichens multiplicirt sind, für reelle Werthe der Variabeln nicht anders verschwinden, als indem die n Basen jede für sich verschwinden, und weil die n Basen $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, x_n$ unabhängige Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so ist dies wieder nicht möglich, ohne dass jede der reell vorausgesetzten Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ einzeln den Werth Null erhält. Hiemit sind aber die aufgestellten Kriterien in ihrem ganzen Umfange begründet.

§ 85. Wesentlich positive ternäre quadratische Formen. Bestimmung eines Punktes im Raume durch rechtwinklige Coordinaten und durch Coordinaten eines beliebigen Axensystems. *Gauss'* geometrische Darstellung der wesentlich positiven ternären Formen.

Die Grössenverbindungen, von deren Vorzeichen nach der Untersuchung des vorigen § der wesentlich positive oder wesentlich negative Character einer quadratischen Form abhängt, sind durch eine Reihe von Operationen definirt, die nach einander zur Anwendung kommen. Wir wollen jetzt für die Formen, bei denen die Zahl der Variabeln n gleich drei ist, oder für die *ternären quadratischen Formen* den einzelnen Schritten der ausgeführten Umformung folgend jene Grössenverbindungen explicite darstellen, und werden dabei auf das aus den Coefficienten der Form gebildete symmetrische Schema

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1}$$

zurückgeführt. Die zu der Form

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = \quad & a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 \\ & + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 \end{aligned} \tag{1*}$$

gehörende Form $f^{(1)}(x_2, x_3) = a_{22}^{(1)} x_2^2 + 2 a_{22}^{(1)} x_2 x_3 + a_{33}^{(1)} x_3^2$ hat die folgenden, durch die Gleichungen (7) des vorigen § definirten Coefficienten

$$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}, \quad a_{23}^{(1)} = \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{11}}, \quad a_{33}^{(1)} = \frac{a_{11} a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}}. \tag{2}$$

Die drei Zähler lassen sich auf *adjungirte Elemente des Schemas* (1) zurückführen, in dem nach den eingeführten Bezeichnungen

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}, \; a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13} = - A_{32}, \; a_{11} a_{33} - a_{13}^2 = A_{22} \tag{3}$$

ist. Mithin kommt

$$a_{22}^{(1)} = \frac{A_{33}}{a_{11}}, \quad a_{23}^{(1)} = - \frac{A_{32}}{a_{11}}, \quad a_{33}^{(1)} = \frac{A_{22}}{a_{11}}. \tag{3*}$$

Die Gleichung (5) des vorigen § verwandelt sich auf diese Weise in die folgende

$$(4)\quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + \frac{A_{33}}{a_{11}}x_2^2 - \frac{2A_{32}}{a_{11}}x_2x_3 + \frac{A_{32}}{a_{11}}x_2^2.$$

Jetzt ist die durch die Gleichung (13) des vorigen § definirte Verbindung

$$(5)\quad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)}a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

zu betrachten, welche vermöge der Gleichungen (3*) die Gestalt annimmt

$$(6)\quad a_{33}^{(2)} = \frac{A_{33}A_{22} - A_{32}^2}{a_{11}A_{33}}.$$

In dem Schema der zu (1) adjungirten Elemente

$$(7)\quad \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}, \end{array}$$

welches nach § 83 ebenfalls ein symmetrisches ist, ist der Ausdruck $A_{33}A_{22} - A_{32}^2$ das zu A_{11} gehörige adjungirte Element und wird nach einem früher bewiesenen Satze gleich dem mit der $(n-2)$ten Potenz der Determinante D, das heisst gegenwärtig gleich dem mit der Determinante D multiplicirten gleichnamigen Element a_{11} des Schemas (1). Daher folgt aus der Gleichung (6) die Gleichung

$$(8)\quad a_{33}^{(2)} = \frac{D}{A_{33}},$$

während die von Null verschiedene Grösse a_{11} sich forthebt.

Vermöge der Relationen (16) und (17) des vorigen § ergiebt sich nun die Bestimmung

$$(9)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= u_1 \\ \frac{A_{33}}{a_{11}}x_2 - \frac{A_{32}}{a_{11}}x_3 &= u_2 \end{aligned}$$

und ferner die Darstellung der gegebenen ternären Form

$$(10)\quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a_{11}}u_1^2 + \frac{a_{11}}{A_{33}}u_2^2 + \frac{D}{A_{33}}x_3^2.$$

Die am Schlusse des vorigen § aufgestellten Kriterien für eine wesentlich positive Form bestehen darin, dass die Grössen $a_{11}, \frac{A_{33}}{a_{11}}, \frac{D}{A_{33}}$ sämmtlich das positive Zeichen, für eine wesentlich negative Form, dass dieselben sämmtlich das negative Zeichen haben. Man kann dieselben auch so ausdrücken, dass *für eine wesentlich positive Form*

$$a_{11},\ A_{33},\ D$$

positiv sein müssen, für eine wesentlich negative Form a_{11} *und* D *negativ sein müssen,* A_{33} *jedoch positiv sein muss.*

Schon bei der Ableitung der allgemeinen Gleichung (17) des vorigen § liess sich bemerken, dass zwischen den n Variabeln einer gegebenen quadratischen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ kein wesentlicher Unterschied existirt, und dass die Untersuchung ebenso gut, wie sie mit dem Coefficienten a_{11} des Quadrats x_1^2 anfing, mit dem Coefficienten des Quadrats von irgend einer andern Variable beginnen konnte. In gleicher Weise ist bei der zunächst eingeführten quadratischen Form von $n-1$ Variabeln die Wahl der zu bevorzugenden Variable, welche oben die Variable x_2 war, frei, und das gleiche gilt von allen folgenden neu einzuführenden quadratischen Formen, deren Gliederzahl mit jedem Schritt um eine Einheit abnimmt. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine quadratische Form wesentlich positiv oder wesentlich negativ sei, sind deshalb mannigfaltiger Ausdrücke fähig. Weil aber jedes einzelne System von Bedingungen ein vollständiges ist, so tritt zwischen diesen Systemen der merkwürdige Zusammenhang zu Tage, dass, wenn eines der Systeme, welches die quadratische Form als eine wesentlich positive characterisirt, erfüllt ist, alle übrigen Systeme, welche dasselbe leisten, nothwendig erfüllt sein müssen. In Betreff der wesentlich negativen Formen finden die entsprechenden Relationen statt, doch unterlassen wir aus den oben bezeichneten Gründen, diese ausführlich zu besprechen.

Werden die vorstehenden Betrachtungen auf die ternären quadratischen Formen angewendet, und giebt man den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine ternäre Form wesentlich positiv sei, die zuletzt ermittelte Gestalt

$a_{11} > 0$, $A_{33} > 0$, $D > 0$, wo durch das Zeichen der Ungleichheit $>$ wie bei dem früheren Gebrauche das Eintreten der Gleichheit ausgeschlossen werden soll, so entstehen die folgenden sechs Systeme von Bedingungen

$$(11) \qquad \begin{array}{l} a_{11} > 0,\; A_{33} > 0,\; D > 0 \\ a_{11} > 0,\; A_{22} > 0,\; D > 0 \\ a_{22} > 0,\; A_{11} > 0,\; D > 0 \\ a_{22} > 0,\; A_{33} > 0,\; D > 0 \\ a_{33} > 0,\; A_{22} > 0,\; D > 0 \\ a_{33} > 0,\; A_{11} > 0,\; D > 0. \end{array}$$

Wie vorhin ausgesprochen, genügt jedes dieser Systeme für sich allein dem beabsichtigten Zwecke und zieht zugleich die Erfüllung der fünf übrigen Systeme nach sich. *Eine wesentlich positive ternäre Form $f(x_1, x_2, x_3)$ hat deshalb nothwendig die Eigenschaft, dass die folgenden Ungleichheiten befriedigt sind*

$$(12) \quad a_{11} > 0,\; a_{22} > 0,\; a_{33} > 0,\; A_{11} > 0,\; A_{22} > 0,\; A_{33} > 0,\; D > 0.$$

Wenn man zu dem Ausdruck der Form in (1*) den Ausdruck der zugehörigen adjungirten Form hinzufügt

$$(13) \quad F(X_1, X_2, X_3) \\ = A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2 \\ + 2A_{23} X_2 X_3 + 2A_{31} X_3 X_1 + 2A_{12} X_1 X_2,$$

so lassen sich die Bedingungen (12) dahin formuliren, dass *sowohl in der gegebenen wie in der zu ihr adjungirten ternären Form die Coefficienten von den Quadraten der Variabeln positiv sein müssen, und dass die Determinante der gegebenen Form positiv sein muss.* Dass eine wesentlich positive ternäre Form auch eine wesentlich positive adjungirte Form habe, kann leicht aus diesen Bedingungen geschlossen werden, liegt übrigens schon in der Gleichung (6) des § 83.

Die in § 80 angeführte, von *Gauss* verfasste Anzeige des Werkes von *Seeber über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen* enthält ausser der an jener Stelle entwickelten *geometrischen Interpretation der positiven binären quadratischen Formen* auch eine *geometrische Interpretation der positiven ternären quadratischen Formen.* Wir werden diese Interpretation zuerst für die besondere Form

$$x^2 + y^2 + z^2$$

auseinandersetzen, und bei diesem Anlass die *Grundsätze der Bestimmung eines Punktes im Raume* mittheilen, welche in § 42 als ein Eigenthum des *Descartes* bezeichnet aber nicht insbesondere erörtert sind. Hierauf wird die geometrische Interpretation einer allgemeinen positiven ternären Form behandelt werden.

Wenn wir uns eine Ebene im Raume denken, in der Ebene einen Punkt O und zwei durch den Punkt O gehende sich rechtwinklig schneidende gerade Linien annehmen, so kann der Ort eines beliebigen Punktes der Ebene auf die in § 42 entwickelte Weise bestimmt werden, indem von den beiden einen rechten Winkel bildenden Linien die eine als *die Axe der* x, die andere als *die Axe der* y betrachtet wird. Durch den Punkt O möge eine dritte Linie gezogen werden, welche auf der Axe der x und der Axe der y senkrecht steht, und daher auch auf der ganzen Ebene, in der sich die Axen der x und der y befinden und welche jetzt *die* xy *Ebene heisst;* die neu construirte Linie wird *die Axe der* z genannt. Bei der Bestimmung eines Ortes in der Ebene wurde eine bestimmte Seite der x Axe und eine bestimmte Seite der y Axe als *positiv* aufgefasst; ebenso soll eine Seite der z Axe als positiv gelten. Der ganze Raum zerfällt durch die xy Ebene in zwei getrennte Theile; vermöge der zwischen den beiden Seiten der z Axe getroffenen Unterscheidung lässt sich zwischen jenen beiden Theilen des Raumes ein Unterschied machen, da der eine Theil die positive Seite der z Axe, der andere Theil die negative Seite der z Axe enthält. Wenn daher ein beliebiger Punkt S des Raumes ins Auge gefasst wird, so kann man immer von demselben ein Loth auf die xy Ebene herablassen und die Länge dieses Lothes durch die Längeneinheit messen, welche bei der Bestimmung eines Ortes in der xy Ebene gebraucht wurde. Ist die Länge dieses Lothes gleich Null, so liegt der Punkt S in der xy Ebene selbst, und sein Ort wird nach den Regeln des § 42 bestimmt. In jedem anderen Falle muss der Punkt S entweder in dem Theile des Raumes liegen, welcher die positive Seite, oder in dem Theile des Raumes, welcher die negative Seite der z Axe enthält. Es werde nun die absolute Zahlengrösse, welche die Länge des gemessenen Lothes ausdrückt, für den ersten

Fall positiv, für den zweiten Fall negativ genommen, und der hervorgehende positive oder negative Werth mit z bezeichnet, dann ist der Ort des Punktes S im Raume vollständig bestimmt, sobald die Ordinaten x und y für den Fusspunkt des von S auf die xy Ebene herabgelassenen Lothes und die Grösse z bekannt sind. Denn aus den Werthen x und y folgt die Lage des Fusspunktes in der xy Ebene, und die Grösse z giebt für ein auf der Ebene in dem Fusspunkte zu errichtendes Loth die Strecke an, welche auf demselben von der Ebene aus nach einer durch das Vorzeichen von z bestimmten Seite abzuschneiden ist, um als zweiten Endpunkt den Punkt S zu erhalten. *Die drei zusammengehörigen Grössen x, y, z heissen jetzt die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes S; sie bestimmen den Ort des Punktes S im Raume vollständig.*

Bei der gegebenen Deduction wurde die Grösse z zu den beiden Grössen x und y hinzugefügt. Doch erkennt man leicht den Unterschied zwischen den drei Grössen als unwesentlich, indem man ausser der xy Ebene noch die beiden Ebenen betrachtet, von denen die eine durch die y Axe und die z Axe hindurchgeht und die yz Ebene genannt wird, die andere durch die z *Axe* und die x *Axe* hindurchgeht und die zx Ebene heisst. Jede dieser drei Ebenen heisst *eine Coordinatenebene*, der Punkt O *Anfangspunkt der Coordinaten. Man lege durch den Punkt S, dessen Coordinaten x, y, z sind, drei Ebenen hindurch, welche beziehungsweise der xy Ebene, der yz Ebene und der zx Ebene parallel sind, so bilden diese drei neuen Ebenen mit den drei Coordinatenebenen zusammen ein rechtwinkliges Parallelepipedon. Die drei von dem Coordinatenanfangspunkte O ausgehenden Kanten werden beziehungsweise mittelst der gewählten Längeneinheit durch die absoluten Werthe der Coordinaten x, y, z gemessen, und das Vorzeichen jeder einzelnen Coordinate fällt positiv oder negativ aus, je nachdem ein Punkt, welcher die betreffende Kante von dem Punkte O aus durchläuft, nach der positiven oder der negativen Seite der betreffenden Axe fortschreitet.*

Die Verbindungslinie des Coordinatenanfangspunktes O mit dem Punkte S bildet eine räumliche Diagonale des so eben beschriebenen Parallelepipedons. Das Quadrat der Linie OS ist vermöge einer zweimaligen Anwendung des *Pythagoräischen*

Lehrsatzes gleich der Summe der Quadrate der drei von dem Punkte O ausgehenden Kanten des Parallelepipedons, und hat deshalb für alle möglichen Abwechselungen der Vorzeichen von den Grössen x, y, z den Ausdruck

(14) $$x^2 + y^2 + z^2.$$

Aus diesem Grunde wird die positive ternäre Form $x^2 + y^2 + z^2$ *in der Weise geometrisch interpretirt, dass* x, y, z *die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume bedeuten, und dass die betreffende Form das Mass für das Quadrat der Entfernung zwischen dem betreffenden Punkte und dem Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet.*

Um uns die Lage der drei Coordinatenaxen auf eine bestimmte Art vorzustellen, sei die xy Ebene eine horizontale Ebene, die positive Seite der z Axe vertikal von unten nach oben gerichtet, und es möge für denjenigen, welcher sich in dem Punkte O auf die xy Ebene stellt, so dass seine Füsse in O sind und sein Kopf sich auf der positiven Seite der z Axe befindet, und dass er in den von der positiven Seite der x Axe und der positiven Seite der y Axe gebildeten rechten Winkel hineinsieht, die erstere zur linken und die letztere zur rechten Hand liegen. Wenn die drei Axen fest mit einander verbunden sind, jedoch als Ganzes eine beliebige Ortsveränderung im Raume erfahren, so bleibt offenbar die characterisirte relative Lage der drei Axen unverändert.

Der Ort eines Punktes im Raume lässt sich auch mit Hülfe von *drei Axen* bestimmen, *welche durch denselben Punkt* O *gehen und beliebige Winkel miteinander machen.* Indem man durch einen Punkt S eine Parallele zu jeder der drei Axen zieht, und zwar immer bis zu demjenigen Punkte, in welchem die durch die beiden andern Axen gelegte *Coordinatenebene* getroffen wird, so erscheint der Punkt S als die dem Coordinatenanfangspunkte O räumlich gegenüberliegende Ecke eines Parallelepipedons, dessen Kanten respective den Coordinatenaxen parallel sind. Die drei von dem Coordinatenanfangspunkte O ausgehenden Kanten, durch die Längeneinheit gemessen, geben den absoluten Werth der drei Coordinaten an. Bei jeder der drei Axen wird die eine Seite als die positive, die entgegengesetzte Seite als die negative angesehen. Das Vorzeichen einer jeden Coordinate

richtet sich danach, ob ein von dem Punkte O ausgehender Punkt, um eine bestimmte Kante des erwähnten Parallelepipedons zu durchlaufen, nach der positiven oder nach der negativen Seite der zugehörigen Axe fortschreiten muss. Dieser Bestimmung eines Punktes im Raume liegt die nothwendige *Bedingung* zu Grunde, dass *die drei Axen sich nicht in einer und derselben Ebene befinden*, oder, wie man auch zu sagen pflegt, *dass sie eine körperliche Ecke bilden.* Drückt man das Quadrat der Entfernung des Punktes S von dem Coordinatenanfangspunkte O durch die in Rede stehenden Coordinaten des Punktes S aus, so wird dasselbe gleich einer homogenen Function des zweiten Grades oder einer quadratischen Form der drei Coordinaten. Diese Form kann vermöge ihrer Entstehung nicht andere als positive Werthe darstellen, welche Systeme von reellen Werthen den Coordinaten auch beigelegt werden, und kann nur verschwinden, wenn der Punkt S mit dem Punkte O zusammenfällt, das heisst, wenn die drei Coordinaten des Punktes S jede für sich gleich Null werden; sie giebt sich daher als eine wesentlich positive ternäre Form der drei Coordinaten zu erkennen. Die *Gauss'sche Interpretation einer gegebenen positiven ternären Form* stützt sich nun auf den Nachweis der Thatsache, dass zu jeder solchen Form ein Coordinatensystem gehört, für welches die Form selbst der Ausdruck des Quadrats der Entfernung eines beweglichen Punktes im Raume von einem festen Anfangspunkte ist.

Wir haben gefunden, dass für jede wesentlich positive ternäre Form (1*)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 \\ & + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 \end{aligned}$$

die Ungleichheiten (12) erfüllt sind

$$a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ a_{33} > 0,\ A_{11} > 0,\ A_{22} > 0,\ A_{33} > 0,\ D > 0.$$

In Folge derselben existiren die reellen positiven Grössen

$$\sqrt{a_{11}},\ \sqrt{a_{22}},\ \sqrt{a_{33}},\ \sqrt{A_{11}},\ \sqrt{A_{22}},\ \sqrt{A_{33}},\ \sqrt{D}.$$

Die Ausdrücke der adjungirten Elemente

(16) $A_{11} = a_{22} a_3 - a_{23}^2,\ A_{22} = a_{33} \cdot a_{11} - a_{31}^2,\ A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$

zeigen nun bei einer Wiederholung der am Anfange des § 80

angestellten Ueberlegungen, dass drei zwischen Null und zwei Rechten befindliche, keine der beiden Grenzen erreichende Winkel ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden können

$$(17)\qquad \begin{aligned} \cos\,\omega_{23} &= \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{33}}}, & \sin\,\omega_{23} &= \frac{\sqrt{A_{11}}}{\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{33}}} \\ \cos\,\omega_{31} &= \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{33}}\sqrt{a_{11}}}, & \sin\,\omega_{31} &= \frac{\sqrt{A_{22}}}{\sqrt{a_{33}}\sqrt{a_{11}}} \\ \cos\,\omega_{12} &= \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}}, & \sin\,\omega_{12} &= \frac{\sqrt{A_{33}}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}}. \end{aligned}$$

Für irgend welche Werthe der drei Winkel ist es möglich, durch einen beliebigen Punkt O im Raume eine *erste Axe* und eine *zweite Axe* zu ziehen, deren als positiv betrachtete Seiten mit einander den concaven Winkel ω_{12} bilden; ferner kann zu der zweiten Axe eine dritte hinzugefügt werden, so dass ihre positiven Seiten den concaven Winkel ω_{23} bilden, und desgleichen zu der ersten Axe eine dritte, so dass ihre positiven Seiten den concaven Winkel ω_{31} bilden. Jedoch muss noch eine Bedingung erfüllt sein, damit es möglich sei, die *dritte Axe* so anzunehmen, dass ihre positive Seite *gleichzeitig* mit der positiven Seite der zweiten Axe den concaven Winkel ω_{23} und mit der positiven Seite der ersten Axe den concaven Winkel ω_{31} macht und dass dieselbe mit den beiden ersteren nicht in die gleiche Ebene falle.

Es ist dies die Bedingung, vermöge deren die *drei Axen, deren Neigungswinkel gegen einander gegeben sind, eine körperliche Ecke bilden können*; sie lässt sich so aussprechen, *dass bei den drei Neigungswinkeln die Summe von zweien immer den dritten Winkel übertreffen, und dass zugleich die Summe aller drei Winkel weniger betragen muss als vier rechte Winkel.* Die drei aus der gegebenen positiven ternären Form abgeleiteten Winkel ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} sind aber in der That noch dadurch beschränkt, dass die Determinante D der Form positiv sein muss, und es zeigt sich, dass diese Beschränkung mit der Bedingung für das Zustandekommen einer körperlichen Ecke zusammen-

fällt. Die Determinante D, die zu dem symmetrischen Systeme (1) gehört, hat den Ausdruck

$$(18)\quad D = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}^2 - a_{22}\, a_{31}^2 - a_{33}\, a_{12}^2 + 2\, a_{23}\, a_{31}\, a_{12}.$$

Der Quotient $\frac{D}{a_{11}\, a_{22}\, a_{33}}$, dessen Zähler die positive Determinante D und dessen Nenner das Product der positiven Factoren a_{11}, a_{22}, a_{33} ist, wird durch die drei in (17) definirten Grössen $\cos\omega_{23}$, $\cos\omega_{31}$, $\cos\omega_{12}$ folgendermassen darstellbar

$$(19)\quad \frac{D}{a_{11}\, a_{22}\, a_{33}} = 1 - \cos^2\omega_{23} - \cos^2\omega_{31} - \cos^2\omega_{12} + 2\cos\omega_{23}\cos\omega_{31}\cos\omega_{12},$$

und lässt sich mit Hülfe der trigonometrischen Additionsformeln in die Gestalt des Products bringen

$$(20)\quad \frac{D}{a_{11}\, a_{22}\, a_{33}} = 4 \sin\frac{(\omega_{23}+\omega_{31}+\omega_{12})}{2} \sin\frac{(-\omega_{23}+\omega_{31}+\omega_{12})}{2} \sin\frac{(\omega_{23}-\omega_{31}+\omega_{12})}{2} \sin\frac{(\omega_{23}+\omega_{31}-\omega_{12})}{2}.$$

Für die drei zwischen 0 und π liegenden Winkel $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ kann nun, wie eine einfache Ueberlegung ergiebt, immer nur einer der vier miteinander zu multiplicirenden Sinusausdrücke negativ sein; mithin zieht die Forderung, dass das Product derselben positiv sei, die Consequenz nach sich, dass jeder der Factoren positiv sein muss. Mithin müssen die drei Winkel $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ die vorhin erwähnten Eigenschaften besitzen, die für die Existenz einer körperlichen Ecke nothwendig und hinreichend sind.

Nachdem durch den Punkt O drei Axen gelegt sind, welche die in Rede stehenden Neigungswinkel haben, erhält man aus den Variabeln x_1, x_2, x_3 der gegebenen Form die Ausdrücke für die Coordinaten eines beliebigen Punktes S im Raume

$$(21)\qquad x_1\sqrt{a_{11}},\ x_2\sqrt{a_{22}},\ x_3\sqrt{a_{33}},$$

die respective zu der ersten, zweiten und dritten Axe gehören und von dem Coordinatenanfangspunkte O aus gerechnet werden. Ihre absoluten Werthe sind das Mass für die drei von dem Punkte O ausgehenden Kanten OP_1, OP_2, OP_3 des früher beschriebenen Parallelepipedons; die durch den Punkt S gehenden

mit den Axen parallelen Kanten mögen beziehungsweise SS_1, SS_2, SS_3 genannt werden. Das Quadrat der räumlichen Diagonale OS lässt sich mit Hülfe des Dreiecks OS_3S durch die Gleichung

$$OS^2 = OS_3^2 + S_3S^2 - 2\, OS_3 . S_3S \cos OS_3S \tag{22}$$

bestimmen. Die Linie OS_3 ist die Diagonale des Parallelogramms $OP_1S_3P_2$, dessen Seiten OP_1 und OP_2 durch die erste und die zweite Coordinate des Punktes S bestimmt sind und mit einander den Winkel ω_{12} bilden; also gilt die Gleichung

$$OS_3^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \cos \omega_{12}\, x_1\, x_2. \tag{23}$$

Die Linie S_3S wird durch die dritte Coordinate des Punktes S gemessen, so dass

$$S_3S^2 = a_{33}x_3^2 \tag{24}$$

ist. Der Winkel OS_3S ergänzt sich mit dem Winkel S_3OP_3, den die Linie OS_3 mit der dritten Kante OP_3 bildet, zu zwei Rechten, so dass $\cos OS_3S = \cos S_3OP_3$, mithin $-2\, OS_3 . S_3S \cos OS_3S$ gleich $2\, OS_3 . S_3S \cos S_3OP_3$ ist. Das Product der Diagonale OS_3 mit dem Cosinus des Winkels, den die Linie OS_3 mit der dritten Axe bildet, stellt die *Projection der ersteren Linie auf die dritte Axe* dar. Von dem Punkte O gelangt man aber nach dem Punkte S_3 ausser auf dem geradlinigen Wege auch dadurch, dass zuerst die Linie OP_1 dann die Linie P_1S_3 durchlaufen wird. Die Projection der Linie OP_1 auf die dritte Axe ist das Product ihrer Länge mit dem Cosinus des Winkels, den die Linie gegen die dritte Axe macht, und die Projection der Linie P_1S_3 auf die dritte Axe ist das Product ihrer Länge mit dem Cosinus des Winkels, den diese Linie gegen die dritte Axe macht. Der Winkel, den zwei Linien im Raume mit einander bilden, ist ein vollkommen bestimmter, sobald der Sinn gegeben ist, in dem jede der beiden Linien zu durchlaufen ist, und sobald ausserdem feststeht, dass der betreffende Winkel stets zwischen Null und zwei Rechten genommen werden soll. Eine leichte geometrische Betrachtung lehrt nun, dass, wenn in Bezug auf die nach der positiven Seite durchlaufene dritte Axe die Projectionen der Linien OP_1, P_1S_3, OS_3 genommen werden, und wenn man sich jede dieser Linien in dem Sinne durchlaufen denkt, in dem wir die den Ecken zugehörigen Buchstaben auf

einander haben folgen lassen, die letzte Projection gleich der Summe der beiden erstern ist. Hieraus ergiebt sich für das Product $2\,OS_3 \,.\, S_3S \cos S_3OP_3$ die allgemein gültige Darstellung

$$(25)\qquad 2\,OS_3 \,.\, S_3S \cos S_3OP_3 =$$
$$2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{33}} \cos \omega_{31}\, x_1\, x_3 + 2\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{33}} \cos \omega_{23}\, x_2\, x_3.$$

Die Gleichung (22) liefert deshalb für das Quadrat der Entfernung OS_2 nach Addition der drei erörterten Bestandtheile die Darstellung

$$(26)\quad OS^2 = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\sqrt{a_{22}}\sqrt{a_{33}} \cos \omega_{23}\, x_2\, x_3$$
$$+ 2\sqrt{a_{33}}\sqrt{a_{11}} \cos \omega_{31}\, x_3\, x_1 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \cos \omega_{12}\, x_1\, x_2,$$

und diese verwandelt sich mit Hinzuziehung der Definitionsgleichungen (17) in den Ausdruck

$$(27)\qquad OS^2 = a_{11} x^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$
$$+ 2\,a_{23}\, x_2\, x_3 + 2\,a_{31}\, x_3\, x_1 + 2\,a_{12}\, x_1\, x_2.$$

Demnach repräsentirt, wie vorhin bemerkt, *die gegebene positive ternäre quadratische Form* $f(x_1, x_2, x_3)$ *das Quadrat der Entfernung zwischen dem Punkte S, dessen Coordinaten* $x_1\sqrt{a_{11}}$, $x_2\sqrt{a_{22}}$, $x_3\sqrt{a_{33}}$ *sind, und dem Coordinatenanfangspunkte O.*

Wir betrachten jetzt das Parallelepipedon, dessen eine Ecke der Punkt O ist, und für welches die von diesem Punkten ausgehenden Kanten, die wir auch in diesem besonderen Falle OP_1, OP_2, OP_3 nennen, auf der positiven Seite von jeder der drei Axen liegen und beziehungsweise die Längen $\sqrt{a_{11}}$, $\sqrt{a_{22}}$, $\sqrt{a_{33}}$ haben. Dasselbe kann *das der Form* $f(x_1, x_2, x_3)$ *zugehörige Grundparallelepipedon* genannt werden. Der Flächeninhalt der von den beiden ersten Kanten eingeschlossenen Seitenfläche des Parallelepipedons ist gleich dem mit dem Sinus des Winkels ω_{12} multiplicirten Product der beiden Kanten, also nach (17) gleich der Grösse $\sqrt{A_{33}}$; der Flächeninhalt der anderen um O liegenden Seitenflächen wird entsprechend durch die Grössen $\sqrt{A_{11}}$, $\sqrt{A_{22}}$ bezeichnet. Um den *Rauminhalt des Grundparallelepipedons* zu bestimmen, ist der Inhalt einer Seitenfläche mit dem von

dem Endpunkt der übrigbleibenden Kante herabgelassenen Lothe zu multipliciren. Es möge jetzt von dem Endpunkte P_3 der dritten Kante auf die von den beiden ersten Kanten gebildete Ebene ein Loth gefällt werden, der Fusspunkt F_3 desselben habe in Bezug auf die in dieser Ebene liegende erste und zweite Axe beziehungsweise die Coordinaten p_1 und p_2. Offenbar treffen ein von dem Fusspunkte F_3 auf die erste Axe herabgelassenes Loth, und ein von dem Punkte P_3 auf dieselbe Axe herabgelassenes Loth in demselben Punkte zusammen, und der Abstand dieses Punktes von dem Punkte O, positiv oder negativ genommen, je nachdem der betreffende Punkt auf der positiven oder der negativen Seite der Axe liegt, hat vermöge seiner zwiefachen Definition den zwiefachen Ausdruck

$$p_1 + p_2 \cos \omega_{12} = \sqrt{a_{33}} \cos \omega_{31}. \tag{28}$$

Dasselbe gilt von den aus denselben Punkten auf die zweite Axe herabgelassenen Lothen, und es entsteht die entsprechende Gleichung

$$p_1 \cos \omega_{12} + p_2 = \sqrt{a_{33}} \cos \omega_{23}. \tag{29}$$

Das Quadrat des Abstandes zwischen dem Punkte O und dem Fusspunkte F_3, dessen Coordinaten p_1 und p_2 sind, hat den Werth

$$(p_1 + p_2 \cos \omega_{12})^2 + p_2^2 \sin^2 \omega_{12}. \tag{30}$$

Die Gleichungen (28) und (29) liefern für p_1 und p_2 die stets bestimmten Ausdrücke

$$p_1 = \sqrt{a_{33}} \frac{\cos \omega_{31} - \cos \omega_{23} \cos \omega_{12}}{\sin^2 \omega_{12}} \tag{31}$$

$$p_2 = \sqrt{a_{33}} \frac{\cos \omega_{23} - \cos \omega_{31} \cos \omega_{12}}{\sin^2 \omega_{12}},$$

da der Nenner vermöge (17) niemals verschwinden darf. Der Ausdruck (30) nimmt demnach die Gestalt an

$$a_{33} \cos^2 \omega_{31} + a_{33} \frac{(\cos \omega_{23} - \cos \omega_{31} \cos \omega_{12})^2}{\sin^2 \omega_{12}}, \tag{30*}$$

oder, nach Wiedereinführung der Coefficienten der gegebenen ternären Form, die Gestalt

$$(30^*)\qquad \frac{a_{31}^2}{a_{11}} + \frac{(a_{23}\,a_{11} - a_{31}\,a_{12})^2}{a_{11}\,A_{33}} = \frac{a_{11}\,a_{23}^2 - 2\,a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{22}\,a_{31}^2}{A_{33}}.$$

Das Quadrat des Lothes $P_3\,F_3$ ist gleich dem Quadrate der Kante OP_3, deren Länge gleich $\sqrt{a_{33}}$ ist, um das so eben dargestellte Quadrat des Abstandes OF_3 vermindert, und hat daher den Werth

$$(31)\qquad a_{33} - \frac{a_{11}\,a_{23}^2 - 2\,a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{22}\,a_{31}^2}{A_{33}}$$
$$= \frac{a_{33}\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2) - a_{11}\,a_{23}^2 + 2\,a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{22}\,a_{31}^2}{A_{33}}.$$

Der Zähler des Bruches ist nach (18) gleich der Determinante D, folglich wird das gesuchte Loth $P_3\,F_3$ durch die positive Grösse

$$(32)\qquad \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{A_{33}}}$$

dargestellt. *Der Rauminhalt des der Form $f(x_1, x_2, x_3)$ zugehörigen Grundparallelepipedons ist daher gleich der Quadratwurzel aus der Determinante der ternären Form $\sqrt{D}$.*

Es verdient bemerkt zu werden, dass in der gegebenen Bestimmung des Lothes $P_3\,F_3$ ein zweiter Beweis dafür enthalten ist, dass mit den drei aus der positiven ternären Form abgeleiteten Neigungswinkeln ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} eine körperliche Ecke construirt werden kann. Denn nachdem die beiden ersten Axen einmal gewählt sind, folgt aus den Coordinaten p_1 und p_2 des Punktes F_3 und der Höhe $F_3\,P_3$ mit Sicherheit die Existenz und die Bestimmung der Kante OP_3. Zugleich erhellt, dass zwar der Punkt F_3 eindeutig bestimmt ist, dass aber die Höhe $F_3\,P_3$ nach beiden Seiten der durch die beiden ersten Axen gelegten Ebene genommen werden kann, weshalb hier zwei *in Bezug auf ihre Lage zu einander symmetrische körperliche Ecken* existiren. Um den drei positiven Seiten der Axen, oder, wie man auch sagt, den positiven Halbaxen eine bestimmte Ecke entsprechen zu lassen, möge für denjenigen, welcher die erste positive Halbaxe zur linken, die zweite positive Halbaxe zur rechten Hand hat und in den von diesen beiden Halbaxen ge-

bildeten concaven Winkel hineinsieht, die dritte positive Halbaxe nach oben gerichtet sein.

§ 86. Geometrische Deutung der aus einer Substitution des ersten Grades hervorgehenden Transformation einer positiven ternären Form.

Wenn in dem eingeführten Coordinatensystem ein beliebiger Punkt S, wie vorhin, die Coordinaten $x_1\sqrt{a_{11}}$, $x_2\sqrt{a_{22}}$, $x_3\sqrt{a_{33}}$, ein zweiter beliebiger Punkt T die Coordinaten $\xi_1\sqrt{a_{11}}$, $\xi_2\sqrt{a_{22}}$, $\xi_3\sqrt{a_{33}}$ hat, so kann man leicht die Lage des Punktes U bestimmen, dessen Coordinaten beziehungsweise die Aggregate der Coordinaten jener beiden Punkte sind

$$(1) \qquad (x_1+\xi_1)\sqrt{a_{11}},\ (x_2+\xi_2)\sqrt{a_{22}},\ (x_3+\xi_3)\sqrt{a_{33}}.$$

Wird das System der durch den Anfangspunkt O gehenden drei Axen ohne Aenderung der Richtung sammt allen auf dasselbe bezogenen Punkten von dem Punkte O nach dem Punkte T verschoben, so nimmt der frühere Punkt S die Stelle des Punktes U ein. Desgleichen lässt sich der Punkt U dadurch definiren, dass, nachdem die Linien OS und OT gezogen sind, eine durch den Punkt S zu OT gezogene Parallele und eine durch den Punkt T zu OS gezogene Parallele sich in dem Punkte U schneiden. Das Quadrat des Abstandes OU hat daher den Ausdruck

$$(2) \qquad OU^2 = OS^2 + 2\,OS\,.\,OT\cos(SOT) + OT^2,$$

wo der Winkel SOT zwischen Null und zwei Rechten liegt.

Nach den aufgestellten Grundsätzen entsteht ein algebraischer Ausdruck für das Quadrat der Linie OU dadurch, dass in die gegebene ternäre Form die zu den Coordinaten (1) gehörenden Aggregate $x_1+\xi_1$, $x_2+\xi_2$, $x_3+\xi_3$ als Werthe der Variabeln substituirt werden. Das Ergebniss dieser Substitution ist aus der Gleichung (10) des § 81 zu entnehmen, sobald $n=3$ gesetzt wird.

Hier wird vermöge der gegebenen Coordinaten der Punkte S und T der Bestandtheil $f(x_1, x_2, x_3)$ gleich der Grösse OS^2, der Bestandttheil $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ gleich der Grösse OT^2, und es

bleibt bei der Vergleichung der beiden Ausdrücke von OU^2 für die noch fehlenden Bestandtheile die Gleichung

$$(3)\qquad OS\,.\,OT \cos(SOT)$$
$$= f_1(x_1, x_2, x_3)\,\xi_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)\,\xi_2 + f_3(x_1, x_2, x_3)\,\xi_3,$$

welche entwickelt zu der folgenden wird

$$(3^*)\quad OS\,.\,OT \cos(SOT) = \begin{aligned}[t] &(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,\xi_1 \\ +&(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,\xi_2 \\ +&(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,\xi_3. \end{aligned}$$

Da OS, ausser wenn der Punkt S mit dem Punkte O zusammenfällt, und OT, ausser wenn der Punkt T mit dem Punkte O zusammenfällt, nie verschwindet, so verschwindet der vorstehende Ausdruck nur dann, wenn der Cosinus des Winkels SOT gleich Null wird, das heisst *wenn die Linien OS und OT auf einander senkrecht stehen. Sobald daher OT fest gegeben ist, so wird die Forderung, dass der Ausdruck* (3*) *gleich Null sei, durch alle Punkte S erfüllt, für welche die Linie OS auf der Linie OT senkrecht steht, und dies geschieht für alle Punkte derjenigen Ebene, die durch den Coordinatenanfangspunkt O hindurchgeht und auf der Linie OT senkrecht steht. Bei beliebig gegebenen Werthen* $\xi_1\sqrt{a_{11}}$, $\xi_2\sqrt{a_{22}}$, $\xi_3\sqrt{a_{33}}$ *ist deshalb das Verschwinden der rechten Seite von* (3*) *der Ausdruck dafür, dass der Punkt S, dessen Coordinaten* $x_1\sqrt{a_{11}}$, $x_2\sqrt{a_{22}}$, $x_3\sqrt{a_{33}}$ *sind, auf der bezeichneten Ebene liegt, und bildet die Gleichung dieser Ebene. Die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt O gehenden Ebene hat mithin die allgemeine Gestalt*

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

wo A, B, C gegebene Constanten sind.

In dem besondern Falle, dass die ternäre Form gleich $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ist, und dass x_1, x_2, x_3 die *rechtwinkligen Coordinaten des Punktes S, desgleichen* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes T* sind, nimmt die Gleichung (3*) die einfache Gestalt an

$$(4)\qquad OS\,.\,OT \cos(SOT) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3.$$

Mit den gegenwärtigen Hülfsmitteln kann die *Transformation einer positiven ternären Form durch eine Substitution ersten Grades* geometrisch gedeutet werden. Durch die Substitution

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad x_1 &= \gamma_{11}\, x'_1 + \gamma_{12}\, x'_2 + \gamma_{13}\, x'_3 \\
x_2 &= \gamma_{21}\, x'_1 + \gamma_{22}\, x'_2 + \gamma_{23}\, x'_3 \\
x_3 &= \gamma_{31}\, x'_1 + \gamma_{32}\, x'_2 + \gamma_{33}\, x'_3,
\end{aligned}
$$

deren Coefficienten reell sind und deren Determinante Γ nicht gleich Null ist, gehe die gegebene wesentlich positive ternäre Form in die Form

$$
\begin{aligned}
(6) \quad g(x'_1, x'_2, x'_3) = {} & a'_{11}\, x'^2_1 + a'_{22}\, x'^2_2 + a'_{33}\, x'^2_3 \\
& + 2a'_{23}\, x'_2\, x'_3 + 2a'_{31}\, x'_3\, x'_1 + 2a'_{12}\, x'_1\, x'_2
\end{aligned}
$$

über. Die gewählten Bezeichnungen sind in denen des § 81 enthalten, wofern dort $n=3$ gesetzt wird. Die Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ muss ebenfalls eine wesentlich positive ternäre Form sein; denn wenn ein System von reellen Werthen x'_1, x'_2, x'_3 existirte, für welches die Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ negativ würde, oder wenn ausser dem System $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$ ein System von reellen Werthen x'_1, x'_2, x'_3 existirte, für das die Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ gleich Null würde, so ergäbe das System (5), da die Determinante Γ nicht gleich Null ist, zugehörige bestimmte reelle Werthe x_1, x_2, x_3, für welche die Form $f(x_1, x_2, x_3)$ respective negativ werden oder verschwinden müsste, ohne dass $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ wäre.

Die Gleichungen (19) des § 81 liefern bei der Annahme $n=3$ die vollständigen Ausdrücke von den Coefficienten der Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$. Als Repräsentanten aller übrigen Coefficienten können die Ausdrücke von a'_{11} und a'_{12} dienen

$$
\begin{aligned}
(7) \quad a'_{11} = {} & a_{11}\gamma_{11}^2 + a_{22}\gamma_{21}^2 + a_{33}\gamma_{31}^2 \\
& + 2\,a_{23}\gamma_{21}\gamma_{31} + 2a_{31}\gamma_{31}\gamma_{11} + 2a_{12}\gamma_{11}\gamma_{21}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8) \quad a'_{12} = {} & (a_{11}\gamma_{11} + a_{12}\gamma_{21} + a_{13}\gamma_{31})\gamma_{12} \\
& + (a_{21}\gamma_{11} + a_{22}\gamma_{21} + a_{23}\gamma_{31})\gamma_{22} \\
& + (a_{31}\gamma_{11} + a_{32}\gamma_{21} + a_{23}\gamma_{31})\gamma_{32}.
\end{aligned}
$$

Der Coefficient a'_{11} geht aus der Form $f(x_1, x_2, x_3)$ selbst durch die Einsetzung der Werthe $x_1 = \gamma_{11}$, $x_2 = \gamma_{21}$, $x_3 = \gamma_{31}$ hervor, der Coefficient a'_{12} aus der rechten Seite der Gleichung (3*) durch die Einsetzung der Werthe

$$x_1 = \gamma_{11},\ x_2 = \gamma_{21},\ x_3 = \gamma_{31},\ \xi_1 = \gamma_{12},\ \xi_2 = \gamma_{22},\ \xi_3 = \gamma_{32}.$$

Die Grösse a'_{11} *ist deshalb gleich dem Quadrate des Abstandes zwischen dem Anfangspunkte der Coordinaten und dem Punkte mit den Coordinaten*

(9) $$\gamma_{11}\sqrt{a_{11}},\ \gamma_{21}\sqrt{a_{22}},\ \gamma_{31}\sqrt{a_{31}}.$$

Die entsprechende Bedeutung hat a'_{22} *für den Punkt mit den Coordinaten*

(10) $$\gamma_{12}\sqrt{a_{11}},\ \gamma_{22}\sqrt{a_{22}},\ \gamma_{32}\sqrt{a_{33}}$$

und a'_{33} *für den Punkt mit den Coordinaten*

(11) $$\gamma_{13}\sqrt{a_{11}},\ \gamma_{23}\sqrt{a_{22}},\ \gamma_{33}\sqrt{a_{33}}.$$

Wenn daher in der Gleichung (3*) die so eben angedeutete Substitution gemacht wird, so ist auf der linken Seite die Entfernung OS durch $\sqrt{a'_{11}}$, die Entfernung OT durch $\sqrt{a'_{22}}$ zu ersetzen, und bezeichnen wir den hier auftretenden concaven Winkel SOT mit ω'_{12}, so entsteht die Gleichung

(12) $$\sqrt{a'_{11}}\sqrt{a'_{22}}\cos\omega'_{12} = a'_{12}.$$

Wir denken uns jetzt von dem Anfangspunkte O aus nach den drei Punkten, deren Coordinaten in (9), (10) und (11) angegeben sind, gerade Linien gezogen und fassen dieselben als ein *System von neuen Axen* auf; die von dem Punkte O aus nach den betreffenden Punkten führenden Richtungen bezeichnen die *drei positiven neuen Halbaxen.* Der concave Winkel zwischen der ersten und der zweiten positiven neuen Halbaxe ist ω'_{12} genannt worden, die concaven Winkel zwischen der zweiten und dritten, der dritten und ersten mögen respective ω'_{23}, ω'_{31} heissen, und werden nach Massgabe von (12) durch die Gleichungen

(13) $$\sqrt{a'_{22}}\sqrt{a'_{33}}\cos\omega'_{23} = a'_{23},\quad \sqrt{a'_{33}}\sqrt{a'_{11}}\cos\omega'_{31} = a'_{31}$$

bestimmt. Diese Gleichungen entsprechen genau den Gleichungen (17) des vorigen § und vermitteln die geometrische Interpretation der Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$. Wenn in der Substitution (5), vermöge deren $f(x_1, x_2, x_3) = g(x'_1, x'_2, x'_3)$ wird, den Variabeln x'_1, x'_2, x'_3 einmal die Werthe 1, 0, 0, ein zweites Mal die Werthe 0, 1, 0, ein drittes Mal die Werthe 0, 0, 1 beigelegt werden, so nehmen die Variabeln x_1, x_2, x_3 respective die Werthe $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}; \gamma_{12}, \gamma_{22}, \gamma_{32}; \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}$ an. Diese Werth-

systeme liefern beziehungsweise die Coordinaten (9), (10), (11). *Aus diesen Gründen wird derjenige Punkt im Raume, dessen Coordinaten in Bezug auf das zu der Form* $f(x_1, x_2, x_3)$ *gehörige System von Axen die Werthe*

$$x_1 \sqrt{a_{11}},\ x_2 \sqrt{a_{22}},\ x_3 \sqrt{a_{33}}$$

haben, wofern die Variabeln x_1, x_2, x_3 *mit den Variabeln* x'_1, x'_2, x'_3 *durch die Gleichungen* (5) *verbunden sind, durch drei neue Coordinaten bezeichnet, welche sich auf das zu der Form* $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ *zugehörige vorhin construirte System von neuen Axen beziehen und die Werthe*

$$x'_1 \sqrt{a'_{11}},\ x'_2 \sqrt{a'_{22}},\ x'_3 \sqrt{a'_{33}}$$

erhalten. Die Form (x'_1, x'_2, x'_3) *drückt wieder das Quadrat des Abstandes zwischen jenem Punkte und dem nicht veränderten Coordinatenanfangspunkte* O *aus.*

Der Rauminhalt des der Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ zugehörigen Grundparallelepipedons, dessen eine Ecke der Coordinatenanfangspunkt O ist, und bei dem die drei von O ausgehenden Kanten auf den drei positiven neuen Halbaxen liegen und respective die Längen $\sqrt{a'_{11}}$, $\sqrt{a'_{22}}$, $\sqrt{a'_{33}}$ haben, wird nach dem vorigen § durch die Quadratwurzel aus der Determinante D' der Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ gemessen. Nach (25) des § 81 ist $D' = \Gamma^2 D$, mithin ist die positive Quadratwurzel aus der Determinante D' gleich dem Product der positiven Quadratwurzel aus der Determinante D und dem absoluten Werthe $\pm \Gamma$ der Substitutionsdeterminante Γ. Also hat *der Rauminhalt des neuen Grundparallelepipedons den Ausdruck*

$$\pm \Gamma \sqrt{D}. \tag{14}$$

Der Uebergang von den Coordinaten $x_1 \sqrt{a_{11}}$, $x_2 \sqrt{a_{22}}$, $x_3 \sqrt{a_{33}}$ zu den Coordinaten $x'_1 \sqrt{a'_{11}}$, $x'_2 \sqrt{a'_{22}}$, $x'_3 \sqrt{a'_{33}}$, welcher durch die Gleichungen (5) bewirkt ist, wird eine *Transformation der Coordinaten* genannt. Bei diesen Gleichungen ist das Verschwinden der Determinante Γ ausgeschlossen worden, damit sowohl zu jedem System von Werthen x'_1, x'_2, x'_3 ein bestimmtes System von Werthen x_1, x_2, x_3 gehöre, wie auch das Umgekehrte Statt finde. Würden die Grössen $\gamma_{\lambda\mu}$ so angenommen, dass ihre Determinante verschwindet, so liessen sich

drei Grössen A, B, C, die nicht alle gleich Null sind, in der Weise bestimmen, dass die drei Gleichungen

$$A\gamma_{11} + A\gamma_{21} + A\gamma_{31} = 0$$
$$A\gamma_{12} + A\gamma_{22} + A\gamma_{32} = 0$$
$$A\gamma_{13} + A\gamma_{23} + A\gamma_{33} = 0$$

erfüllt wären. Dann würden aber die drei Punkte, deren Coordinaten in (9), (10), (11) angegeben sind, und nach denen von dem Punkte O aus die drei neuen Axen gerichtet sind, zufolge einer obigen Bemerkung die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt O gehenden Ebene $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ befriedigen, und in Folge dessen müssten die drei neuen Axen in einer und derselben Ebene liegen. Dadurch, dass die Determinante Γ nicht gleich Null sein darf, ist diese Möglichkeit aufgehoben. Es fragt sich jetzt noch, *wie sich die Substitutionen, bei denen Γ positiv ist, von denjenigen unterscheiden, bei denen Γ negativ ist.*

Da das zu der Form $f(x_1, x_2, x_3)$ gehörige Grundparallelepipedon alle für das erste Coordinatensystem wesentlichen Stücke enthält, und das der Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ zugehörige Grundparallelepipedon in Betreff des zweiten Coordinatensystems dieselbe Rolle spielt, so darf man sich, um ein vollständiges Bild von dem Vorgange der Transformation zu erhalten, vorstellen, dass das erste Grundparallelepipedon durch eine Aenderung der entsprechenden Stücke in das zweite Grundparallelepipedon umgewandelt werde. Wir betrachten nun zwei Substitutionen, von denen die erste eine positive Determinante, die zweite eine negative Determinante hat, nämlich

(12) $$x = x', \; y = y', \; z = z'$$

und

(13) $$x = -x', \; y = -y', \; z = -z'.$$

Bei der ersten Substitution, deren Determinante gleich 1 ist, erfährt das Grundparallelepipedon gar keine Aenderung; bei der zweiten Substitution, deren Determinante $= -1$ ist, bleiben die Längen der von O ausgehenden drei Kanten und die Neigungswinkel der Kanten ebenfalls ungeändert, jedoch wird aus jeder der ursprünglichen negativen Halbaxen die gleichnamige neue positive Halbaxe. Für den Augenblick möge das ursprüng-

liche Grundparallelepipedon das erste, das aus der zweiten Substitution hervorgehende Grundparallelepipedon das zweite genannt werden. Wenn man jetzt durch die Anwendung einer beliebigen Substitution, deren Determinante Γ nur nicht gleich Null sein darf, eine dritte Transformation der Form $f(x_1, x_2, x_3)$ ausführt und dadurch ein drittes Grundparallelepipedon erzeugt, so kann dasselbe auf die folgende Weise mit dem ersten und dem zweiten Grundparallelepipedon verglichen werden. Die Vergleichung mit dem ersten Grundparallelepipedon geschieht so, dass durch eine Drehung des dritten Grundparallelepipedons um den festen Punkt O die erste Kante des dritten in die erste Kante des ersten Grundparallelepipedons gebracht wird, dass ferner die Ebene, in welcher die erste und die zweite Kante des dritten Grundparallelepipedons liegen, in die Ebene gebracht wird, in der sich die erste und die zweite Kante des ersten Grundparallelepipedons befinden, und dass hiebei die zweite Kante jeder Fläche auf dieselbe Seite der ersten Kante fällt. Die Vergleichung des dritten Grundparallelepipedons mit dem zweiten wird durch eine Drehung des dritten um den festen Punkt O in der genau entsprechenden Weise bewerkstelligt. *Dann muss die dritte Kante des dritten Grundparallelogramms entweder mit der dritten Kante des ersten Grundparallelepipedons auf dieselbe Seite der den beiden Grundparallelepipeden gemeinsamen Ebene fallen, oder die dritte Kante des dritten Grundparallelepipedons muss mit der dritten Kante des zweiten Grundparallelepipedons auf dieselbe Seite der den beiden Grundparallelepipeden gemeinsamen Ebene fallen. Wir unterscheiden diese beiden Möglichkeiten als den ersten und den zweiten Fall.* Wenn man für das ursprüngliche Grundparallelepipedon die oben erörterte Annahme macht, dass die erste, zweite, dritte Kante respective nach links, nach rechts, nach oben gerichtet seien, so sind die erste, zweite, dritte Kante bei dem zweiten Grundparallelepipedon respective nach links, nach rechts, nach unten gerichtet, und das dritte Grundparallelogramm erscheint vermöge der beschriebenen Drehung entweder in dem ersten oder dem zweiten Falle, je nachdem die relative Lage seiner Kanten von der einen oder der anderen Beschaffenheit ist. Nun kann, wenn der erste Fall eintritt, das dritte Grundparallelepipedon

durch eine allmählige Aenderung in das erste übergeführt werden, ohne dass hiebei die drei Kanten des veränderlichen Grundparallelepipedons in dieselbe Ebene fallen; desgleichen kann, wenn der zweite Fall eintritt, das dritte Grundparallelepipedon durch eine allmählige Aenderung in das zweite übergeführt werden, ohne dass die drei Kanten des veränderlichen Grundparallelepipedons in dieselbe Ebene fallen. Wollte man aber das dritte Grundparallelepipedon in dem ersten Falle durch eine allmählige Aenderung in das zweite Grundparallelepipedon verwandeln, so müssten die drei Kanten des veränderlichen Grundparallelepipedons durch eine Lage hindurchgehen, in der sie in dieselbe Ebene fallen. Und das gleiche müsste geschehen, sobald man in dem zweiten Falle das dritte Grundparallelepipedon durch eine allmählige Aenderung in das erste Grundparallelepipedon verwandeln wollte.

Eine allmählige Aenderung des dritten Grundparallelepipedons wird dadurch dargestellt, dass die Coefficienten $\gamma_{\lambda\mu}$, welche das dritte Grundparallelepipedon hervorbringen, sich allmählig ändern. Eine Aenderung, bei der die drei Kanten in dieselbe Ebene fallen, ist eine solche, bei der die Coefficienten $\gamma_{\lambda\mu}$ eine verschwindende Determinante bekommen. Dem Festhalten des ersten Grundparallelepipedons entspricht die positive Determinante $\Gamma = 1$, dem Uebergehen zu dem zweiten Grundparallelepipedon die negative Determinante $\Gamma = -1$. In dem oben definirten ersten Falle kann von dem dritten Grundparallelepipedon zu dem ersten übergegangen werden, ohne dass die drei Kanten in dieselbe Ebene fallen oder die Determinante Γ gleich Null wird, in dem zweiten Falle kann von dem dritten Grundparallelepipedon zu dem zweiten übergegangen werden, ohne dass die drei Kanten in dieselbe Ebene fallen oder die Determinante Γ gleich Null wird. Dagegen ist ein Uebergang im entgegengesetzten Sinne nicht möglich, ohne dass die drei Kanten in dieselbe Ebene fallen oder die Determinante Γ verschwindet. *Mithin tritt der erste Fall oder der zweite Fall ein, je nachdem die Determinante Γ das positive oder das negative Vorzeichen hat, und darin liegt die gesuchte Unterscheidung.*

§ 87. System parallelepipedisch geordneter Punkte im Raume. Verschiedene Anordnungen eines solchen Systems.

Bei der geometrischen Interpretation einer positiven ternären Form, wie bei der Interpretation einer positiven binären Form, knüpft sich ein Hauptinteresse an die Voraussetzung, dass *die betreffenden Variabeln gleich allen möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt werden.* Wenn die Variabeln der obigen Form $f(x_1, x_2, x_3)$ die Reihe der sämmtlichen ganzen Zahlen durchlaufen, und wenn zu einem Punkte S, dessen Coordinaten die Werthe $x_1 \sqrt{a_{11}}$, $x_2 \sqrt{a_{22}}$, $x_3 \sqrt{a_{33}}$ haben, die in § 85 definirten Punkte S_1, S_2, S_3 gehören, so nimmt der auf der ersten Coordinatenaxe befindliche Punkt S_1 lauter Oerter ein, die von dem Coordinatenanfangspunkte O ab gerechnet immer um die Länge $\sqrt{a_{11}}$ von einander abstehen, der auf der zweiten Coordinatenaxe befindliche Punkt S_2 erhält in derselben Weise lauter Oerter von dem Abstande $\sqrt{a_{22}}$, und der auf der dritten Coordinatenaxe befindliche Punkt S_3 lauter Oerter von dem Abstande $\sqrt{a_{33}}$. Um alle betreffenden Punkte S zu construiren, ist durch jeden Punkt S_1 eine Ebene zu legen, welche derjenigen Coordinatenebene parallel ist, die durch die zweite und die dritte Coordinatenaxe hindurchgeht, und hierauf ist mit jedem Punkte S_2 und S_3 entsprechend zu verfahren. *Die sämmtlichen Punkte S, die den ganzzahligen Werthen von x_1, x_2, x_3 correspondiren, liegen deshalb auf drei Systemen von Ebenen gleichen Abstandes; der ganze Raum ist in lauter gleiche Parallelepipeda eingetheilt, deren Ecken jenes System von Punkten bilden, und jedes Parallelepipedon ist dem vorhin betrachteten Grundparallelepipedon gleich, dessen Rauminhalt durch die Quadratwurzel aus der Determinante D der gegebenen ternären Form ausgedrückt wird.*

Sobald bei der Substitution des ersten Grades

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}\, x'_1 + \gamma_{12}\, x'_2 + \gamma_{13}\, x'_3 \\ x_2 &= \gamma_{21}\, x'_1 + \gamma_{22}\, x'_2 + \gamma_{23}\, x'_3 \\ x_3 &= \gamma_{31}\, x'_1 + \gamma_{32}\, x'_2 + \gamma_{33}\, x'_3 \end{aligned} \tag{1}$$

die Coefficienten $\gamma_{\lambda\mu}$, deren Determinante Γ nicht gleich Null sein darf, ebenfalls lauter ganze Zahlen sind, so liefern ganzzahlige Werthe der Variabeln x'_1, x'_2, x'_3 nothwendig auch ganzzahlige Werthe der Variabeln x_1, x_2, x_3. *Die sämmtlichen ganzzahligen Werthe der Variabeln x'_1, x'_2, x'_3 beziehen sich auf dasjenige System parallelepipedisch geordneter Punkte, welches der Form $g(x'_1, x'_2, x'_3)$ zugehört, die aus der gegebenen Form $f(x_1, x_2, x_3)$ vermöge der angewendeten Substitution entsteht. Dieses System von Punkten ist nach den oben definirten neuen Coordinatenaxen geordnet; sein Grundparallelepipedon, dessen drei Kanten $\sqrt{a'_{11}}, \sqrt{a'_{22}}, \sqrt{a'_{33}}$ sind, hat den Rauminhalt $\sqrt{D'} = \pm\Gamma\sqrt{D}$, und wird deshalb aus dem Rauminhalt des ursprünglichen Grundparallelepipedons durch Multiplication mit der ganzen Zahl $\pm\Gamma$ abgeleitet.* Die sämmtlichen Punkte des neuen parallelepipedischen Systems führen auf ganzzahlige Werthe der Variabeln x_1, x_2, x_3 zurück und sind deshalb unter den Punkten des ursprünglichen parallelepipedischen Systems enthalten. Sobald zu jeder Combination von ganzen Zahlen x_1, x_2, x_3 nothwendig ganze Zahlen x'_1, x'_2, x'_3 gehören, so muss auch jeder Punkt des ursprünglichen parallelepipedischen Systems zugleich ein Punkt des neuen parallelepipedischen Systems sein. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die Gleichungen (1), nach den Grössen x'_1, x'_2, x'_3 aufgelöst, Ausdrücke ergeben, bei denen die x_1, x_2, x_3 nur mit ganzen Zahlen multiplicirt sind, und hiefür besteht nach § 77 die Bedingung, dass die Determinante Γ gleich der positiven oder der negativen Einheit sei. Alsdann wird der Rauminhalt des neuen Grundparallelepipedons demjenigen des ursprünglichen Grundparallelepipedons gleich, die beiden Systeme enthalten dieselben Punkte und unterscheiden sich dadurch von einander, dass das eine nach den ursprünglichen Axen und mit Anwendung der festen Abstände $\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}}, \sqrt{a_{33}}$, das andere nach den neuen Axen und mit Anwendung der festen Abstände $\sqrt{a'_{11}}, \sqrt{a'_{22}}, \sqrt{a'_{33}}$ geordnet ist. Der zwischen den Fällen $\Gamma=1$ und $\Gamma=-1$ stattfindende Unterschied ist im vorigen § erörtert worden. Wenn die Coefficienten einer quadratischen Form gegebene ganze Zahlen sind, und die Variabeln gleich beliebigen ganzen Zahlen gesetzt werden, so führt die Form zu der *Dar-*

stellung von ganzen Zahlen. Sobald daher für eine gegebene positive ternäre Form, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, das zugeordnete parallelepipedische Punktsystem im Raume construirt ist, so werden alle durch die Form darstellbaren ganzen Zahlen durch das Quadrat der Abstände repräsentirt, welche die einzelnen Punkte des Systems von dem mit O bezeichneten festen Punkte haben.

§ 88. Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.

Die in § 84 entwickelte Methode ist geeignet, um jede gegebene quadratische Form von n Variabeln durch eine Substitution ersten Grades in eine neue Form zu verwandeln, welche nur die Quadrate der neuen Variabeln enthält. Wenn in der dortigen Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Coefficient a_{11} nicht gleich Null ist, so wird dieselbe durch die Gleichung (5) als ein Aggregat dargestellt, das aus dem in eine Constante multiplicirten Quadrat eines Ausdruckes ersten Grades der Variabeln und aus einer quadratischen Form von $n-1$ Variabeln besteht. Wenn dagegen der Coefficient a_{11} gleich Null ist, so lässt sich die gegebene Form durch eine Substitution ersten Grades, deren Determinante nicht verschwindet, in eine Form $g(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ transformiren, deren Coefficient

$$a'_{11} = a_{11}\gamma_{11}^2 + 2a_{12}\gamma_{11}\gamma_{21} + \ldots + a_{nn}\gamma_{n1}^2$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Auf diese neue Form kann dann die Gleichung (5) des § 84 angewendet werden, so dass das Aggregat eines in eine Constante multiplicirten vollen Quadrats und einer Form von $n-1$ Variabeln hervorgeht. Diese Form gestattet dann entweder unmittelbar eine eben solche Behandlung oder lässt sich durch Anwendung einer Substitution des ersten Grades in eine Form verwandeln, die eine eben solche Behandlung erlaubt. Auf diese Weise erhält man endlich eine Form, welche nur die Quadrate von Ausdrücken ersten Grades der ursprünglichen Variabeln enthält, und indem diese Ausdrücke als die neuen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ eingeführt werden, ist der gewünschte Zweck erreicht. Bei der erwähnten Transformation

(1) $$f(x_1, x_2, .. x_n) = b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2 + .. + b_n u_n^2$$

ist leicht zu erkennen, dass sich die Determinante der Form $b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2 + .. + b_n u_n^2$ zu dem Product

(2) $$b_1 b_2 \dots b_n$$

zusammenzieht. Stellt man ferner die n Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ der n Variabeln $x_1, x_2, .. x_n$ zusammen, und bildet aus ihren n^2 Coefficienten die Determinante Δ, so muss die Determinante D der Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ gleich dem Product aus der Determinante (2) und dem Quadrat der Substitutionsdeterminante Δ sein, mithin die Gleichung bestehen

(3) $$D = b_1 b_2 \dots b_n \Delta^2.$$

Sobald daher die Determinante D der gegebenen Form nicht gleich Null ist, darf weder einer der Coefficienten $b_1, b_2, .. b_n$ noch die Determinante Δ verschwinden. Dass die Grössen $b_1, b_2, .. b_n$ sämmtlich von Null verschieden sein müssen, bedeutet, dass von den auf der rechten Seite von (1) vorhandenen Quadraten keines wegfallen kann, und dass Δ nicht Null sein darf, drückt aus, dass die n Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ der Variabeln $x_1, x_2, .. x_n$ von einander unabhängig sein müssen.

Das zu der Ableitung der Gleichung (1) benutzte Verfahren lehrt, dass es auf unbegrenzte viele von einander verschiedene Arten möglich ist, eine gegebene quadratische Form als eine Summe von mit Constanten multiplicirten Quadraten darzustellen. Wir halten jetzt wieder die Voraussetzung fest, dass die Coefficienten der gegebenen Form *reelle Grössen* seien, und dass die Coefficienten der anzuwendenden Substitutionen dieselbe Bedingung erfüllen, und nehmen an, dass für die gegebene Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, deren Determinante D nicht gleich Null sein soll, irgend zwei verschiedene Darstellungen der angegebenen Art ausgeführt seien. Man habe also ausser der obigen Gleichung (1) noch eine zweite Gleichung

(3) $$f(x_1, x_2, \dots x_n) = c_1 v_1^2 + c_2 v_2^2 + \dots + c_n v_n^2,$$

wo $v_1, v_2, \dots v_n$ wieder Functionen des ersten Grades der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ sind, und $c_1, c_2, \dots c_n$ Constanten bedeuten, von denen aus den angegebenen Gründen keine gleich Null sein kann. Auf diese Voraussetzungen bezieht sich ein Satz, den *Jacobi* und *Sylvester* unabhängig von einander gefunden haben,

der nach *Jacobis* Tode durch *C. W. Borchardt* im 53ten Bande des von ihm herausgegebenen Journals p. 275 mitgetheilt, von *Sylvester* in dem philosophical Magaz. 1852, II pag. 138 publicirt und das *Trägheitsgesetz der quadratischen Formen* genannt worden ist. Dieser Satz sagt aus, *dass in den beiden Darstellungen die Anzahl der mit positiven Factoren multiplicirten Quadrate und die Anzahl der mit negativen Factoren multiplicirten Quadrate dieselbe sein muss, oder, dass die eine Anzahl wie die andere Anzahl bei jeder auf dem reellen Gebiete bleibenden Transformation unveränderlich ist.*

Um den Unterschied der bei den verschiedenen Quadraten auftretenden Factoren in ein helleres Licht zu setzen, mögen in beiden Darstellungen (1) und (2) die einzelnen Factoren durch ihre absoluten Werthe mit Hinzufügung des positiven oder negativen Vorzeichens ausgedrückt werden, so dass man hat

$$(4) \quad b_1 = \mathfrak{B}_1,\ b_2 = \mathfrak{B}_2, \ldots b_k = \mathfrak{B}_k,\ b_{k+1} = -\mathfrak{B}_{k+1}, \ldots b_n = -\mathfrak{B}_n,$$

$$(5) \quad c_1 = \mathfrak{C}_1,\ c_2 = \mathfrak{C}_2, \ldots c_l = \mathfrak{C}_l,\ c_{l+1} = -\mathfrak{C}_{l+1}, \ldots c_n = -\mathfrak{C}_n.$$

Die Vereinigung der beiden Darstellungen erzeugt demnach die Gleichung

$$(6) \quad \mathfrak{B}_1 u_1^2 + \ldots + \mathfrak{B}_k u_k^2 - \mathfrak{B}_{k+1} u_{k+1}^2 - \ldots - \mathfrak{B}_n u_n^2 \\ = \mathfrak{C}_1 v_1^2 + \ldots + \mathfrak{C}_l v_l^2 - \mathfrak{C}_{l+1} v_{l+1}^2 - \ldots - \mathfrak{C}_n v_n^2.$$

Weil nun sowohl die n Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ wie auch die n Grössen $v_1, v_2, \ldots v_n$ unabhängige homogene Functionen des ersten Grades der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so können die $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf ganz bestimmte Art durch die $u_1, u_2, \ldots u_n$ ausgedrückt werden, und durch die Substitution dieser Ausdrücke gehen die $v_1, v_2, \ldots v_n$ in unabhängige homogene Functionen des ersten Grades der Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ über. Wir denken uns die $v_1, v_2, \ldots v_n$ in diese Gestalt gebracht. Jetzt lässt sich zeigen, dass, wenn in der Gleichung (6) die Anzahl l kleiner oder grösser wäre als k, ein Widerspruch entstehen müsste. Gesetzt, es sei $l < k$. Dann ist die Anzahl der Grössen $v_1, v_2, \ldots v_l$ und $u_{k+1}, \ldots u_n$ gleich $l + n - k$ und deshalb kleiner als n. Man kann aber die $l + n - k$ Gleichungen

$$(7) \quad v_1 = 0,\ v_2 = 0, \ldots v_l = 0;\ u_{k+1} = 0,\ u_{k+2} = 0, \ldots u_n = 0$$

zwischen den n Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ stets so erfüllen, dass we-

nigstens eine von den Grössen $u_1, u_2, \ldots u_k$ nicht den Werth Null erhält. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind homogene Functionen des ersten Grades von den Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$, und ihre Anzahl ist kleiner als n. Wenn man zu dem System der Gleichungen (7) so viele Gleichungen aus diesem System von gegebenen Gleichungen hinzuschreibt, bis die Anzahl n erreicht ist, so drückt das neue System von n Gleichungen keine andere Forderung aus, als das System (7). Zugleich ist aber die Determinante der Coefficienten des neuen Systems gleich Null, weil unter den Elementen desselben wegen der vorhandenen Wiederholungen gleiche Reihen vorkommen müssen. Das neue System von n Gleichungen besitzt daher alle Eigenschaften, die bei dem System (14) des § 75 vorausgesetzt sind. Von diesem System ist dort nachgewiesen, dass es stets eine Auflösung gestattet, bei welcher wenigstens eine der Unbekannten willkürlich bleibt. In dem gegenwärtigen Falle sind den Unbekannten $u_{k+1}, \ldots u_n$ die Werthe Null vorgeschrieben, mithin bleibt wenigstens eine der übrigen Unbekannten willkürlich und dieser legen wir einen von Null verschiedenen Werth bei.

Wir haben also ein derartiges System von Grössen $u_1, u_2, .. u_n$, welche die Gleichungen (7) befriedigen, und wenden dieses auf die Gleichung (6) an. Dadurch verschwinden auf der linken Seite die negativ genommenen, auf der rechten Seite die positiv genommenen Quadrate, und es resultirt die Gleichung

$$(8)\quad \mathfrak{B}_1 u_1^2 + \mathfrak{B}_2 u_2^2 + .. \mathfrak{B}_k u_k^2 = -\mathfrak{C}_{l+1} v_{l+1}^2 - \mathfrak{C}_{l+2} v_{l+2}^2 - .. - \mathfrak{C}_n v_n^2.$$

Da von den Grössen $u_1, u_2, \ldots u_k$ wenigstens eine nicht gleich Null ist, so hat die linke Seite von (8) nothwendig einen positiven die Null übertreffenden Werth. Die rechte Seite von (8) kann aber bei der Einsetzung der gewählten Werthe $u_1, u_2, \ldots u_n$ niemals positiv werden; deshalb zieht die Voraussetzung, dass $l < k$ sei, wie behauptet worden, einen Widerspruch nach sich. Aus der Voraussetzung, dass $l > k$ sei, würde $n-l < n-k$ folgen, und dann könnte man aus der Auflösbarkeit der $k+n-l$ Gleichungen

$$(9)\qquad u_1 = 0,\ u_2 = 0, \ldots u_k = 0;\ v_{l+1} = 0, \ldots v_n = 0$$

ebenfalls einen Widerspruch ableiten. Die Gleichung (6) kann

daher nicht anders bestehen, als indem die Anzahl k gleich der Anzahl l ist. In den beiden Darstellungen der gegebenen quadratischen Form muss also die Anzahl der positiv genommenen Quadrate stets dieselbe und auch die Anzahl der negativ genommenen Quadrate stets dieselbe sein. Mit diesem Beweise des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen schliesst der gegenwärtige Abschnitt.

Abschnitt III.

Unbegrenzt fortgesetzte Division.

Capitel I.

Recurrente Reihen.

§ 89. Division von zwei rationalen ganzen Functionen einer Variable.

Sobald eine rationale ganze Function $g(x)$ einer Variable x, vom $s$ten Grade, durch eine rationale ganze Function $f(x)$ vom $n$ten Grade, welcher Grad nicht höher sein soll als der $s$te Grad, dividirt wird, und zwar vermöge einer nach den fallenden Potenzen der Variable x geordneten Division, wie sie in § 68 auseinander gesetzt ist, so erhält man eine ganze Function $q(x)$ als Quotient und eine ganze Function $r(x)$, die höchstens vom $(n-1)$ten Grade sein darf, als Rest; diese Functionen befriedigen die Gleichung

$$(1) \qquad g(x) = f(x)\, q(x) + r(x).$$

Auch ist in dem angeführten § bewiesen worden, dass die ganzen Functionen $q(x)$ und $r(x)$ durch die Forderung, der Gleichung (1) in der angegebenen Weise zu genügen, eindeutig bestimmt sind. Aus der Gleichung (1) folgt für die rationale gebrochene Function $\frac{g(x)}{f(x)}$ der Ausdruck

$$(2) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)},$$

in welchem sie als das Aggregat einer ganzen Function $q(x)$ und einer rationalen gebrochenen Function $\frac{r(x)}{f(x)}$ erscheint, für

die der Zähler $r(x)$ von niedrigerem Grade ist als der Nenner. Nach der Analogie der bei der Division der ganzen Zahlen gebräuchlichen Bezeichnungen, die in § 11 angeführt sind, wird der Bruch $\frac{g(x)}{f(x)}$, bei dem *der Grad des Zählers den Grad des Nenners übertrifft oder demselben gleich ist, ein unechter Bruch*, der Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$, bei dem *der Grad des Zählers geringer ist als der Grad des Nenners, ein echter Bruch* genannt.

Es ist möglich, dem Verfahren der nach den fallenden Potenzen der Variable x geordneten Division eine Ausdehnung zu geben, durch welche der Character des Verfahrens vollständig geändert wird. Die Ausdehnung beruht darin, dass bei der successiven Bildung der einzelnen Glieder des Quotienten *negative ganze Potenzen der Variable* x zugelassen werden. Wie seit § 23 habe man

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{3}$$

der Coefficient a_0 ist als von Null verschieden vorausgesetzt; wir fügen jetzt noch die Bedingung hinzu, dass der Coefficient a_n ebenfalls nicht gleich Null sei, um im Folgenden gewisse für die Sache selbst unwesentliche Unterscheidungen abzuschneiden. Die in (1) vorkommende Function $r(x)$ sei diese

$$r(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-1}, \tag{4}$$

und es wird angenommen, dass unter den Coefficienten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ wenigstens einer von Null verschieden sei; andernfalls wäre $r(x)$ überhaupt gleich Null und die Function $f(x)$ ein algebraischer Theiler der Function $g(x)$. Das höchste Glied der Function $f(x)$ in das höchste Glied der Function $r(x)$ dividirt, giebt, wofern r_λ der erste der Coefficienten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ ist, welcher nicht verschwindet, den Bruch $\frac{r_\lambda}{a_0 x^{\lambda+1}}$ oder $\frac{r_\lambda}{a_0} x^{-\lambda-1}$, und dieser bildet den ersten Bestandtheil des neuen Quotienten

$$\frac{r_\lambda}{a_0} x^{-\lambda-1} = P_\lambda x^{-\lambda-1}. \tag{5}$$

Das Product desselben mit der Function $f(x)$, von der Function $r(x)$ abgezogen, bringt die Differenz hervor

$$(6)\quad r(x) - f(x)\,P_\lambda\,x^{-\lambda-1} = r_{\lambda+1}\,x^{n-\lambda-2} + \ldots + r_{n-1} - (a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n)\,\frac{r_\lambda}{a_0}\,x^{-\lambda-1},$$

bei der das in die Potenz $x^{n-\lambda-1}$ multiplicirte Glied fortgefallen ist. Ob sich einzelne von den Gliedern, welche in die Potenzen $x^{n-\lambda-2}$, $x^{n-\lambda-3}$, $\ldots x^{-\lambda}$ multiplicirt sind, fortheben, hängt von den besonderen obwaltenden Verhältnissen ab. Dagegen steht es fest, dass das Glied $-a_n\frac{r_\lambda}{a_0}x^{-\lambda-1}$ sich gegen ein anderes nicht fortheben kann und zugleich unfähig ist zu verschwinden, weil in Folge der geltenden Annahmen weder der Coefficient r_λ noch der Coefficient a_n verschwinden darf. Aus diesem Grunde ist die Differenz (6) ein Aggregat von Gliedern, welche in die Potenzen $x^{n-\lambda-2}$, $x^{n-\lambda-3}$, $\ldots x^{-\lambda-1}$ multiplicirt sind, und bei denen *niemals sämmtliche Coefficienten verschwinden können.* Sobald daher für die angegebene Reihenfolge der Potenzen der Coefficient der Potenz $x^{n-\mu-1}$ der erste von der Null verschiedene ist, wobei die positive Zahl μ nothwendig grösser sein muss, als die positive Zahl λ, so erzeugt die Division mit dem höchsten Gliede $a_0\,x^n$ der Function $f(x)$ den zweiten Bestandtheil des neuen Quotienten

$$(7)\qquad P_\mu\,x^{-\mu-1}.$$

Auch hier ist der Coefficient P_μ in keinem Falle gleich Null, und die Wiederholung der angewendeten Schlüsse lehrt, dass, wenn von der Differenz (6) das Product $f(x)\,P_\mu\,x^{-\mu-1}$ subtrahirt wird, unter den bestehenden Voraussetzungen unmöglich alle Glieder fortfallen können. *Das gegenwärtig angewendete Verfahren der Division erreicht also niemals einen vollständigen Abschluss und kann in so fern nach Willkür unbegrenzt fortgesetzt werden. Das Ergebniss des Verfahrens hat die folgende Gestalt*

$$(8)\quad \frac{r(x)}{f(x)} = P_\lambda\,x^{-\lambda-1} + P_\mu\,x^{-\mu-1} + \ldots + P_\omega\,x^{-\omega-1} + \frac{S_0\,x^{n-\omega-2} + S_1\,x^{n-\omega-3} + \ldots + S_{n-1}\,x^{-\omega-1}}{f(x)}.$$

Die positiven ganzen Zahlen $\lambda, \mu, \ldots \omega$ bilden eine wachsende Reihe, und mit $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}$ werden constante Coefficienten bezeichnet.

§ 90. Geometrische Reihe. Ausdruck der Summe einer Anzahl von auf einander folgenden Gliedern einer geometrischen Reihe.

Die Beschaffenheit der ausgeführten Entwickelung des echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ hängt vornehmlich von dem Grade n der Function $f(x)$ ab, welche den Nenner ausmacht. Es sei zunächst $n=1$, mithin $f(x)$ *eine Function des ersten Grades*

(2) $$f(x) = a_0 x + a_1.$$

Dann wird $r(x)$ eine Function des nullten Grades und reducirt sich auf die Constante r_0, gleichzeitig giebt die nach den Vorschriften des vorigen § eingerichtete Divison das Resultat

(1) $$\frac{r_0}{a_0 x + a_1} = \frac{r_0}{a_0} x^{-1} - \frac{r_0 a_1}{a_0^2} x^{-2} + \ldots + (-1)^t \frac{r_0 a_1^t}{a_0^{t+1}} x^{-t-1} \\ + \frac{(-1)^{t+1} \frac{r_0 a_1^{t+1}}{a_0^{t+1}} x^{-t-1}}{a_0 x + a_1},$$

in welchem für t jede positive ganze Zahl genommen werden darf. Die Coefficienten der auf einander folgenden negativen Potenzen der Variable x haben die Ausdrücke

(3) $$P_0 = \frac{r_0}{a_0},\ P_1 = -\frac{r_0 a_1}{a_0^2},\ P_2 = \frac{r_0 a_1^2}{a_0^3}, \ldots P_t = (-1)\frac{r_0 a_1^t}{a_0^{t+1}}.$$

Sie werden aus dem ersten Ausdrucke $\frac{r_0}{a_0}$ erhalten, indem derselbe mit den auf einander folgenden Potenzen der Grösse $-\frac{a_1}{a_0}$ multiplicirt wird, und stellen, da eine Reihe von Gliedern, bei welcher der Quotient eines jeden Gliedes und des hervorgehenden immer denselben Werth hat, *eine geometrische Reihe* genannt wird, *eine geometrische Reihe mit dem Quotienten* $-\frac{a_1}{a_0}$ dar. Hiemit ergiebt sich *der Satz, dass aus einem echten Bruche* $\frac{r(x)}{f(x)}$, *dessen Nenner eine Function des ersten Grades von x ist, bei der nach*

den fallenden Potenzen von x geordneten Division eine Entwickelung entsteht, in der die Coefficienten der negativen Potenzen von x eine geometrische Reihe bilden. In der gleichen Weise bilden die vollständigen Ausdrücke, die auf der rechten Seite von (2) zu einander addirt werden

$$(4)\quad P_0 x^{-1} = \frac{r_0}{a_0} x^{-1},\ P_1 x^{-2} = -\frac{r_0 a_1}{a_0^2} x^{-2},\ P_2 x^{-3} = -\frac{r_0 a_1^2}{a_0^3} x^{-3}, \ldots$$
$$P_t x^{-t-1} = (-1)^t \frac{r_0 a_1^t}{a_0^{t+1}} x^{-t-1}$$

eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede $\frac{r_0}{a_0} x^{-1}$ *und dem Quotienten* $-\frac{a_1}{a_0} x^{-1}$. Wir sehen daher auf der rechten Seite von (2) *die Summe der* $(t+1)$ *ersten Glieder einer geometrischen Reihe,* und erhalten *einen geschlossenen Ausdruck dieser Summe,* sobald der ausserdem auf der rechten Seite von (2) auftretende Bruch durch Subtraction auf die linke Seite gebracht wird, wie folgt

$$(5)\quad \frac{r_0}{a_0 x + a_1} - \frac{(-1)^{t+1} \frac{r_0 a_1^{t+1}}{a_0^{t+1}} x^{-t-1}}{a_0 x + a_1} = \frac{r_0}{a_0} x^{-1} - r_0 \frac{a_1}{a_0^2} x^{-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^t \frac{r_0 a_1^t}{a_0^{t+1}} x^{-t-1}.$$

Der Quotient $-\frac{a_1}{a_0}$ ist derjenige Werth der Variable x, für welche die Function $a_0 x + a_1$ verschwindet, oder *die Wurzel der Gleichung des ersten Grades*

$$(6)\qquad a_0 \xi + a_1 = 0.$$

Durch die Einführung des Werthes $\xi = -\frac{a_1}{a_0}$ nimmt die Function $a_0 x + a_1$, wie in § 23, die Gestalt an

$$(7)\qquad a_0 x + a_1 = a_0 (x - \xi),$$

und die Entwickelung (2) geht in die folgende über

$$(8)\quad \frac{r_0}{a_0 (x-\xi)} = \frac{r_0}{a_0} x^{-1} + \frac{r_0}{a_0} \xi x^{-2} + \frac{r_0 \xi^2}{a_0^2} x^{-3} + \ldots$$
$$+ \frac{r_0 \xi^t}{a_0} x^{-t-1} + \frac{r_0 \xi^{t+1}}{a_0 (x-\xi)} x^{-t-1},$$

in der sich das Gesetz der auf einander folgenden Glieder noch deutlicher ausprägt.

§ 91. Ausführung der Division durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.

Für die allgemeine Erörterung der Gleichung (8) des § 89 ist es wesentlich, sich davon zu überzeugen, dass die Bestimmung der Coefficienten $P_\lambda, P_\mu, \ldots P_\omega$ und der zugehörigen constanten Grössen $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}$ immer nur *auf eine einzige Weise* möglich ist, und daher stets in derselben Weise erfolgen muss, welches Verfahren auch zu diesem Zweck eingeschlagen werde. Wir bezeichnen mit $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ eine Reihe von *unbestimmten Coefficienten* und mit $R_0^{(t)}, R_1^{(t)}, \ldots R_{n-1}^{(t)}$ eine Reihe von constanten Grössen, die dem jedesmaligen Werthe der Zahl t entsprechend bestimmt werden sollen. Für diese Werthe gelte die der Gleichung (8) des § 89 nachgebildete Gleichung

$$(1)\quad \frac{r(x)}{f(x)} = Q_0 x^{-1} + Q_1 x^{-2} + \ldots + Q_t x^{-t-1} + \frac{R_0^{(t)} x^{n-t-2} + R_1^{(t)} x^{n-t-3} + \ldots + R_{n-1}^{(t)} x^{-t-1}}{f(x)}.$$

Wenn man nun beide Seiten zuerst mit der Potenz x^{t+1} und hierauf mit der ganzen Function $f(x)$ multiplicirt, so muss für einen unbestimmten Werth von x die Gleichung gelten

$$(2)\quad x^{t+1} r(x) = f(x)(Q_0 x^t + Q_1 x^{t-1} + \ldots + Q_t) + R_0^{(t)} x^{n-1} + R_1^{(t)} x^{n-2} + \ldots + R_{n-1}^{(t)}.$$

Die linke Seite derselben ist eine ganze Function von x, und die rechte Seite giebt die ganzen Functionen an, welche bei einer mit der ganzen Function $f(x)$ zu vollziehenden Division den Quotienten und den Rest darstellen. Es liegt also eine Gleichung vor, die genau in der Gleichung (1) des § 89 enthalten ist, und nach der in § 68 begründeten Eigenschaft der letztern sind daselbst sowohl der Quotient wie auch der Rest eindeutig bestimmt. Das heisst in Bezug auf den vorliegenden Fall nichts anderes, als dass sowohl die Grösse $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ wie auch die zugehörigen Grössen $R_0^{(t)}, R_1^{(t)}, \ldots R_{n-1}^{(t)}$ eindeutig bestimmt sind. Weil nun nach dem vielfach und auch in § 68

gebrauchten Satze (1) des § 44 *bei zwei rationalen ganzen Functionen einer Variable x, die für ein unbestimmtes x einander gleich sind, die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x beziehungsweise einander gleich sein müssen,* so muss dies auch für die beiden Seiten der Gleichung (2) gelten. Die Gleichsetzung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x liefert daher, wenn man erwägt, dass die linke Seite

$$x^{t+1}\, r(x) = r_0\, x^{n+t} + r_1\, x^{n+t-1} + \ldots + r_{n-1}\, x^{t+1}$$

mit x^{n+t} beginnt und mit x^{t+1} aufhört, und wenn man auf der rechten Seite die Multiplication mit der Function $f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n$ wirklich ausführt, für die Annahme $t \geqq n$ zu der Bestimmung der Coefficienten $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ und der correspondirenden Constanten $R_0^{(t)}, R_1^{(t)}, \ldots R_{n-1}^{(t)}$ das System von Relationen

$$
\begin{array}{lll}
(3) & r_0 & = a_0\, Q_0 \\
 & r_1 & = a_0\, Q_1 + a_1\, Q_0 \\
 & r_2 & = a_0\, Q_2 + a_1\, Q_1 + a_2\, Q_0 \\
 & \cdots & \cdots \\
 & r_{n-1} & = a_0\, Q_{n-1} + a_1\, Q_{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, Q_0 \\
(4) & 0 & = a_0\, Q_n + a_1\, Q_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, Q_1 + a_n\, Q_0 \\
 & 0 & = a_0\, Q_{n+1} + a_1\, Q_n + \ldots + a_{n-1}\, Q_2 + a_n\, Q_1 \\
 & \cdots & \cdots \\
 & 0 & = a_0\, Q_t + a_1\, Q_{t+1} + \ldots + a_{n-1}\, Q_{t-n+1} + a_n\, Q_{t-n} \\
(5) & 0 & = a_1\, Q_t + \ldots + a_{n-1}\, Q_{t-n+2} + a_n\, Q_{t-n+1} + R_0^{(t)} \\
 & \cdots & \cdots \\
 & 0 & = a_{n-2}\, Q_t + a_{n-1}\, Q_{t-1} + a_n\, Q_{t-2} + R_{n-3}^{(t)} \\
 & 0 & = a_{n-1}\, Q_t + a_n\, Q_{t-1} + R_{n-2}^{(t)} \\
 & 0 & = a_n\, Q_t + R_{n-1}^{(t)}.
\end{array}
$$

Hier unterscheiden sich drei Gruppen von Relationen. Die Gruppe (3) rührt von den Potenzen x^{n+t} bis x^{t+1} her; die Gruppe (4) von den Potenzen x^t bis x^n; die Gruppe (5) von den Potenzen x^{n-1} bis x^0. Wenn die Zahl t kleiner ist, als die Zahl n, so gilt dagegen das System von Relationen

$$
\begin{array}{llllllllll}
(3^*) & r_0 & = a_0 Q_0 \\
& r_1 & = a_0 Q_1 + a_1 Q_0 \\
& \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& r_t & = a_0 Q_t + a_1 Q_{t-1} + \ldots + a_t Q_0 \\
(4^*) & r_{t+1} & = & a_1 Q_t & + \ldots + a_t Q_1 + a_{t+1} Q_0 & & + R_0^{(t)} \\
& \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& r_{n-1} & = & a_{n-t-1} Q_t & + \ \ldots \ + a_{n-1} Q_0 & & + R_{n-t}^{(t)} \\
(5^*) & 0 & = & a_{n-t} Q_t & + \ \ldots \ + a_{n-1} Q_1 + a_n Q_0 & & + R_{n-t-1}^{(t)} \\
& \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& 0 & = & & & a_n Q_t & + R_{n-1}^{(t)}.
\end{array}
$$

In demselben entspricht die Gruppe (3*) den Potenzen x^{n+t} bis x^n, die Gruppe (4*) den Potenzen x^{n-1} bis x^{t+1}, die Gruppe (5*) den Potenzen x^t bis x^0. Bei der Annahme $t = n - 1$ verschwindet die Gruppe (4*). Aus den gefundenen Relationen ergeben sich die Werthe der unbestimmten Coefficienten $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ nach einander durch die Auflösung von Gleichungen des ersten Grades und zwar so, dass, wenn diese Grössen zuerst unter der Voraussetzung eines bestimmten Werthes von t berechnet sind, und wenn die Rechnung später für einen grössern Werth $t' = t + \tau$ wiederholt wird, die zuerst berechneten $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ ihre ursprünglichen Werthe behalten. Dies folgt unmittelbar aus der Beschaffenheit der Gruppen von Relationen (3*) und (3). *Die Ausführung der Division durch die Methode der unbestimmten Coefficienten besteht in der Determination der Grössen $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ vermöge der successiven Auflösung der bezeichneten Gleichungen.* Da es sich nun gezeigt hat, dass diese Grössen immer nur auf eine einzige Weise bestimmbar sind, und dass für einen gegebenen Werth von t die zugehörigen Grössen $R_0^{(t)}, R_1^{(t)}, \ldots R_{n-1}^{(t)}$ ebenfalls vollständig bestimmte Werthe erhalten, so müssen auch die in der Gleichung (8) des § 89 vorkommenden Coefficienten $P_\lambda, P_\mu, \ldots$ mit den gleichnamigen Grössen der Reihe $Q_0, Q_1, \ldots$ zusammenfallen, und es muss, wenn $t = \omega$ gesetzt wird,

$$S_0 = R_0^{(t)},\ S_1 = R_1^{(t)}, \ldots S_{n-1} = R_{n-1}^{(t)}$$

sein. Dass in der Reihe der Coefficienten $P_\lambda, P_\mu, \ldots$ nicht alle

Zeiger vertreten zu sein scheinen, während in der Reihe der Grössen $Q_0, Q_1, \ldots$ alle Zeiger vorkommen, erklärt sich daraus, dass bei dem Verfahren der nach den fallenden Potenzen der Variable geordneten Division diejenigen Glieder hervortreten, *deren Coefficienten nicht gleich Null* sind. Bei der Methode der unbestimmten Coefficienten ergiebt erst die ausgeführte Rechnung, welche Coefficienten den Werth Null erhalten und welche von Null verschieden sind. Es müssen aber für jeden gegebenen Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ aus den mitgetheilten Gründen alle diejenigen Grössen der Reihe $Q_0, Q_1, \ldots$ gleich Null sein, deren Zeiger in der Reihe der entsprechenden Grössen $P_\lambda, P_\mu, \ldots$ nicht enthalten sind.

§ 92. Recurrente Reihen von verschiedener Ordnung. Ausdruck der Summe einer Anzahl von auf einander folgenden Gliedern einer recurrenten Reihe.

Die Relationen (3) und (4) des vorigen § dienen in der Weise zu der Bestimmung der Coefficienten $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$, dass zuerst $Q_0 = -\frac{r_0}{a_0}$ erhalten wird, hierauf Q_1, und überhaupt jede neue Grösse mit Hülfe von schon bestimmten vorhergehenden vermittelst Addition, Subtraction, Multiplication und einer Division durch den Coefficienten a_0, der nach der getroffenen Voraussetzung nicht gleich Null sein darf. Da also die Bestimmung jeder einzelnen Grösse auf die Bestimmung von vorhergehenden zurückgeht, so braucht man den Ausdruck, dass die Grössen $Q_0, Q_1, \ldots Q_t$ *eine recurrente Reihe* bilden. In der Gruppe von Relationen

$$(1)\qquad \begin{aligned} r_0 &= a_0 Q_0 \\ r_1 &= a_0 Q_1 + a_1 Q_0 \\ r_2 &= a_0 Q_2 + a_1 Q_1 + a_2 Q_0 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_{n-1} &= a_0 Q_{n-1} + a_1 Q_{n-2} + \ldots + a_{n-1} Q_0 \end{aligned}$$

steigt die Anzahl der Glieder, die zu der Bildung eines neuen verwendet werden, fortwährend um Eins. *Von dem Gliede Q_n ab tritt jedoch eine vollständige Regelmässigkeit ein, indem jedes*

Glied Q_t, bei dem $t \gtreqless n$ ist, aus den n vorhergehenden Gliedern durch die Gleichung

$$(2) \qquad 0 = a_0 Q_t + a_1 Q_{t-1} + \ldots + a_n Q_{t-n}$$

determinirt wird. Darauf gründet sich die Eintheilung der recurrenten Reihen. *Die Ordnung einer recurrenten Reihe wird durch den Werth der zugehörigen Zahl n ausgedrückt und die Gleichung* (2) *bildet die zu der betreffenden Reihe gehörende scala relationis.* Hiernach ist die geometrische Reihe eine recurrente Reihe der ersten Ordnung.

In der angestellten Betrachtung ist die Definition einer recurrenten Reihe der $n$ten Ordnung aus der nach den negativen Potenzen der Variable x fortschreitenden Entwickelung des Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ hervorgegangen. Eine Reihe von Grössen wird aber schon allein durch die Eigenschaft zu einer recurrenten Reihe der $n$ten Ordnung, dass jedes Glied derselben, vom $(n+1)$ten Gliede ab, gleich einem Ausdrucke des ersten Grades in Bezug auf die n vorhergehenden Glieder mit festen Coefficienten ist. Wenn das betreffende Gesetz gegeben ist, und die n ersten Glieder beliebig gegeben sind, so sind alle übrigen Glieder vollständig bestimmt. Für jede solche Reihe lässt sich ein Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ bilden, durch dessen nach den negativen Potenzen der Variable x ausgeführte Entwickelung die betreffende Reihe entsteht. Es gelte bei der Reihe von Grössen $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1 \ldots$ für jede Zahl t, die gleich oder grösser als n ist, die Gleichung

$$(3) \qquad \mathfrak{L}_t = b_1 \mathfrak{L}_{t-1} + b_2 \mathfrak{L}_{t-2} + \ldots + b_n \mathfrak{L}_{t-n},$$

wo $b_1, b_2, \ldots b_n$ von der Zahl t unabhängig gegebene Grössen sind. Diese Gleichung ist in der Gleichung (2) enthalten, wofern in der letztern $a_0 = 1$, $a_1 = -b_1, \ldots a_n = -b_n$ genommen wird, und die Grössen Q durch die gleichnamigen Grössen $\mathfrak{L}$ ersetzt werden. Die ganze Function $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ erhält demgemäss die Gestalt $f(x) = x^n - b_1 x^{n-1} - \ldots - b_n$. Es seien ausserdem die n ersten Grössen $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots \mathfrak{L}_{2-1}$ beliebig gegeben; aus denselben kann man eine Reihe von Grössen $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ folgendermassen bestimmen

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
r_0 &= \mathfrak{L}_0 \\
r_1 &= \mathfrak{L}_1 - b_1\,\mathfrak{L}_0 \\
r_2 &= \mathfrak{L}_2 - b_1\,\mathfrak{L}_1 - b_2\,\mathfrak{L}_0 \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
r_{n-1} &= \mathfrak{L}_{n-1} - b_1\,\mathfrak{L}_{n-2} - \ldots - b_{n-1}\,\mathfrak{L}_0,
\end{aligned}
$$

dann entsprechen dieselben genau den Grössen $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$, welche in den Relationen (1) auftreten.

Wenn man nun mit den in (4) determinirten Grössen $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ den Bruch

$$\frac{r(x)}{f(x)} = \frac{r_0\,x^{n-1} + r_1\,x^{n-2} + \ldots + r_{n-1}}{x^n - b_1\,x^{n-1} - b_2\,x^{n-2} - \ldots - b_n}$$

herstellt, so muss offenbar aus dessen Entwickelung in der behaupteten Weise die Reihe $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots$ entspringen.

In § 90 ist bemerkt worden, dass, wenn die Zahl n gleich Eins ist, sowohl die Grössen $P_0, P_1, \ldots$, wie auch die Grössen $P_0\,x^{-1}, P_1\,x^{-2}, \ldots$ eine geometrische Reihe bilden, und es ist für die Summe der $t+1$ ersten Glieder der letztern Reihe in (5) ein geschlossener Ausdruck gegeben. Aehnliches kann für einen beliebigen Werth der Zahl n geschehen. Dass unter Beibehaltung der in dem gegenwärtigen § gebrauchten Bezeichnungen die Grössen

$$Q_0\,x^{-1}, Q_1\,x^{-2}, \ldots$$

ebenfalls eine recurrente Reihe der $n$ten Ordnung darstellen, folgt aus dem Umstande, dass, weil für jede Zahl t, die $\overline{\gtrless}\, n$ ist, die Gleichung (2) gilt, für dieselbe Zahl t auch die Gleichung

$$(5)\quad 0 = a_0 x^n\left(Q_t x^{-t-1}\right) + a_1 x^{n-1}\left(Q_{t-1}\,x^{-t}\right) + \ldots + a_n\left(Q_{t-n} x^{-t+n-1}\right)$$

erfüllt sein muss. Diese Gleichung giebt an, auf welche Weise das Glied $Q_t\,x^{-t-1}$ aus den n vorhergehenden Gliedern bestimmt wird und übernimmt die Rolle, welche die Gleichung (2) für die Glieder der Reihe $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ spielt. Einen *geschlossenen Ausdruck für die Summe der* $(t+1)$ *ersten Glieder der recurrenten Reihe* $Q_0\,x^{-1}, Q_0\,x^{-2}, \ldots$ liefert die Gleichung (1) des § 91 in der folgenden Weise

$$(6)\qquad \frac{r(x)}{f(x)} - \frac{R_0^{(t)} x^{n-t-2} + R_1^{(t)} x^{n-t-3} + \ldots + R_{n-1}^{(t)} x^{-t-1}}{f(x)}$$
$$= Q_0 x^{-1} + Q_1 x^{-2} + \ldots + Q_t x^{-t-1}.$$

Diese Gleichung so wie die Gleichung, aus der sie abgeleitet ist, gilt für jeden Werth der Grösse x, mit Ausnahme der Werthe, für welche die im Nenner befindliche Function $f(x)$ verschwindet; denn eine Division durch die Null ist unzulässig. In der auf die geometrische Reihe bezüglichen Formel (5) des § 90 ist der einzige Ausnahmewerth die Grösse $\xi = -\frac{a_1}{a_0}$.

§ 93. Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function einer Variable in Partialbrüche. Zerlegung einer recurrenten Reihe in partielle recurrente Reihen.

Wenn die Function $f(x)$, die den Nenner des echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ bildet, als das Product von zwei ganzen Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ darstellbar ist, die keinen gemeinsamen Theiler haben, so entsteht die Aufgabe, den Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ als ein Aggregat von zwei Brüchen auszudrücken, deren Nenner die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, und deren Zähler respective die ganzen Functionen $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ sind,

$$(1)\qquad \frac{r(x)}{f(x)} = \frac{\varrho_1(x)}{f_1(x)} + \frac{\varrho_2(x)}{f_2(x)}.$$

Nach der Analogie der bei den ganzzahligen Brüchen üblichen Bezeichnung, die in § 37 erwähnt ist, wird die so eben gestellte Aufgabe *die Zerlegung des Bruches* $\frac{r(x)}{f(x)}$ *in Partialbrüche* genannt. Durch Multiplication mit dem Nenner $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ nimmt die Gleichung (1) die Gestalt an

$$(2)\qquad r(x) = \varrho_1(x)\, f_2(x) + \varrho_2(x)\, f_1(x),$$

welche mit der Gleichung (1) des § 69 übereinstimmt, sobald in der letztern die Zeichen $\theta(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ beziehungsweise durch die Zeichen $r(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varrho_2(x)$, $\varrho_1(x)$ ersetzt werden. Aus der am genannten Orte angestellten Erörterung folgt unmittelbar, dass die in (2) ausgedrückte Forderung

stets erfüllt werden kann, da die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, vermöge der getroffenen Annahme keinen gemeinsamen Theiler haben; zugleich ist dort eine Methode zur Bestimmung der gesuchten ganzen Functionen $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ mitgetheilt worden.

Für die Frage, die uns jetzt beschäftigt, kommt ausserdem in Betracht, dass die gegebene Function $r(x)$ von niedrigerem Grade ist als das Product $f_1(x)\, f_2(x)$ oder die Function $f(x)$. Wenn die Methode des § 69 für $\varrho_1(x)$ die Function $P_1(x)$ und für $\varrho_2(x)$ die Function $P_2(x)$ liefert, so können wegen jenes Umstandes zwei Functionen $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ abgeleitet werden, von denen die erstere niedrigeren Grades ist als die Function $f_1(x)$ und die zweite niedrigeren Grades als die Function $f_2(x)$.

Wir nehmen zuerst an, $P_1(x)$ habe nicht die Eigenschaft, niedrigeren Grades zu sein als $f_1(x)$. Dann lässt sich $P_1(x)$ durch $f_1(x)$ dividiren, so dass als Quotient die ganze Function $\sigma_1(x)$ und als Rest die ganze Function $\tau_1(x)$ erscheint, die von niedrigerem Grade als $f_1(x)$ ist, und

(3) $$P_1(x) = \sigma_1(x)\, f_1(x) + \tau_1(x)$$

wird. Für den Fall, dass $P_1(x)$ niedrigeren Grades als $f_1(x)$ ist, bedarf es der angestellten Division nicht; um aber durch (3) beide Fälle zugleich zu umfassen, wird festgesetzt, dass die Function $\tau_1(x)$ auch verschwinden könne, wobei $P_1(x) = \tau_1(x)$ ist. Die von den Functionen $P_1(x)$ und $P_2(x)$ befriedigte Gleichung

(4) $$r(x) = P_1(x)\, f_2(x) + P_2(x)\, f_1(x)$$

verwandelt sich durch (3) in die folgende

(5) $$r(x) = \tau_1(x)\, f_2(x) + (P_2(x) + \sigma_1(x)\, f_2(x))\, f_1(x),$$

und, sobald

(6) $$P_2(x) + \sigma_1(x)\, f_2(x) = \tau_2(x)$$

gesetzt wird, in die Gleichung

(7) $$r(x) = \tau_1(x)\, f_2(x) + \tau_2(x)\, f_1(x).$$

Dieselbe drückt aus, dass der Forderung (2) Genüge geleistet wird, indem $\tau_1(x)$ für $\varrho_1(x)$ und $\tau_2(x)$ für $\varrho_2(x)$ eintritt. Es ist aber die Function $\tau_1(x)$ vermöge ihrer Entstehung niedrigeren Grades als die Function $f_1(x)$, und die Function $\tau_2(x)$ muss niedrigeren Grades als die Function $f_2(x)$ sein, weil sonst aus der Gleichung (7) ein Widerspruch folgen würde. Denn wäre $\tau_2(x)$ mit der Function $f_2(x)$ von gleichem Grade oder von

noch höherem Grade, so müsste das Product $\tau_2(x)\, f_1(x)$ von einem Grade sein, der gleich oder grösser wäre als der Grad n des Products $f_1(x)\, f_2(x) = f(x)$. Andrerseits ist $r(x)$ nach der bestehenden Voraussetzung von niedrigerem Grade als n, und das Product $\tau_1(x)\, f_2(x)$ desgleichen, mithin auch die Differenz $r(x) - \tau_1(x)\, f_2(x)$, welche nach (7) dem Product $\tau_2(x)\, f_1(x)$ gleich ist. Eine Function von x kann aber einer Function von x, die von niedrigerem Grade ist, für ein unbestimmtes x nach § 44 unmöglich gleich sein, also bestätigt es sich, dass die Functionen $\tau_1(x)$ und $\tau_2(x)$ eine Lösung von (1) darstellen, bei der gleichzeitig $\tau_1(x)$ von niedrigerem Grade ist als $f_1(x)$ und $\tau_2(x)$ von niedrigerem Grade als $f_2(x)$. Hiemit ist der Satz bewiesen, *dass, wenn die Function $f(x)$ gleich dem Product der ganzen Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist, die keinen gemeinsamen Theiler haben, der echte Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ in ein Aggregat von zwei echten Brüchen zerlegt werden kann, deren Nenner die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind.*

Es möge von hier ab die Gleichung (1) eine Zerlegung des Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ bezeichnen, bei der die oben definirten Functionen $\tau_1(x)$ und $\tau_2(x)$ beziehungsweise für $\varrho_1(x)$ und $\varrho_2(x)$ genommen sind. Der Grad der Function $f_1(x)$ werde mit m_1, der Grad der Function $f_2(x)$ mit m_2 angegeben, so dass $n = m_1 + m_2$ ist. Nun ist es möglich, sowohl den echten Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ wie auch jeden der beiden echten Brüche $\frac{\varrho_1(x)}{f_1(x)}$ und $\frac{\varrho_2(x)}{f_2(x)}$ nach dem Vorbilde der Gleichung (1) des § 91 in eine Reihe zu entwickeln, die nach den negativen Potenzen der Variable x fortschreitet und bis zu einer beliebigen, für alle drei Brüche übereinstimmend gewählten Potenz x^{-t-1} ausgedehnt wird. Der Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ wird alsdann gleich dem Aggregat eines dort angegebenen Restbruches und der Summe

$$(8) \qquad Q_0 x^{-1} + Q_0 x^{-2} + \ldots + Q_t x^{-t-1},$$

der Bruch $\frac{\varrho_1(x)}{f_1(x)}$ gleich dem Aggregat eines entsprechend zu bil-

denden Restbruches und der Summe

(9) $$A_0 x^{-1} + A_1 x^{-2} + \ldots + A_t x^{-t-1},$$

der Bruch $\frac{\varrho_2(x)}{f_2(x)}$ gleich dem Aggregat eines ebenfalls entsprechend zu bildenden Restbruches und der Summe

(10) $$B_0 x^{-1} + B_1 x^{-2} + \ldots + B_t x^{-t-1}.$$

Hier sind Q_0, Q_1, $\ldots$ Q_t *die Glieder einer recurrenten Reihe der nten Ordnung*, A_0, A_1, $\ldots$ A_t *die Glieder einer recurrenten Reihe der* m_1*ten Ordnung*, B_0, B_1, $\ldots$ B_t *die Glieder einer recurrenten Reihe der* m_2*ten Ordnung*. Durch Schlüsse, welche den in § 91 gebrauchten ähnlich sind, ergiebt sich nunmehr, dass die Summe (8), mit der Potenz x^{t+1} multiplicirt, dem mit der Potenz x^{t+1} multiplicirten Aggregate der Summen (8) und (10) gleich sein muss, und daraus folgen die Gleichungen

(11) $$Q_0 = A_0 + B_0,\ Q_1 = A_1 + B_1,\ \ldots\ Q_t = A_t + B_t.$$

Die positive ganze Zahl t darf hier jeden beliebigen Werth erhalten. *Mithin drückt die Gleichung* $Q_t = A_t + B_t$ *die Thatsache aus, dass das allgemeine Glied* Q_t *einer recurrenten Reihe der nten Ordnung gleich der Summe der gleichnamigen Glieder* $A_t + B_t$ *von zwei recurrenten Reihen der* m_1*ten und* m_2*ten Ordnung ist.* Hierin besteht *die Zerlegung einer recurrenten Reihe der nten Ordnung in zwei Reihen von niedrigerer Ordnung.*

Die Analogie der Zerlegung des echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ mit der Zerlegung eines ganzzahligen Bruches lässt sich auch auf die in § 38 mitgetheilten Betrachtungen erstrecken. Der Process der Zerlegung in echte Brüche kann auf jeden der beiden echten Brüche $\frac{\varrho_1(x)}{f_1(x)}$ und $\frac{\varrho_2(x)}{f_2(x)}$ angewendet werden, sobald der betreffende Nenner gleich einem Product von zwei ganzen Functionen ist, die ohne gemeinsamen Theiler sind. Wofern nun für die Function $f(x)$ eine Darstellung existirt

(12) $$f(x) = F_1(x)\ F_2(x)\ \ldots\ F_\lambda(x),$$

bei der keine der ganzen Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots$ $F_\lambda(x)$ mit einer der andern einen gemeinsamen Theiler hat, so führt eine angemessene Wiederholung des mitgetheilten Verfahrens nach

und nach zu einer Zerlegung des echten Bruches in lauter echte Brüche von den Nennern $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_\lambda(x)$,

$$(13) \qquad \frac{r(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{F_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{F_2(x)} + \dots + \frac{\varphi_\lambda(x)}{F_\lambda(x)}.$$

Aus der Voraussetzung, dass keine der Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... mit einer andern einen gemeinsamen Theiler habe, folgt nämlich, was zu der successiven Benutzung des Verfahrens genügt, dass $F_1(x)$ mit dem Product $F_2(x)F_3..(x)..F_\lambda(x)$ ohne gemeinsamen Theiler ist, ferner $F_2(x)$ mit dem Product $F_3(x)F_4(x)..F_\lambda(x)$, u. s. f. Die betreffenden Schlüsse gründen sich auf *den Satz, dass, wenn eine Function $F_1(x)$ mit der Function $F_2(x)$ keinen gemeinsamen Theiler hat, das Product der ganzen Function $F_2(x)$ und der ganzen Function $G(x)$ jedoch durch die ganze Function $F_1(x)$ aufgeht, die letztere Function nothwendig in die Function $G(x)$ aufgehen muss.* Der Beweis dieses Satzes wird erhalten, indem man für die Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ das System von Gleichungen aufstellt, das in § 68 als (4) für die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ gebildet ist, und auf das bezeichnete System eine Betrachtung gleich derjenigen anwendet, durch welche in § 6 der Satz (1) hergeleitet ist.

Die in der Gleichung (13) *dargestellte Zerlegung des Bruches* $\frac{r(x)}{f(x)}$ *in ein Aggregat von echten Brüchen hat die ausgezeichnete Eigenschaft, nur auf eine einzige Weise möglich zu sein.* Gesetzt, es gäbe eine von der obigen verschiedene Zerlegung

$$\frac{r(x)}{f(x)} = \frac{\chi_1(x)}{F_1(x)} + \frac{\chi_2(x)}{F_2(x)} + \dots + \frac{\chi_\lambda(x)}{F_\lambda(x)}$$

von der gleichen Beschaffenheit, so würde durch Subtraction und hierauf erfolgende Multiplication mit dem Product

$$F_1(x)F_2(x)F_3(x)..F_\lambda(x)$$

die Gleichung entstehen

$$(\varphi_1(x) - \chi_1(x))F_2(x)F_3(x)\dots F_\lambda(x) + (\varphi_2(x) - \chi_2(x))F_1(x)F_3(x)$$
$$..F_\lambda(x) + \dots + (\varphi_\lambda(x) - \chi_\lambda(x))F_1(x)F_2(x)\dots F_{\lambda-1}(x) = 0.$$

Die Summe aller Glieder vom zweiten bis zum letzten einschliesslich ist hier gleich einer durch die ganze Function $F_1(x)$ theilbaren ganzen Function; mithin muss auch das erste Glied durch die ganze Function $F_1(x)$ theilbar sein. Nun ist aber die

ganze Function $F_1(x)$ ohne gemeinsamen Theiler mit jeder der Functionen $F_2(x)$, $F_3(x), \ldots F_\lambda(x)$, folglich auch mit dem Product $F_2(x) F_3(x) \ldots F_\lambda(x)$, und muss deshalb vermöge des so eben angeführten Satzes in die Function $\varphi_1(x) - \chi_1(x)$ aufgehen. Dies aber ist unmöglich, weil sowohl $\varphi_1(x)$ wie auch $\chi_1(x)$ und daher auch die Differenz nach der Voraussetzung niedrigeren Grades ist als $F_1(x)$, und weil nach dem Cocollar zu Satz (2) des § 44 eine Function höheren Grades niemals in eine Function niedrigeren Grades aufgehen kann. Also kann die in der Gleichung (6) enthaltene Zerlegung, wie behauptet worden, nur auf eine einzige Weise ausgeführt werden.

Wird der Grad der Functionen $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots F_\lambda(x)$ beziehungsweise mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\lambda$ bezeichnet, wobei $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_\lambda = n$ ist, so haben die in (6) auftretenden Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ die Gestalt

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x) = G_0^{(1)} x^{\mathfrak{a}_1 - 1} + G_1^{(1)} x^{\mathfrak{a}_1 - 2} + \ldots + G_{\mathfrak{a}_1 - 1}^{(1)} \\ \varphi_2(x) = G_0^{(2)} x^{\mathfrak{a}_2 - 1} + G_1^{(2)} x^{\mathfrak{a}_2 - 2} + \ldots + G_{\mathfrak{a}_2 - 1}^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_\lambda(x) = G_0^{(\lambda)} x^{\mathfrak{a}_\lambda - 1} + G_1^{(\lambda)} x^{\mathfrak{a}_\lambda - 2} + \ldots + G_{\mathfrak{a}_\lambda - 1}^{(\lambda)}. \end{cases}$$

Nun folgt aus (6) durch Multiplication mit dem Nenner $f(x)$ die Gleichung

$$(15) \quad r(x) = \varphi_1(x) \frac{f(x)}{F_1(x)} + \varphi_1(x) \frac{f(x)}{F_2(x)} + \ldots + \varphi_\lambda(x) \frac{f(x)}{F_\lambda(x)},$$

wo durch den Quotienten $\frac{f(x)}{F_1(x)}$ die ganze Function $F_2(x) F_3(x) \ldots F_\lambda(x)$ angedeutet wird und von den übrigen Quotienten das entsprechende gilt. Wenn man hier die Ausdrücke (14) der Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ substituirt, so befindet sich links und rechts eine rationale ganze Function der Variable x vom $(n-1)$ten Grade, und es müssen die Coefficienten der gleich hohen Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich sein. Dies sind auf der linken Seite die Coefficienten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ der gegebenen Function $r(x)$, dagegen auf der rechten Seite Ausdrücke, welche die Coefficienten $G_0^{(1)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_1-1}^{(1)}, G_0^{(2)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_2-1}^{(2)}, \ldots G_0^{(\lambda)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_\lambda-1}^{(\lambda)}$ im ersten

Grade und mit bekannten Factoren multiplicirt enthalten. Die Anzahl der in den Functionen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ vorkommenden Coefficienten ist gleich $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots \mathfrak{a}_n$, das heisst gleich der Zahl n, und die Anzahl der zu bildenden Gleichungen oder die Anzahl der Grössen $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ ist ebenfalls gleich n. Hiernach müssen die n Coefficienten $G_0^{(1)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_1-1}^{(1)}, \ldots G_0^{(\lambda)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_\lambda-1}^{(\lambda)}$ einem System von n Gleichungen des ersten Grades genügen, und es leuchtet ein, dass wenn dieses System befriedigt ist, für die mit den betreffenden Coefficienten gebildeten Functionen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ die Gleichung (15) und daher auch die Gleichung (13) gilt. *Also kann man jenes System von n Gleichungen des ersten Grades aufstellen, und die Auflösung desselben zu der Bestimmung der Functionen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ benutzen.*

Indessen ist vorhin nachgewiesen worden, dass die Bestimmung der verlangten Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ immer möglich und zwar nur auf eine einzige Weise möglich ist. Daher wissen wir im voraus, *dass das zu der Determination der Coefficienten $G_0^{(1)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_1-1}^{(1)}, \ldots G_0^{(\lambda)}, \ldots G_{\mathfrak{a}_\lambda-1}^{(\lambda)}$ dienende System von n Gleichungen des ersten Grades eine Auflösung gestattet und zwar nur eine einzige Auflösung.* Nach den Betrachtungen des § 74 und 75 haben diejenigen und nur diejenigen Systeme von Gleichungen des ersten Grades diese Eigenschaft, bei denen die zugehörige Determinante nicht gleich Null ist. Also muss bei dem in Rede stehenden System von n Gleichungen die zugehörige Determinante einen von Null verschiedenen Werth haben, und die Auflösung kann nach den auf diesen Fall bezüglichen Vorschriften erhalten werden.

Alle bisherigen Betrachtungen über die Zerlegung des Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche beziehen sich auf die Voraussetzung, dass $f(x)$ gleich dem Producte von ganzen Functionen $F_1(x) F_2(x) \ldots F_\lambda(x)$ sei, lassen aber die Frage vollkommen unberührt, wann solche Zerlegung möglich sei, und wie sie für den Fall der Möglichkeit erhalten werden könne. Die Betrachtungen sind daher davon vollkommen unabhängig, ob der Fundamentalsatz von der Zerlegbarkeit der ganzen Functionen einer

Variable in Factoren des ersten Grades schon bewiesen ist oder nicht. Wenn dagegen von diesem Satze Gebrauch gemacht wird, so ist es auch leicht, die zulässigen Zerlegungen der Function $f(x)$ in solche Factoren zu übersehen, von denen kein Paar einen gemeinsamen Theiler hat. Wir nehmen gegenwärtig für die Function $f(x)$ die in § 67 begründete Zerlegung in Factoren des ersten Grades als gegeben an, vereinigen aber die gleichen Factoren zu Potenzen, so dass die Darstellung (6) des § 45 entsteht

$$(16)\qquad f(x) = a_0\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}\,(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_2}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda},$$

in der die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ sämmtlich unter einander verschieden sind. Dann muss nach den Ausführungen des § 67 jeder Theiler von $f(x)$ bis auf einen constanten Factor ein Product von positiven Potenzen der Ausdrücke $x-\xi_1, \ldots x-\xi_\lambda$ sein, bei dem die Potenzexponenten beziehungsweise nicht grösser sind als die Zahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_\lambda$. Ferner haben irgend zwei von diesen Theilern dann und nur dann keinen gemeinsamen Theiler, wenn die in der einen Function auftretenden Basen $x-\xi_1, \ldots x-\xi_\lambda$ von den in der andern Function auftretenden Basen verschieden sind. Die Zerlegbarkeit der Function $f(x)$ in Factoren, von denen kein Paar einen gemeinsamen Factor hat, erreicht daher ihren Abschluss, indem jede einzelne Potenz als einzelner Factor genommen wird. Wir setzen demgemäss

$$(16^*)\qquad F_1(x) = (x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}, \ldots F_\lambda(x) = (x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda},$$

wodurch unter Hinzuziehung der Gleichung $a_0 = 1$ eine Uebereinstimmung mit den früheren Bezeichnungen hergestellt wird. Die Gleichung (13) verwandelt sich alsdann in die Gleichung

$$(17)\qquad \frac{r(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-\xi_2)^{\mathfrak{a}_2}} + \ldots + \frac{\varphi_\lambda(x)}{(x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}},$$

und die n Coefficienten der in (14) explicite angegebenen Functionen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\lambda(x)$ werden nach den aufgestellten Vorschriften durch die Auflösung eines Systems von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten eindeutig bestimmt.

Bei denjenigen Brüchen $\dfrac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}}, \ldots \dfrac{\varphi_\lambda(x)}{(x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}}$, deren Nenner von höherem als dem ersten Grade ist, kann dadurch

noch eine weitere Zerlegung herbeigeführt werden, dass die in einem Zähler befindliche ganze Function mit Hülfe des in § 49 mitgetheilten Satzes (9) nach den positiven Potenzen der Basis der in dem zugeordneten Nenner vorkommenden Potenz entwickelt wird. Es sei beispielsweise die Zahl α_1 grösser als die Einheit, die successiven Ableitungen der Function des (α_1-1)ten Grades $\varphi_1(x)$ werden wie an der angeführten Stelle durch Hinzufügen von Accenten bezeichnet, dann hat man in Folge jenes Satzes, indem $\varphi_1(x)$ für $f(x)$, $x-\xi_1$ für z eintritt, die Gleichung

$$(18)\quad \varphi_1(x)=\varphi_1(\xi_1)+\varphi'_1(\xi_1)(x-\xi_1)+\frac{\varphi''_1(\xi_1)}{2!}(x-\xi_1)^2+\dots$$
$$+\frac{\varphi_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1)}{(\alpha_1-1)!}(x-\xi_1)^{\alpha_1-1}.$$

Aus derselben folgt durch Division mit der Potenz $(x-\xi_1)^{\alpha_1}$ die Gleichung

$$(18^*)\quad \frac{\varphi_1(x)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1}}=\frac{\varphi_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1}}+\frac{\varphi'_1(\xi_1)}{(x-\xi_1)^{\alpha_1-1}}+\dots+\frac{1}{(\alpha_1-1)!}\frac{\varphi_1^{(\alpha_1-1)}(\xi_1)}{x-\xi_1}.$$

Auf diese Weise entsteht ein Aggregat von Brüchen, deren sämmtliche Zähler Constanten sind, und deren Nenner durch die Potenzen der Basis $x-\xi_1$ von der ersten bis zu der $\alpha_1$ten gebildet werden. Ein Gleiches gilt für jeden andern auf der rechten Seite von (17) befindlichen Bruch, dessen Nenner die Eigenschaft besitzt von höherem als dem ersten Grade zu sein; ist der Nenner vom ersten Grade, so bedarf der Bruch der bezeichneten Umformung nicht. Der echte Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ wird demnach gleich einem Aggregat von n Brüchen, deren sämmtliche Zähler Constanten und deren Nenner die Potenzen

$$(x-\xi_1),\ (x-\xi_1)^2,\dots(x-\xi_1)^{\alpha_1}$$
$$(x-\xi_2),\ (x-\xi_2)^2,\dots(x-\xi_2)^{\alpha_2}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(x-\xi_\lambda),\ (x-\xi_\lambda)^2,\dots(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda}$$

sind. Jeder dieser Brüche bringt, nach den negativen Potenzen der Variable x entwickelt, eine recurrente Reihe hervor, deren Ordnung durch den Grad des betreffenden Nenners bezeichnet wird; der Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ erzeugt die oben erörterte recurrente Reihe

der $n$ten Ordnung, und aus den vorhin entwickelten Grundsätzen folgt für die betreffenden Coefficienten eine Reihe von Gleichungen, die den Gleichungen (11) entsprechen und die Zerlegung der recurrenten Reihe der $n$ten Ordnung in n partielle recurrente Reihen darstellen. Diese partiellen Reihen sind sämmtlich von niedrigerer Ordnung als der $n$ten, den einzigen Fall ausgenommen, dass die Function $f(x)$ nur eine einzige Potenz einer Function ersten Grades $x-\xi_1$ enthält; dann wird nämlich der Potenzexponent $\mathfrak{a}_1$ der Zahl n selbst gleich, und es erscheint eine partielle recurrente Reihe der $n$ten Ordnung.

§ 94. Recurrente Darstellung der Summen der gleich hohen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten der Gleichung.

Die bis jetzt entwickelten Eigenschaften der recurrenten Reihen können benutzt werden, um für n beliebig gegebene Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *die Summen der gleich hohen positiven ganzen Potenzen*, welche in § 59 unter *den symmetrischen Verbindungen der gegebenen Elemente* hervorgehoben sind, durch *die symmetrischen Grundverbindungen, die Summe der Elemente* $\Sigma_\alpha \xi_\alpha$, *die Summe der Producte von je zwei Elementen* $\Sigma_{\alpha,\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta$, u. s. f. *bis zu dem Producte aller Elemente* $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ auszudrücken. Es sei $f(x)$ gleich dem Product der mit der Variable x gebildeten Factoren $x-\xi_1, x-\xi_2, \ldots x-\xi_n$, dann folgen aus den beiden Darstellungen

$$(1) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

und

$$(2) \qquad f(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)$$

die in § 46 unter (4) mitgetheilten Gleichungen, in denen gegenwärtig $a_0 = 1$ zu setzen ist,

$$(3) \qquad \begin{cases} -a_1 = \Sigma_\alpha\, \xi_\alpha \\ \quad a_2 = \Sigma_{\alpha,\beta}\, \xi_\alpha \xi_\beta \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (-1)^n a_n = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n, \end{cases}$$

und es handelt sich um die Aufgabe, die Summen

$$(4) \qquad s_1 = \Sigma_\alpha\, \xi_\alpha, \; s_2 = \Sigma_\alpha\, \xi_\alpha^2, \; s_3 = \Sigma_\alpha\, \xi_\alpha^3, \ldots$$

vermittelst der Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ der Function $f(x)$ auszudrücken. Wie man sieht, können die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ als die n Wurzeln der Gleichung $f(\xi) = 0$ aufgefasst werden, deren Coefficienten die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind.

Wir gehen von der Bemerkung aus, dass die nach den negativen Potenzen der Variable x fortschreitende Entwickelung des Bruches $\frac{1}{x-\xi}$ eine geometrische Reihe hervorbringt, bei der die Coefficienten nichts anderes sind als die aufeinander folgenden positiven ganzen Potenzen der Grösse ξ. In der Gleichung (8) des § 90 werde $\frac{r_0}{a_0} = 1$ und ξ successive gleich $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ gesetzt, so entstehen die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x-\xi_1} = x^{-1} + \xi_1 x^{-2} + \ldots + \xi_1^t x^{-t-1} + \dfrac{\xi_1^{t+1} x^{-t-1}}{x-\xi_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{1}{x-\xi_n} = x^{-1} + \xi_n x^{-2} + \ldots + \xi_n^t x^{-t-1} + \dfrac{\xi_n^{t+1} x^{-t-1}}{x-\xi_n}\,. \end{cases}$$

Bei der Addition ihrer rechten Seiten kommt die Potenz x^{-1} die Zahl von n Malen vor, die Potenz x^{-2} erscheint mit der Summe $\Sigma_\alpha \xi_\alpha = s_1$, die Potenz x^{-3} mit der Summe $\Sigma_\alpha \xi_\alpha = s_1$, u. s. f., die Potenz x^{-t-1} mit der Summe $\Sigma_\alpha \xi_\alpha^t = s_t$ multiplicirt; daher führt die auf beiden Seiten vollzogene Addition zu der Gleichung

$$(6)\quad \frac{1}{x-\xi_1} + \frac{1}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{1}{x-\xi_n} = n x^{-1} + s_1 x^{-2} + s_1 x^{-3} + \ldots$$
$$+ s_t x^{-t-1} + \Sigma_\alpha \frac{\xi_\alpha^{t+1}}{x-\xi_\alpha} x^{-t-1},$$

wo der Buchstabe α, wie früher, die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchläuft. Nun kann die Summe $\frac{1}{x-\xi_1} + \frac{1}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{1}{x-\xi_n}$ in eine Gestalt gebracht werden, welche nur noch die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ enthält. Die im vorigen § benutzte Gleichung (9) des § 49 gilt für unbeschränkte Werthe der Grössen, die ursprünglich z und k genannt sind. Man darf deshalb für k die Grösse x, und für z eine beliebige andere Grösse h nehmen,

und hat für die Functionen $f(x+h)$ die Gleichung

$$(7) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

Wenn man dagegen in dem Ausdrucke (2) der Function $f(x)$ die Variable x durch das Aggregat $x+h$ ersetzt und darauf eine Entwickelung nach den Potenzen der Grösse h vornimmt, so kommt

$$\begin{aligned}(8) \quad & (x-\xi_1+h)(x-\xi_2+h)\ldots(x-\xi_n+h) \\ & = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n) \\ & + \{(x-\xi_2)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n) + (x-\xi_1)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n) + \ldots \\ & \qquad + (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n-1})\}\, h \\ & + \ldots \\ & + h^n.\end{aligned}$$

Hier sind x und h als durchaus von einander unabhängig veränderliche Grössen aufzufassen; mithin müssen auf der rechten Seite von (7) und von (8) die Coefficienten der gleich hohen Potenzen der Grösse h einander gleich sein. Das von h freie Glied ist offenbar die Function $f(x)$. Die Gleichsetzung des Coefficienten der Grösse h ergiebt aber die Gleichung

$$\begin{aligned}(9) \quad f'(x) = {} & (x-\xi_2)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n) + (x-\xi_1)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n) + \ldots \\ & + (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n-1}).\end{aligned}$$

Da von den Producten der rechten Seite das erste alle Factoren $x-\xi_1, \ldots x-\xi_n$ mit Ausnahme des ersten, das zweite alle Factoren mit Ausnahme des zweiten enthält, u. s. f., so stellt die rechte Seite den Zähler des Bruches dar, welchen die Addition des Aggregats $\frac{1}{x-\xi_1} + \frac{1}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{1}{x-\xi_n}$ ergiebt, nachdem alle Brüche auf den gemeinsamen Nenner $(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n) = f(x)$ gebracht sind. Deshalb besteht die Gleichung

$$(10) \qquad \frac{1}{x-\xi_1} + \frac{1}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{1}{x-\xi_n} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

wo $f'(x)$ die Function des $(n-1)$ten Grades bedeutet

$$(11) \qquad f'(x) = n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_1\,x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Auf diese Art verwandelt sich die Gleichung (6) in die Gleichung

$$(12)\qquad \frac{n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}$$
$$= n x^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \ldots + s_t x^{-t-1} + \Sigma_\alpha \frac{\xi_\alpha^{t+1}}{x - \xi_\alpha} x^{-t-1}.$$

Vermöge der im Vorigen erörterten Grundsätze lehrt dieselbe, *dass der auf der linken Seite befindliche echte Bruch* $\frac{f'(x)}{f(x)}$, *nach den negativen Potenzen der Variable x entwickelt, eine recurrente Reihe hervorbringt, deren aufeinander folgende Glieder, vom ersten ab gerechnet, aus der Zahl n und den Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots$ bestehen.*

Die Gleichungen (1) und (2) des § 92, auf den vorliegenden Fall angewendet, liefern somit eine recurrente Darstellung der Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots$ durch die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$, nämlich für die ersten $n-1$ Zahlen als Potenzexponenten durch die Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} (n-1) a_1 = s_1 + n a_1 \\ (n-2) a_2 = s_2 + a_1 s_1 + n a_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad a_{n-1} = s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \ldots + n a_{n-1}, \end{cases}$$

und für jede Zahl t, die $> n$ ist, durch die Gleichung

$$(14)\qquad 0 = s_t + a_1 s_{t-1} + a_2 s_{t-2} + \ldots + a_n s_{t-n}.$$

Die Gleichungen (13) und die zu $t = n$ gehörende Gleichung (14) lassen sich auch in die Gestalt bringen

$$(13^*)\qquad \begin{cases} 0 = s_1 + a_1 \\ 0 = s_2 + a_1 s_1 + 2 a_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \ldots + (n-1) a_{n-1} \\ 0 = s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + a_{n-1} s_1 + n a_n \end{cases}$$

aus welcher man ersehen kann, dass die Ausdrücke der Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ durch die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$, welche für einen bestimmten Werth der Gradzahl n gefunden sind, sich nicht verändern, sobald die gleichnamigen Potenzsummen für ein System von n' Elementen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n'}$ gesucht werden, bei dem $n' > n$ ist und

$(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{n'})=x^{n'}+a_1 x^{n'-1}+a_2 x^{n'-2}+\ldots+a_{n'-1}x+a_{n'}$, gesetzt wird. Die Auflösung des Systems (13*) giebt zuerst die Bestimmung $s_1=-a_1$, welche von vorne herein bekannt war, ferner nach und nach die Bestimmungen

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad s_2 &= a_1^2-2a_2 \\
s_3 &= -a_1^3+3a_1a_2-3a_3 \\
s_4 &= a_1^4-4a_1^2a_2+2a_2^2+4a_1a_3-4a_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Die erste von diesen ist in § 59 für $n=2$, die zweite für $n=3$ abgeleitet worden.

Die Betrachtungen des gegenwärtigen § gelten für jedes beliebige System von n Elementen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, und deshalb ebenso wohl wenn alle Elemente von einander differiren, wie auch wenn es vorkommt, dass mehrere derselben einem einzelnen gleich sind. Wenn für den letzten Fall die Elemente $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ von einander verschieden sind, und

$$(15)\qquad f(x)=(x-\xi_1)^{\alpha_1}(x-\xi_2)^{\alpha_2}\ldots(x-\xi_\gamma)^{\alpha_\lambda}$$

ist, so nimmt der Ausdruck (9) von $f'(x)$, indem die gleichen Summanden vereinigt werden, die Gestalt

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad f'(x) = {} & \alpha_1(x-\xi_1)^{\alpha_1-1}(x-\xi_2)^{\alpha_2}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda} \\
&+\alpha_2(x-\xi_1)^{\alpha_1}\ (x-\xi_2)^{\alpha_2-1}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda} \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\alpha_\lambda(x-\xi_1)^{\alpha_1}\ (x-\xi_2)^{\alpha_2}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda-1}
\end{aligned}
$$

an. Mithin hat die Function $f'(x)$ mit der Function $f(x)$ den gemeinsamen Theiler

$$(17)\qquad (x-\xi_1)^{\alpha_1-1}(x-\xi_2)^{\alpha_2-1}\ldots(x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda-1},$$

und es leuchtet ein, dass zu jedem Factor $(x-\xi_1)^{\alpha_1}, (x-\xi_2)^{\alpha_2}, \ldots (x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda}$ von $f(x)$ respective der Factor $(x-\xi_1)^{\alpha_1-1}, (x-\xi_2)^{\alpha_2-1}, \ldots (x-\xi_\lambda)^{\alpha_\lambda-1}$ von $f'(x)$ gehört. Diese Thatsache stimmt mit dem am Schlusse des § 49 mitgetheilten Satze überein. Die obige Gleichung (9) verwandelt sich unter der gegenwärtigen Voraussetzung in die Gleichung

$$(18)\qquad \frac{\alpha_1}{x-\xi_1}+\frac{\alpha_2}{x-\xi_2}+\ldots+\frac{\alpha_\lambda}{x-\xi_\lambda}=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

indem bei dem Bruche $\frac{f'(x)}{f(x)}$ der gemeinsame Theiler (17) herausfällt.

§ 95. Partialbruchzerlegung eines Bruches, dessen Nenner aus lauter ungleichen Factoren des ersten Grades besteht.

Die Zerlegung eines echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche, die in (17) des § 93 angegeben ist, gestaltet sich besonders einfach, sobald die Function $f(x)$ nur ungleiche Factoren des ersten Grades enthält. Alsdann werden die dortigen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$ sämmtlich gleich der Einheit, die Zahl $\lambda = n$, und die Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ reduciren sich respective auf die Constanten $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots g^{(n)}$. Demnach geht die genannte Gleichung (17) in die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{r(x)}{f(x)} = \frac{g^{(1)}}{x-\xi_1} + \frac{g^{(2)}}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{g^{(n)}}{x-\xi_n}$$

über. Um die Constanten $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots g^{(n)}$, die nach § 93 immer und nur auf eine einzige Art bestimmt werden können, auf eine besonders bequeme Art zu bestimmen, werden die beiden Seiten von (1) wieder mit $f(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)$ multiplicirt, so dass die Gleichung

$$(2) \qquad r(x) = g^{(1)}\frac{f(x)}{x-\xi_1} + g^{(2)}\frac{f(x)}{x-\xi_2} + \ldots + g^{(n)}\frac{f(x)}{x-\xi_n}$$

entsteht. Wenn man nun die Variable x durch eine der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ersetzt, etwa durch ξ_1, so verschwinden die Producte $\frac{f(x)}{x-\xi_2}, \ldots \frac{f(x)}{x-\xi_n}$ durch den in denselben enthaltenen Factor $x-\xi_1$, während das Product $\frac{f(x)}{x-\xi_1} = (x-\xi_2)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_n)$ den Werth $(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)\ldots(\xi_1-\xi_n)$ annimmt; dieser muss von der Null verschieden sein, weil nach der bestehenden Annahme keine der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ einer andern gleich ist. Aus der Gleichung (2) folgt also für die Grösse $g^{(1)}$ die Gleichung

$$(3) \qquad r(\xi_1) = g^{(1)}(\xi_1-\xi_2)\ldots(\xi_1-\xi_n),$$

und folgen durch die entsprechende Ueberlegung für $g^{(2)}, \ldots g^{(n)}$ die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} r(\xi_2) = g^{(2)}(\xi_2 - \xi_1)\ldots(\xi_2 - \xi_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r(\xi_n) = g^{(n)}(\xi_n - \xi_1)\ldots(\xi_n - \xi_{n-1}). \end{cases}$$

Diese Werthe, welche aus der Voraussetzung abgeleitet sind, dass die Gleichung (2) durch die Grössen $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots g^{(n)}$ befriedigt werde, müssen die Gleichung (2) in der That erfüllen, da die Bestimmung der Grössen $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots g^{(n)}$ möglich und zwar nur auf eine einzige Weise möglich ist. Die Producte, mit welchen in (4) die Grössen $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots g^{(n)}$ multiplicirt erscheinen, sind, wie aus der Gleichung (9) des vorigen § zu schliessen ist, gleich denjenigen Werthen, welche die Function $f'(x)$ annimmt, sobald man die Variable x beziehungsweise gleich den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ macht. Es wird daher

$$(5) \qquad g^{(1)} = \frac{r(\xi_1)}{f'(\xi_1)},\ g^{(2)} = \frac{r(\xi_2)}{f'(\xi_2)},\ \ldots\ g^{(n)} = \frac{r(\xi_n)}{f'(\xi_n)}.$$

Um ein Beispiel zu geben, sei

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 13x - 9,$$

und nach ausgeführter Zerlegung in Factoren des ersten Grades

$$f(x) = (x-1)(x-2-i\sqrt{5})(x-2+i\sqrt{5}),$$

ferner $\qquad r(x) = 7x^2 - 42x + 11.$

Dann ist das Schema der Partialbruchzerlegung, wofern $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2 + i\sqrt{5}$, $\xi_3 = 2 - i\sqrt{5}$ genommen wird, dieses

$$\frac{7x^2 - 42x + 11}{x^3 - 5x^2 + 13x - 9} = \frac{g^{(1)}}{x-1} + \frac{g^{(2)}}{x-2-i\sqrt{5}} + \frac{g^{(3)}}{x-2+i\sqrt{5}};$$

da $f'(x)$ gleich der Function $3x^2 - 10x + 13$ wird, liefern die Gleichungen (5) die Bestimmungen

$$g^{(1)} = \frac{r(1)}{f'(1)} \qquad = 1,$$

$$g^{(2)} = \frac{r(2+i\sqrt{5})}{f'(2+i\sqrt{5})} = 3 + 2i\sqrt{5},$$

$$g^{(3)} = \frac{r(2-i\sqrt{5})}{f'(2-i\sqrt{5})} = 3 - 2i\sqrt{5},$$

mithin ergiebt sich die gesuchte Zerlegung

$$\frac{7x^2 - 42x + 41}{x^3 - 5x^2 + 13x - 9} = \frac{1}{x-1} + \frac{3+2i\sqrt{5}}{x-2-i\sqrt{5}} + \frac{3-2i\sqrt{5}}{x-2+i\sqrt{5}}.$$

Aus der nach den negativen Potenzen der Variable x fortschreitenden Entwickelung des auf der linken Seite befindlichen Bruches entsteht nach (1) des § 91 das Aggregat der Summe $Q_0 x^{-1} + Q_1 x^{-2} + \dots Q_t x^{-t-1}$ und eines Restbruches, die Coefficienten $Q_0, Q_1, Q_2, \dots Q_t$ bilden nach § 92 *eine recurrente Reihe der dritten Ordnung*, und werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt, welche den Systemen (1) und (2) des § 92 entsprechen,

$$\begin{cases} 7 = Q_0 \\ -42 = Q_1 - 5\,Q_0 \\ 41 = Q_2 - 5\,Q_1 + 13\,Q_0, \end{cases}$$

und für $t \gtreqless 3$

$$0 = Q_t - 5\,Q_{t-1} + 13\,Q_{t-2} - 9\,Q_{t-3}.$$

Die ausgeführte Rechnung liefert die Werthe

$$Q_0 = 7,\ Q_1 = -7,\ Q_2 = -85,\ Q_3 = -271, \dots$$

Nun gehen aus den Brüchen mit den Nennern $x-1$, $x-2-i\sqrt{5}$, $x-2+i\sqrt{5}$ geometrische Reihen hervor, und es ist

$$\frac{1}{x-1} = x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-t} + \frac{x^{-t+1}}{x-1},$$

$$\frac{3+2i\sqrt{5}}{x-2-i\sqrt{5}} = (3+2i\sqrt{5})^{-1}x + (3+2i\sqrt{5})(2+i\sqrt{5})x^{-2} + \dots$$

$$+ (3+2i\sqrt{5})(2+i\sqrt{5})^t x^{-t-1} + (3+2i\sqrt{5})\frac{(2+i\sqrt{5})^{t+1} x^{-t-1}}{x-2-i\sqrt{5}},$$

$$\frac{3-2i\sqrt{5}}{x-2+i\sqrt{5}} = (3-2i\sqrt{5})^{-1}x + (3-2i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5})^{-2}x + \dots$$

$$+ (3-2i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5})^t x^{-t-1} + (3-2i\sqrt{5})\frac{(2-i\sqrt{5})^{t+1} x^{-t-1}}{x-2+i\sqrt{5})}.$$

Wir erhalten also vermöge der Resultate des vorigen § eine Zerlegung der recurrenten Reihe der dritten Ordnung in drei geometrische Reihen, wobei das allgemeine Glied Q_t der Reihe der dritten Ordnung durch die Gleichung

$$Q_t = 1 + (3+2i\sqrt{5})(2+i\sqrt{5})^t + (3-2i\sqrt{5})(2-i\sqrt{5})^t$$

dargestellt wird.

§ 96. Interpolationsformel.

Wenn man in der Gleichung (2) des vorigen § statt der Grössen $g^{(1)}, \ldots g^{(n)}$ ihre aus der dortigen Gleichung (5) entnommenen Werthe substituirt, so geht sie in die folgende über

$$(1) \quad r(x) = \frac{r(\xi_1)}{f'(\xi_1)} \frac{f(x)}{x-\xi_1} + \frac{r(\xi_2)}{f'(\xi_2)} \frac{f(x)}{x-\xi_2} + \ldots + \frac{r(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \frac{f(x)}{x-\xi_n}.$$

Die linke Seite derselben ist die beliebig gewählte Function des $(n-1)$ten Grades

$$(2) \qquad r(x) = r_0 x^{n-1} + r_1 x^{n-2} + \ldots + r_{n-2} r + r_{n-1},$$

die rechte Seite enthält die n Werthe, welche die Function $r(x)$ annimmt, sobald x nach einander gleich den von einander verschiedenen Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ gesetzt wird; ferner ist

$$(3) \qquad f(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)$$
$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

und

$$(4) \qquad f'(x) = nx^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Die Gleichung (1) bietet ein Mittel, um eine algebraische rationale ganze Function des $(n-1)$ten Grades einer Variable x darzustellen, sobald ihre zu n von einander verschiedenen Werthen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Variable x zugehörigen Functionalwerthe $r(\xi_1), r(\xi_2), \ldots r(\xi_n)$ gegeben sind; denn wenn man diese Werthe in die rechte Seite von (1) einführt, so muss das hervorgehende Aggregat von ganzen Functionen des $(n-1)$ten Grades der betreffenden Function $r(x)$ gleich sein und drückt daher wirklich die Function $r(x)$ aus.

Die Aufgabe, *die Abhängigkeit einer Grösse von einer Variable x*, oder nach einer in § 101 zu erläuternden Ausdrucksweise *eine Function einer Variable x* so zu bestimmen, dass die zu einer Anzahl von Werthen der Variable zugehörigen Werthe gegeben sind, wird *eine Aufgabe der Einschaltung* oder *der Interpolation* genannt. Dieser Benennung liegt die Vorstellung zu Grunde, dass die Werthe der Function, die zu den nicht vorher bezeichneten Werthen der Variable gehören, zwischen den gegebenen Werthen der Function eingeschaltet werden sollen. Eine solche Aufgabe ist so lange unbestimmt, als über

die Beschaffenheit der zu suchenden Function keine näheren Bestimmungen hinzugefügt werden. Die Aufgabe, aus den gegebenen Werthen $r(\xi_1), \ldots r(\xi_n)$ eine Function $r(x)$ zu finden, welche rational und ganz und vom $(n-1)$ten Grade sein soll, erweist sich aber durch die Gleichung (1) selbst als eine vollkommen bestimmte. Die Gleichung (1) bildet eine zu dieser Aufgabe gehörige *Interpolationsformel*, und zwar wird die Gleichung nach ihrem Urheber die Interpolationsformel von *Lagrange* genannt.

§ 97. Entwickelung der negativen ganzen Potenzen eines Binoms in eine Reihe.

Am Schlusse des § 93 ist gezeigt worden, wie ein gegebener echter Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ als ein Aggregat von Partialbrüchen dargestellt werden kann, deren Zähler Constanten und deren Nenner positive Potenzen der in der Function $f(x)$ enthaltenen Factoren des ersten Grades $x-\xi_1, \ldots x-\xi_\lambda$ sind, und hieraus ist für die aus dem Bruche $\frac{r(x)}{f(x)}$ entspringende recurrente Reihe der $n$ten Ordnung eine Zerlegung in partielle recurrente Reihen abgeleitet worden. Die Beschaffenheit dieser Reihen hängt wesentlich von der Potenz ab, zu welcher das in dem Nenner des zugehörigen Bruches aus der variabeln Grösse x und einer beliebigen festen Grösse ξ gebildete Binom $x-\xi$ erhoben ist, da der constante Zähler des Bruches sich allen Gliedern der Reihe als Factor mittheilt. Wir haben es daher mit denjenigen Reihen zu thun, welche aus der Entwickelung eines Bruches $\frac{1}{(x-\xi)^\alpha}$ oder der negativen ganzen $(-\alpha)$ten Potenz des Binoms $x-\xi$ entstehen. Der Fall des Exponenten $\alpha=1$, dem die geometrische Reihe entspricht, ist in § 90 behandelt und seitdem mehrfach angewendet worden. Die Betrachtung wird deshalb mit dem Werthe des Exponenten $\alpha=2$ beginnen und zu den höheren Werthen von α aufsteigen.

Es werde in der Gleichung (1) des § 91 die Function $f(x)$ durch $(x-\xi)^\alpha$, $r(x)$ durch die Einheit ersetzt, und es sollen, um

die verschiedenen Werthe der Zahl $\mathfrak{a}$ zu unterscheiden, die mit $Q_0, Q_1, \ldots Q_t, R_0^{(t)}, R_1^{(t)}, \ldots R_{n-1}^{(t)}$ bezeichneten Grössen noch einen zweiten untern Zeiger $\mathfrak{a}$ erhalten; hier ist die Zahl n der Zahl $\mathfrak{a}$ gleich, und es entsteht die Gleichung

$$(1)\quad \frac{1}{(x-\xi)^{\mathfrak{a}}} = Q_{0,\mathfrak{a}}\, x^{-1} + Q_{1,\mathfrak{a}}\, x^{-2} + \ldots + Q_{t,\mathfrak{a}}\, x^{-t-1} + \frac{R_{0,\mathfrak{a}}^{(t)}\, x^{\mathfrak{a}-t-2} + \ldots + R_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}^{(t)}\, x^{-t-1}}{(x-\xi)^{\mathfrak{a}}}.$$

Die Zahl t soll nur solche Werthe annehmen, die gleich oder grösser als $\mathfrak{a}$ sind. Da die Coefficienten der Function $(x-\xi)^{\mathfrak{a}}$ sich nach dem in § 46 enthaltenen binomischen Lehrsätze folgendermassen bestimmen

$$(2)\qquad (x-\xi)^{\mathfrak{a}} = x^{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}\, x^{\mathfrak{a}-1}\,\xi + \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2!}\, x^{\mathfrak{a}-2}\,\xi^2 + \ldots + (1)^{\mathfrak{a}}\,\xi^{\mathfrak{a}},$$

so ergiebt sich aus dem System (3) des § 91 für die Grössen $Q_{0,\mathfrak{a}}, Q_{1,\mathfrak{a}}, \ldots Q_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}$ das System Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = Q_{0,\mathfrak{a}} \\ 0 = Q_{1,\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}\xi\, Q_{0,\mathfrak{a}} \\ 0 = Q_{2,\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}\xi\, Q_{1,\mathfrak{a}} + \dfrac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2!}\,\xi^2\, Q_{0,\mathfrak{a}} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 1 = Q_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}\xi\, Q_{\mathfrak{a}-2,\mathfrak{a}} + \dfrac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2!}\,\xi^2\, Q_{\mathfrak{a}-3,\mathfrak{a}} + \ldots + (-1)^{\mathfrak{a}-1}\,\xi^{\mathfrak{a}-1}\, Q_{0,\mathfrak{a}}, \end{cases}$$

aus dem System (4) dess. § für jede Grösse $Q_{t,\mathfrak{a}}$ bei der $t \geqq \mathfrak{a}$ ist, die Gleichung

$$(4)\quad 0 = Q_{t,\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}\xi\, Q_{t-1,\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2!}\,\xi^2\, Q_{t-2,\mathfrak{a}} + \ldots + (-1)^{\mathfrak{a}}\,\xi^{\mathfrak{a}}\, Q_{t-\mathfrak{a},\mathfrak{a}},$$

und aus dem System (5) desselben § für die Grössen $R_{0,\mathfrak{a}}^{(t)}, \ldots R_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}^{(t)}$ das System Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = -\mathfrak{a}\xi\, Q_{t,\mathfrak{a}} + \dfrac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{2!}\,\xi^2\, Q_{t-1,\mathfrak{a}} + \ldots + (-1)^{\mathfrak{a}}\,\xi^{\mathfrak{a}}\, Q_{t-\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}} + R_{0,\mathfrak{a}}^{(t)} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 = (-1)^{\mathfrak{a}}\,\xi^{\mathfrak{a}}\, Q_{t,\mathfrak{a}} + R_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}^{(t)}. \end{cases}$$

Das System (3) hat zur Folge, dass die sämmtlichen Grössen $Q_{0,\mathfrak{a}}, Q_{1,\mathfrak{a}}, \ldots$ bis $Q_{\mathfrak{a}-2,\mathfrak{a}}$ gleich Null sein müssen, und dass $Q_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}$

stets gleich der Einheit ist. Bei der Annahme $\mathfrak{a}=2$ erhalten (4), (5) beziehungsweise die Gestalt

$$(4^*) \qquad 0 = Q_{t,2} - 2\xi\, Q_{t-1,2} + \xi^2 Q_{t-2,2},$$

$$(5^*) \qquad \begin{cases} 0 = -2\xi\, Q_{t,2} + \xi^2 Q_{t-1,2} + R^{(t)}_{0,2} \\ 0 = \qquad\qquad\quad \xi^2 Q_{t,2} \quad + R^{(t)}_{1,2}. \end{cases}$$

Die Auflösung der Gleichungen zeigt, da $Q_{0,2}$ den Werth Null, $Q_{1,2}$ den Werth der Einheit hat, dass $Q_{2,2}=2\xi$ und allgemein $Q_{t,2}=t\,\xi^{t-1}$ ist; ferner findet sich $R^{(t)}_{0,2}=(t+1)\,\xi^t$, $R^{(t)}_{1,2}=-t\xi^{t+1}$, und die Gleichung (1) liefert die Entwickelung

$$(6) \quad (x-\xi)^{-2} = x^{-2} + 2\xi x^{-3} + \ldots \\ + t\xi^{t-1} x^{-t-1} + \frac{(t+1)\,\xi^t x^{-t} - t\,\xi^{t+1} x^{-t-1}}{(x-\xi)^2}.$$

Durch die Voraussetzung $\mathfrak{a}=3$ werden aus (4) und (5) respective die Gleichungen

$$(4^*) \quad 0 = Q_{t,3} - 3\xi\, Q_{t-1,3} + 3\xi^2 Q_{t-2,3} - \xi^3 Q_{t-3,3}$$

$$(5^*) \quad \begin{cases} 0 = \quad -3\xi\, Q_{t,3} \quad + 3\xi^2 Q_{t-1,3} - \xi^3 Q_{t-2,3} + R^{(t)}_{0,3} \\ 0 = \qquad\qquad\qquad 3\xi^2 Q_{t,3} \quad - \xi^3 Q_{t-1,3} + R^{(t)}_{1,3} \\ 0 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \xi^3 Q_{t,3} \quad + R^{(t)}_{2,3}. \end{cases}$$

Hier ist $Q_{0,3}=0$, $Q_{1,3}=0$, $Q_{2,3}=1$; mithin kommt $Q_{3,3}=3\xi$, $Q_{4,3}=6\xi^2$ und allgemein $Q_{t,3}=\frac{t(t-1)}{2}\,\xi^{t-2}$, demgemäss

$$R^{(t)}_{0,3} = \frac{t(t+1)}{2}\,\xi^{t-1},\ R^{(t)}_{1,3} = -(t^2-1)\,\xi^t,\ R^{(t)}_{2,3} = \frac{t(t-1)}{2}\,\xi^{t+1}.$$

Aus der Gleichung (1) folgt daher

$$(7) \quad (x-\xi)^{-3} = x^{-3} + 3\xi x^{-4} + 6\xi^2 x^{-5} + \ldots + \frac{t(t-1)}{2}\,\xi^{t-2} x^{-t-1} + \\ + \frac{\frac{t(t+1)}{2}\,\xi^{t-1} x^{-t-1} - (t^2-1)\,\xi^t x^{-t} + \frac{t(t-1)}{2}\,\xi^{t+1} x^{-t-1}}{(x-\xi)^3}.$$

Für einen beliebigen Werth der positiven ganzen Zahl $\mathfrak{a}$ ergiebt sich aus der Relation (4) mit Hülfe der Werthe $Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}=0$, $Q_{1,\mathfrak{a}}=0, \ldots Q_{\mathfrak{a}-2,\mathfrak{a}}$, $Q_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}=1$, dass $Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}\xi$, $Q_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}}$ gleich $\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1)}{2!}\,\xi^2$ ist, dass $Q_{t,\mathfrak{a}}$ gleich dem Product einer Zahl in die Potenz $\xi^{t-\mathfrak{a}+1}$ wird, ferner aus (5), dass $R^{(t)}_{0,\mathfrak{a}}$, $R^{(t)}_{1,\mathfrak{a}}, \ldots R^{(t)}_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}$ respec-

tive gleich dem Product einer Zahl in eine der Reihe nach entsprechende Potenz der Grösse ξ sein muss, nämlich

(8) $R^{(t)}_{0,\alpha} = \Re^{(t)}_{0,\alpha}\,\xi^{t-\alpha+2},\ R^{(t)}_{1,\alpha} = \Re^{(t)}_{1,\alpha}\,\xi^{t-\alpha+1}, \ldots R^{(t)}_{\alpha-1,\alpha} = \Re^{(t)}_{\alpha-1,\alpha}\,\xi^{t+1}.$

Die vollständige Bestimmung der Grössen $Q_{t,\alpha}$ ist in der Gleichung

$$(9) \qquad Q_{t,\alpha} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots t}{1.2.3\ldots(t-\alpha+1)}\,\xi^{t-\alpha+1}$$

enthalten, deren Beweis nicht schwer zu führen ist, an dieser Stelle jedoch der Kürze halber übergangen wird. Mit Hülfe von (8) können aus (5) vollständige Ausdrücke der Grössen $\Re^{(t)}_{0,\alpha}, \Re^{(t)}_{1,\alpha}, \ldots \Re^{(t)}_{\alpha-1,\alpha}$ abgeleitet werden. Hiemit ist der Weg angegeben, um für alle auf der rechten Seite der Gleichung (1) vorkommenden Grössen allgemein gültige Ausdrücke aufzustellen, und die betreffende Entwickelung der $(-\alpha)$ten Potenz des Binoms $(x-\xi)$ in eine nach den negativen Potenzen von x fortschreitende Reihe allgemein durchzuführen.

§ 98. Grenzwerth der Summe einer geometrischen Reihe bei wachsender Anzahl der Glieder.

Der Ausdruck für die Summe der $(t+1)$ ersten Glieder einer geometrischen Reihe gewinnt eine neue Bedeutung, sobald die Voraussetzung hinzukommt, dass die Anzahl der Glieder $(t+1)$ nach und nach immer grössere Werthe annehme. Der bezügliche Ausdruck ist in der Gleichung (5) des § 96 mitgetheilt, welche, sobald man wieder $a_0 x + a_1 = a_0(x-\xi)$ setzt und hierauf $a_0 = 1$ nimmt, in die folgende übergeht

$$(1) \quad \frac{r_0}{x-\xi} - \frac{r_0\xi^{t+1}x^{-t-1}}{x-\xi} = r_0 x^{-1} + r_0\xi x^{-2} + r_0\xi^2 x^{-3} + \ldots + r_0\xi^t x^{-t-1}.$$

Nach einer am Ende des § 92 gemachten Bemerkung gilt diese Darstellung für alle Werthe der Veränderlichen x mit Ausnahme des Werthes $x=\xi$. Wenn wir uns nun denken, dass die Anzahl $(t+1)$ der Glieder der auf der rechten Seite von (1) gebildeten Summe grösser und grösser werde, so addiren sich zu den vorhandenen Gliedern der geometrischen Reihe immer neue Glieder. Der auf der linken Seite von (1) befindliche Ausdruck der Summe besteht aber aus zwei Theilen,

von denen der erste $\frac{r_0}{x-\xi}$ die Zahl t gar nicht enthält und deshalb bei wachsendem t ungeändert bleibt, während der zweite $-\frac{r_0\xi^{t+1}x^{-t-1}}{x-\xi}$ bei wachsendem t sich fortwährend ändert. Wir wollen nun unser Augenmerk darauf richten, wie sich der letztere Ausdruck bei einer stets wachsenden Zahl t verhalte, und unterscheiden bei der ferneren Untersuchung der Gleichung (1) zwei Fälle.

Es sei zuerst ξ gleich einer *beliebigen reellen Grösse*, r_0 ebenfalls, und x bekomme einen *beliebigen reellen, aber von ξ nothwendig verschiedenen Werth.* Dann enthält die rechte wie die linke Seite von (1) nur reelle Grössen. Der Ausdruck

(2) $$-\frac{r_0\xi^{t+1}x^{-t-1}}{x-\xi}$$

besteht aus dem Product der von t unabhängigen bestimmten Grösse $-\frac{r_0}{x-\xi}$ in die $(t+1)$te Potenz des Bruches $\frac{\xi}{x}$. Der genannte Bruch hat unter der gegenwärtigen Voraussetzung einen reellen Werth, der positiv oder negativ, jedoch niemals gleich der positiven Einheit sein kann. Wenn die Grösse $\frac{\xi}{x}$ positiv und grösser als die Einheit ist, so behält die Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}$ stets das positive Vorzeichen, und ihr Werth wird bei wachsendem t grösser als jede beliebig gegebene Grösse. Der betreffende Satz ist in § 19 für die Annahme bewiesen, dass ein die Einheit übertreffender rationaler ganzzahliger Bruch auf immer höhere positive ganze Potenzen erhoben wird; doch kann der gelieferte Beweis unmittelbar auf jeden die Einheit übertreffenden bestimmten positiven Werth übertragen werden. Sobald die Grösse $\frac{\xi}{x}$ positiv und kleiner als die Einheit ist, so behält die Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}$, die gleich $\frac{1}{\left(\frac{x}{\xi}\right)^{t+1}}$ ist, stets das positive Vorzeichen und wird bei wachsendem t kleiner als jede noch so

kleine beliebig gegebene Grösse, da die in die Einheit zu dividirende Potenz $\left(\frac{x}{\xi}\right)^{t+1}$ nach dem angeführten Satze über jedes Mass hinaus wächst. Bei einem negativen Werthe des Bruches $\frac{\xi}{x}$ ergiebt die Gleichung

$$(3) \qquad \left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1} = (-1)^{t+1}\left(-\frac{\xi}{x}\right)^{t+1},$$

dass das Vorzeichen der Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}$, je nachdem $t+1$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, fortwährend abwechselt, und dass der absolute Werth der Potenz über jedes Mass wächst, wofern $-\frac{\xi}{x}$ ein unechter Bruch ist, dagegen kleiner wird als jede beliebig kleine gegebene Grösse, wofern $-\frac{\xi}{x}$ ein echter Bruch ist. Für den Fall, dass $x = -\xi$ ist, nimmt die Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}$ abwechselnd den Werth der positiven und der negativen Einheit an. Hieraus folgt, dass der Werth des Ausdruckes (2) für wachsende Werthe der Zahl t, wenn $\frac{\xi}{x}$ positiv und grösser als die Einheit ist, stets sein Vorzeichen behält und numerisch über jedes Mass wächst, wenn $\frac{\xi}{x}$ positiv und kleiner als die Einheit ist, stets sein Vorzeichen behält und numerisch beliebig klein wird, wenn $\frac{\xi}{x}$ negativ und numerisch grösser als die Einheit ist, sein Vorzeichen wechselt und numerisch über jedes Mass wächst, wenn $\frac{\xi}{x}$ negativ und numerisch kleiner als die Einheit ist, sein Vorzeichen wechselt und numerisch beliebig klein wird, und endlich, wenn $\frac{\xi}{x} = -1$ ist, sein Vorzeichen wechselt, ohne seinen numerischen Werth zu ändern.

Der Werth des Ausdruckes (2) zeigt also unter den erwähnten Voraussetzungen die Beschaffenheit, bei stets wach-

senden Werthen der Zahl t in dem Falle *von einer bestimmten Grösse beliebig wenig abzuweichen*, oder, *sich einem bestimmten Grenzwerthe beliebig zu nähern*, wenn der Bruch $\frac{\xi}{x}$ numerisch unter der Einheit liegt, und zwar ist dieser Grenzwerth *die Null.* Dagegen hat derselbe Ausdruck diese Eigenschaft nicht, wofern der Bruch $\frac{\xi}{x}$ numerisch über der Einheit liegt oder der negativen Einheit gleich ist. Weil nun die linke Seite der Gleichung (1) erhalten wird, indem man zu dem von t unabhängigen Werthe $\frac{r_0}{x-\xi}$ den Werth des Ausdruckes (2) hinzuaddirt, so nähert sich die linke Seite der Gleichung (1) dann und nur dann einem bestimmten Grenzwerthe, wenn dies für den Ausdruck (2) der Fall ist, und weil der Grenzwerth des Ausdrucks (2) die Null ist, so ist der Grenzwerth der linken Seite von (1) der Werth $\frac{r_0}{x-\xi}$.

Die auf der rechten Seite von (1) *stehende Summe der* $(t+1)$ *ersten Glieder einer geometrischen Reihe hat deshalb bei reellen Werthen von* r_0, x *und* ξ *die Eigenschaft, sobald die Anzahl der Glieder* $(t+1)$ *fortwährend wächst, sich in dem Falle und nur in dem Falle einem Grenzwerthe zu nähern, dass der Bruch* $\frac{\xi}{x}$ *numerisch kleiner ist als die Einheit; dieser Grenzwerth wird alsdann durch den Bruch* $\frac{r_0}{x-\xi}$ *ausgedrückt.*

In dem § 21, welcher den Abschnitt II, *Elemente der Algebra,* beginnt, ist hervorgehoben, dass die Untersuchung der Resultate, welche aus einer beschränkten Zahl von Grössen durch eine beschränkte Zahl von Anwendungen der vier Grundoperationen entstehen, den Gegenstand der Algebra bildet. Demnach gehört die Betrachtung der Summe einer beschränkten Zahl von Gliedern einer geometrischen Reihe der Algebra an. Die Bestimmung des Grenzwerthes, dem sich die Summe einer geometrischen Reihe bei wachsender Zahl ihrer Glieder nähert, verlässt dagegen den Boden der Algebra. Genau ebenso steht es, wie im voraus bemerkt wird, mit der Betrachtung der

Summe der $(t+1)$ ersten Glieder einer recurrenten Reihe der $n$ten Ordnung, deren Ausdruck in (6) des § 92 aufgestellt ist. Aus diesen Ursachen liegt der Inhalt des gegenwärtigen Abschnittes zum Theil auf dem algebraischen Gebiete und zum Theil ausserhalb desselben.

Eine Summe von Gliedern, deren Anzahl wachsend gedacht wird, nennt man *eine unendlich ausgedehnte Summe.* Die Frage danach, *ob die Summe der von einem bestimmten Gliede anfangenden in der gegebenen Ordnung auf einander folgenden Glieder bei wachsender Anzahl sich einem bestimmten Grenzwerth nähere,* wird mit dem Ausdruck bezeichnet, *ob die unendlich ausgedehnte Summe der Reihe convergent sei.* Für den Fall dass dies zutrifft, heisst der betreffende Grenzwerth *die Summe der unendlichen Reihe* und die Aufsuchung der Summe *die Summation der unendlichen Reihe.* Für den Fall, dass die Reihe nicht convergent ist, sagt man, *dass die unendliche Reihe keine Summe hat.* Die für die geometrische Reihe gefundenen Resultate lassen sich demnach so ausdrücken, *dass, wenn bei der obigen Bezeichnung r_0, x und ξ reelle Grössen sind, die Summe der unendlich ausgedehnten geometrischen Reihe dann und nur dann convergirt, sobald der Bruch $\frac{\xi}{x}$ einen unter der Einheit liegenden numerischen oder absoluten Werth hat, und dass alsdann die Summe der unendlichen geometrischen Reihe durch den Bruch $\frac{r_0}{x-\xi}$ dargestellt wird.*

Ein sehr einfaches Beispiel einer unendlichen geometrischen Reihe liefert die Verwandlung eines ganzzahligen Bruches, der auf seine kleinste Benennung gebracht einen Nenner hat, welcher andere Primfactoren als die Zwei und die Fünf enthält, in einen Decimalbruch. Ein Bruch von jener Art kann keinem endlichen Decimalbruche, das heisst, keinem Bruche gleich werden, dessen Zähler eine beliebige ganze Zahl und dessen Nenner eine bestimmte Potenz der Zehn ist, und es ergiebt sich leicht, dass das der Rechnung mit Decimalbrüchen entsprechende Divisionsverfahren auf einen periodischen Decimalbruch führt. So bringt der Bruch $\frac{1}{7}$ den periodischen Decimalbruch hervor

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ldots$$

Es ist aber dieser Decimalbruch nichts anderes als die geometrische Reihe

$$\frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \ldots + \frac{142857}{10^{6(t+1)}},$$

deren Summe, da in den obigen Formeln $r_0 = \frac{142857}{10^6}$, $x = 1$, $\xi = \frac{1}{10^6}$ zu setzen ist, für eine wachsende Anzahl von Gliedern gegen den Grenzwerth

$$\frac{\frac{142857}{10^6}}{1 - \frac{1}{10^6}} = \frac{142857}{10^6 - 1} = \frac{1}{7}$$

convergirt.

Wir betrachten jetzt die Gleichung (1) unter der zweiten Voraussetzung, dass ξ gleich *einer beliebigen complexen Grösse*, r_0 gleich *einer beliebigen complexen Grösse* sei und dass x ebenfalls *einen beliebigen, aber nothwendig von ξ verschiedenen complexen Werth* annehme. Die complexen Grössen mögen in die Gestalt gebracht werden

(4) $\xi = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r_0 = c\,(\cos f + i\sin f)$, $x = s\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$,

wo die positiven Grössen σ, c, s die absoluten Beträge von ξ, r_0, x darstellen, und die Winkel φ, f, ϑ bis auf ein beliebiges Vielfache einer ganzen Kreis-Peripherie vollständig bestimmt sind. Jedes Glied der auf der rechten Seite von (1) befindlichen geometrischen Reihe zerfällt jetzt in einen reellen und einen imaginären Theil, und zwar kann man die Trennung derselben sehr leicht bewirken, da nach einer vielfach angewendeten Regel

$$(5)\qquad \begin{aligned} r_0 x^{-1} &= c s^{-1}(\cos(f-\vartheta) + i\sin(f-\vartheta)) \\ r_0 \xi^{-2} x &= c\sigma^{-2} s\,(\cos(f+\varphi-2\vartheta) + i\sin(f+\varphi-2\vartheta)) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_0 \xi^t x^{-t-1} &= c\sigma^t s^{-t-1}(\cos(f+t\varphi-(t+1)\vartheta) \\ &\qquad + i\sin(f+t\varphi-(t+1)\vartheta)) \end{aligned}$$

ist. Auf diese Weise wird die rechte Seite von (1) gleich dem

Aggregat einer Summe von $(t+1)$ reellen Gliedern und einer mit der imaginären Einheit i multiplicirten Summe von $(t+1)$ reellen Gliedern,

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & (c^{-1}s\cos(f-\vartheta)+c\sigma^{-2}s\cos(f+\varphi-2\vartheta)+\dots\\
&\qquad\qquad +c\sigma^{t}s^{-t-1}\cos(f+t\varphi-(t+1)\vartheta))\\
&+i\,(c^{-1}s\sin(f-\vartheta)+c\sigma^{-2}s\sin(f+\varphi-2\vartheta)+\dots\\
&\qquad\qquad +c\sigma^{t}s^{-t-1}\sin(f+t\varphi-(t+1)\vartheta)).
\end{aligned}
$$

Für die beiden Bestandtheile der linken Seite von (1) finden sich vermöge der Bezeichnungen (4) die Ausdrücke

$$
(7)\qquad \frac{r_0}{x-\xi}=\frac{c\,(\cos f+i\sin f)}{s\,(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)-\sigma\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)},
$$

$$
(8)\qquad -\frac{r_0\,\xi^{t+1}\,x^{-t-1}}{x-\xi}=
-\frac{c\sigma^{t+1}s^{-t-1}\,(\cos(f-(t+1)(\vartheta-\varphi))+i\sin(f-(t+1)(\vartheta-\varphi)))}{s\,(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)-\sigma\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)}.
$$

Wird in jedem derselben der reelle und der rein imaginäre Theil getrennt, so stellt das Aggregat der beiden reellen Theile die in (6) enthaltene Summe von $(t+1)$ reellen Gliedern, und das Aggregat der beiden rein imaginären Theile die in (6) enthaltene mit der imaginären Einheit i multiplicirte Summe von $(t+1)$ reellen Gliedern dar.

Um zu beurtheilen, wie der Ausdruck (8) sich bei wachsenden Werthen der Zahl t ändere, kann man den in § 30 begründeten Satz benutzen, dass der absolute Betrag eines Products gleich dem Producte der absoluten Beträge der Factoren ist. Der Factor $\cos(f-(t+1)(\vartheta-\varphi))+i\sin(f-(t+1)(\vartheta-\varphi))$ hat seinen absoluten Betrag gleich der Einheit, der Factor

$$
\frac{-c}{s\,(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)-\sigma\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)}
$$

den von t unabhängigen absoluten Betrag

$$
\frac{c}{\sqrt{(s\cos\vartheta-\sigma\cos\varphi)^2+(s\sin\vartheta-\sigma\sin\varphi)^2}},
$$

der reelle positive Factor $\sigma^{t+1}s^{-t-1}=\left(\frac{\sigma}{s}\right)^{t+1}$ drückt selbst seinen absoluten Betrag aus. Nun haben wir bemerkt, dass die

Potenz $\left(\frac{\sigma}{s}\right)^{t+1}$ einer positiven reellen Grösse $\frac{\sigma}{s}$ bei wachsenden Werthen der Zahl t über jedes Mass wächst, wenn $\frac{\sigma}{s}$ grösser ist als die Einheit, dass sie unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt, wenn $\frac{\sigma}{s}$ kleiner ist als die Einheit, und gleich der Einheit bleibt, wenn $\frac{\sigma}{s}$ gleich der Einheit ist. Hiernach ist mit Sicherheit zu schliessen, dass der absolute Betrag des Ausdruckes (8) für eine wachsende Zahl t kleiner wird als eine beliebig kleine gegebene Grösse, wofern die positive Grösse $\frac{\sigma}{s}$ unter der Einheit liegt. Weil aber der absolute Betrag einer complexen Grösse niemals kleiner sein kann als der numerische Werth ihres reellen Theiles und auch als der numerische Werth ihres von dem Factor i befreiten imaginären Theiles, so muss unter der angegebenen Bedingung bei dem Ausdrucke (8) sowohl der numerische Werth des reellen Theiles wie auch der numerische Werth des von dem Factor i befreiten imaginären Theiles, sobald die Zahl t ohne Ende wächst, beliebig klein werden oder, was dasselbe ist, sich der Null als Grenzwerth nähern. Die in (6) dargestellte Summe, welche für jede Zahl t gleich dem Aggregat der Ausdrücke (7) und (8) ist, wird also bei wachsenden Werthen der Zahl t, sobald $\frac{\sigma}{s}$ gleich einem echten Bruche, das heisst, sobald der absolute Betrag s der complexen Grösse x grösser als der absolute Betrag σ der complexen Grösse ξ ist, gleich dem Aggregat des Ausdruckes (7) und eines Ausdruckes, dessen reeller und imaginärer Theil sich der Null als Grenzwerth nähern. *Folglich convergirt sowohl die reelle wie auch die in die imaginäre Einheit i multiplicirte in* (6) *enthaltene unendlich ausgedehnte Summe, oder, was dasselbe ist, es convergirt die unendlich ausgedehnte Summe* (6), *sobald der absolute Betrag der complexen Grösse x grösser ist als der absolute Betrag der complexen Grösse ξ, und die Summe der unendlichen Reihe* (6) *wird alsdann durch den Ausdruck*

$$
(9) \qquad \frac{r_0}{x-\xi} = \frac{c\,(\cos f + i \sin f)}{s\,(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) - \sigma\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)}
$$

$$
= \frac{c\,s\,(\cos(f-\vartheta) + i \sin(f-\vartheta)) - c\sigma\,(\cos(f-\varphi) + i \sin(f-\varphi))}{(s \cos \vartheta - \sigma \cos \varphi)^2 + (s \sin \vartheta - \sigma \sin \varphi)^2}
$$

$$
= \frac{c\,s\,(\cos(f-\vartheta) - c\,\sigma \cos(f-\varphi)}{(s \cos \vartheta - \sigma \cos \varphi)^2 + (s \sin \vartheta - s \sin \varphi)^2}
$$

$$
+ i \frac{(c\,s \sin(f-\vartheta) - c\,\sigma \sin(f-\varphi)}{(s \cos \vartheta - \sigma \cos \varphi)^2 + (s \sin \vartheta - \sigma \sin \varphi)^2}
$$

dargestellt.

Eine fortgesetzte Erörterung ergiebt, dass der reelle und der imaginäre Theil des Ausdruckes (8) bei wachsender Zahl t sich nicht festen Grenzen nähern, sobald der Quotient der absoluten Beträge $\frac{\sigma}{s}$ über der Einheit liegt oder der Einheit gleich ist. Wenn $\frac{\sigma}{s}$ über der Einheit liegt, so wächst der Factor $\left(\frac{\sigma}{s}\right)^{t+1}$ mit der Zahl t über jedes Mass. Wenn $\frac{\sigma}{s}$ gleich der Einheit ist, so muss, um die Voraussetzung zu bewahren, dass x nicht gleich ξ sein darf, der Winkel ϑ einen von dem Winkel φ verschiedenen Werth erhalten und dann schwankt der Ausdruck (8) bei wachsendem t fortwährend in seinem reellen und seinem imaginären Theile, ohne sich einer festen Grenze zu nähern.

Die Bedingung für die Convergenz der unendlich ausgedehnten geometrischen Reihe (6), dass der absolute Betrag der complexen Grösse x grösser sei als der absolute Betrag der complexen Grösse ξ lässt sich mit Hülfe der *Gauss*'schen Interpretation der complexen Grössen anschaulich machen. Wenn man durch den Punkt der Ebene, welcher der complexen Grösse ξ entspricht, um den Punkt, welcher dem Werthe Null entspricht, als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt, so müssen alle Punkte, die zu einer jene Bedingung erfüllenden complexen Grösse x gehören, ausserhalb jenes Kreises liegen, da der Radius des beschriebenen Kreises durch den absoluten Betrag der Grösse ξ, und der Abstand eines Punktes, welcher der complexen Grösse x entspricht, von dem Mittelpunkt des beschriebenen Kreises durch den absoluten Betrag der Grösse x gemessen

wird. In dem zuerst besprochenen Falle, wo ξ und x reelle Grössen sind, kommt bei der geometrischen Deutung nur die Bestimmung hinzu, dass der zu der Grösse ξ gehörende Punkt und die zu den Werthen der Grösse x gehörenden Punkte auf der Axe der reellen Werthe zu liegen haben.

§ 99. Summation einer unendlich ausgedehnten recurrenten Reihe von beliebiger Ordnung.

Für die recurrenten Reihen, welche aus der Entwickelung der negativen Potenzen eines Binoms $(x-\xi)^{-2}$, $(x-\xi)^{-3}$, ... entstehen, können mit Hülfe des § 97 Ausdrücke der Summe der $(t+1)$ ersten Glieder gebildet werden. Zum Beispiel folgt aus der dortigen Gleichung (6) unmittelbar die Gleichung

$$(1)\quad \frac{1}{(x-\xi)^2}-\frac{(t+1)\xi x^{t-t}-t\xi^{t+1}x^{-t-1}}{(x-\xi)^2}=x^{-2}+2\xi x^{-3}+..+t\xi^{t-1}x^{-t-1},$$

und ein ähnliches Resultat lässt sich für den Exponenten Drei aus (7) und für einen beliebigen Exponenten $\mathfrak{a}$ aus (1) und (8) ableiten. Die Frage nach der Bedingung, unter der die so eben auf der rechten Seite von (1) hingeschriebene Summe bei wachsendem t gegen einen bestimmten Grenzwerth convergirt, kann hier, wie es bei der geometrischen Reihe geschehen ist, durch die Erörterung des zweiten Bestandtheils der linken Seite von (1) beantwortet werden; da aber dieselbe Frage im Abschnitte V wieder auftreten wird, so unterdrücken wir die betreffende Erörterung und erwähnen nur, dass die Bedingung der Convergenz entsprechend ausfällt wie bei der geometrischen Reihe, und dass, wenn diese Bedingung befriedigt ist oder wenn der absolute Betrag der Grösse x grösser ist als der absolute Betrag der Grösse ξ, der zweite Bestandtheil der linken Seite von (1) sich der Null nähert, und daher die rechte Seite von (1) gegen einen Grenzwerth convergirt, welcher durch den Bruch $\frac{1}{(x-\xi)^2}$ ausgedrückt wird.

Aus der Gleichung (1) und den Bestimmungen (8) und (9) des § 97 ergiebt sich die Gleichung

$$(2)\quad \frac{1}{(x-\xi)^{\mathfrak{a}}} - \frac{\mathfrak{R}^{(t)}_{0,\mathfrak{a}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{-\mathfrak{a}+t+2} + \ldots + \mathfrak{R}^{(t)}_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}}{(x-\xi)^{\mathfrak{a}}}$$

$$= x^{-\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}\,\xi\, x^{-\mathfrak{a}-1} + \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1)}{1.2}\xi^2 x^{-\mathfrak{a}-2} + \ldots$$

$$+ \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1)\ldots t}{1.2\ldots(t-\mathfrak{a}+1)}\xi^{t-\mathfrak{a}+1}\, x^{-t-1}.$$

Die Bedingung für die Convergenz der auf der rechten Seite befindlichen Summe ist auch hier wieder dieselbe, und sobald sie gilt, nähert sich der zweite Bestandtheil der linken Seite für eine wachsende Zahl t der Null, und der Grenzwerth für die auf der rechten Seite von (1) befindliche Summe ist der Bruch $\frac{1}{(x-\xi)^{\mathfrak{a}}}$.

Mit diesen Hülfsmitteln kann die Convergenz einer unendlich ausgedehnten recurrenten Reihe beurtheilt werden, die aus der Entwickelung eines beliebigen echten Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ entstanden ist. Wir bedürfen aber hiezu der Zerlegung der Function $f(x)$ in ihre einfachen Factoren. Die bezügliche Zerlegung der Function $f(x)$ sei durch die Gleichung (16) des § 93 dargestellt, ferner nach den dortigen Vorschriften die Zerlegung des Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ in solche Partialbrüche bewerkstelligt, deren Zähler Constanten, deren Nenner die Potenzen $(x-\xi_1), \ldots (x-\xi_1)^{\mathfrak{a}_1}, \ldots (x-\xi_\lambda), \ldots (x-\xi_\lambda)^{\mathfrak{a}_\lambda}$ sind, und deren Gestalt in der Gleichung (18*) des § 93 angedeutet ist. Für jeden einzelnen Partialbruch lässt sich nun die nach den negativen Potenzen der Variable x fortschreitende Entwickelung gemäss dem Vorbilde der obigen Gleichung (2) ausführen, indem der zugehörige constante Zähler auf beiden Seiten als Factor hinzugefügt wird. Das Aggregat der sämmtlichen auf $(t+1)$ Glieder ausgedehnten Entwickelungen wird dann gleich dem Aggregat der $(t+1)$ ersten Glieder der in (1) des § 91 definirten recurrenten Reihe, welches Aggregat in (6) des § 92 so dargestellt ist

$$(3)\quad \frac{r(x)}{f(x)} - \frac{R_0^{(t)} x^{n-t-2} + R_1^{(t)} x^{n-t-3} + \ldots + R_{n-1}^{(t)} x^{-t-1}}{f(x)}$$
$$= Q_0\, x^{-1} + Q_1\, x^{-2} + \ldots + Q_t\, x^{-t-1}.$$

Auch lässt sich die Zusammensetzung des Bestandtheiles $\frac{r(x)}{f(x)}$ der linken Seite von (3) aus den einzelnen Partialbrüchen und die Zusammensetzung des zweiten Bestandtheils der linken Seite aus den Restbrüchen der einzelnen Partialentwickelungen leicht übersehen.

Die Bedingungen für die Convergenz der einzelnen partiellen recurrenten Reihen sind nun die folgenden: für diejenigen Reihen, welche zu den Nennern $x - \xi_1, \ldots (x - \xi_1)^{\alpha_1}$ gehören, muss der absolute Betrag der Grösse x, das heisst, falls man x reell annimmt, der absolute Werth der Grösse x grösser sein als der absolute Betrag der Grösse ξ_1; für die Reihen, welche zu den Nennern $x - \xi_2, \ldots (x - \xi_2)^{\alpha_2}$ gehören, muss der absolute Betrag der Grösse x grösser sein als der absolute Betrag der Grösse ξ_2, u. s. f.

Es muss daher, damit die Summen aller einzelnen Reihen convergiren, der absolute Betrag der Grösse x grösser sein als jeder der absoluten Beträge der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$. Falls dieser Bedingung Genüge geleistet ist, so haben wir gefunden, dass die Summe jeder partiellen recurrenten Reihe bei wachsender Zahl t gegen einen Grenzwerth convergirt, welcher durch den Bruch dargestellt wird, aus dessen Entwickelung die Reihe entstanden ist. Das Aggregat der in Rede stehenden Partialbrüche ist aber der Bruch $\frac{r(x)}{f(x)}$ selbst. Hieraus darf geschlossen werden, *dass das auf der rechten Seite von* (3) *befindliche Aggregat der* $(t+1)$ *ersten Glieder einer recurrenten Reihe bei wachsender Zahl t convergirt, sobald der absolute Betrag der Grösse x grösser ist als der absolute Betrag von jeder der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$, und dass die Summe der betreffenden unendlich ausgedehnten Reihe gleich dem Werthe des Bruches $\frac{r(x)}{f(x)}$ ist.*

Bei dem in § 95 angeführten Beispiele gelten die Werthe $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2 + i\sqrt{5}$, $\xi_3 = 2 - i\sqrt{5}$, deren absolute Beträge re-

spective gleich 1, 3, 3 sind. Die zugehörige recurrente Reihe der dritten Ordnung convergirt deshalb, sobald der absolute Betrag der Grösse x die Zahl Drei übertrifft.

Wenn man, wie im vorigen §, für die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ und die Grösse x die *Gauss*'sche geometrische Interpretation anwendet, so müssen die Punkte, die solchen Werthen der Grösse x entsprechen, für welche die aufgestellte Bedingung befriedigt ist, ausserhalb des grössesten von allen Kreisen liegen, die um den Punkt, welcher die Null repräsentirt, als Mittelpunkt beschrieben sind und durch die Punkte hindurchgehen, die zu den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\lambda$ gehören.

Abschnitt IV.

Exponentialfunctionen und Logarithmen, trigonometrische Functionen und inverse trigonometrische Functionen.

Capitel I.

Exponentialfunctionen und Logarithmen.

§ 100. Exponentialfunctionen.

Die Rechnung mit den Potenzen, deren Basis C eine beliebige bestimmte positive Grösse ist, und deren Exponenten positive oder negative rationale ganzzahlige Brüche sind, gründet sich auf den Nachweis, dass die reelle positive $n$te Wurzel aus der Grösse C eindeutig bestimmt ist. Dieser Nachweis ist in § 20 geführt, und an denselben schliesst sich die Definition einer Potenz $C^{\frac{a}{n}}$ als eindeutig bestimmte positive Grösse; hier bedeutet n eine positive ganze Zahl und a eine positive oder negative ganze Zahl. Wenn n_1 eine zweite positive ganze Zahl, und b_1 eine zweite positive oder negative ganze Zahl ist, so sind die Regeln für die Rechnung mit den Potenzen von der Basis C und von rationalen gebrochenen Exponenten in den Gleichungen enthalten, die sich in (10) des § 19 und in (2) des § 20 finden, und folgendermassen lauten

$$(1) \qquad C^{\frac{a}{n}} . C^{\frac{b_1}{n_1}} = C^{\frac{a}{n} + \frac{b_1}{n_1}},$$

$$(2) \qquad \frac{C^{\frac{a}{n}}}{C^{\frac{b_1}{n_1}}} = C^{\frac{a}{n} - \frac{b_1}{n_1}},$$

(3) $$\left(C^{\frac{a}{n}}\right)^{\frac{b_1}{n_1}} = C^{\frac{a b_1}{n n_1}}.$$

Die Potenz $C^{\frac{1}{n}}$ ist die einzige positive reelle Wurzel der reinen Gleichung des $n$ten Grades

$$\omega^n = C,$$

und die Potenz $C^{\frac{a}{n}}$ ist gleichzeitig sowohl die einzige positive reelle Wurzel der reinen Gleichung des $n$ten Grades

$$\psi^n = C^a$$

wie auch die $a$te Potenz der Grösse $C^{\frac{1}{n}}$. In so fern bildet die Rechnung mit den Potenzen, deren Exponenten ganzzahlige Brüche sind, einen Theil der Algebra. Man kann nun, wie sogleich gezeigt werden soll, den Begriff der Potenz einer Basis C dahin ausdehnen, dass der Exponent eine beliebige rationale oder irrationale bestimmte reelle Grösse sein darf; dieser erweiterte Begriff geht dann über das Gebiet der Algebra hinaus.

Der zu dem bezüglichen Zwecke führende Process besteht in einer Anwendung des Gedankenganges, auf dem die Rechnung mit Grössen, die nicht rationale ganzzahlige Brüche dargestellt sind, überhaupt beruht, und der in den §§ 15 und 16 auseinander gesetzt ist. Wir kehren nunmehr zu dem damaligen Ausgangspunkte zurück und machen dieselbe Annahme wie in § 15, dass eine Reihe von rationalen ganzzahligen Brüchen

(5) $$\gamma', \gamma'', \ldots$$

gegeben sei, welche durch die Befolgung bestimmter Vorschriften unbeschränkt fortgesetzt werden kann und so beschaffen ist, dass ihre Individuen einen bestimmten Werth numerisch niemals überschreiten, und dass sich immer für einen beliebig gegebenen kleinen Zahlenwerth ω ein Bruch $\gamma^{(p)}$ bezeichnen lässt, dessen mit irgend einem späteren Bruche der Reihe $\gamma^{(p+s)}$ genommener Unterschied $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}$, abgesehen von seinem Vorzeichen, unter dem Werthe ω liegt. Die Brüche der Reihe (5) mögen nach einander der bestimmten reellen positiven Grösse C als Exponenten beigelegt werden, wodurch die entsprechende *Reihe von bestimmten Grössen*

(6) $$C^{\gamma'},\ C^{\gamma''}, \ldots$$

entsteht. Die Grösse C muss von der Einheit verschieden sein, wenn nicht alle diese Grössen selbst den Werth der Einheit haben sollen. Im übrigen darf C ebenso gut über als unter der Einheit liegen; um eine feste Vorstellung zu haben, wird von jetzt ab angenommen, dass C grösser als die Einheit sei. Man kann nun beweisen, dass aus der vorausgesetzten Eigenschaft der Brüche $\gamma', \gamma'', \ldots$ eine entsprechende Eigenschaft der Grössen $C^{\gamma'}, C^{\gamma''}, \ldots$ folgt. Da sich zu jedem beliebig kleinen gegebenen Zahlenwerth ω eine solche ganze Zahl M wählen lässt, dass der Bruch $\frac{1}{M}$ noch kleiner ist als ω, so steht nichts im Wege, bei der von den Brüchen (5) zu erfüllenden Forderung den beliebig kleinen gegebenen Zahlenwerth ω durch einen passend gewählten Bruch $\frac{1}{M}$ zu ersetzen. Es darf also verlangt werden und ist in Folge der getroffenen Voraussetzung immer möglich, für jeden dem Bruche $\frac{1}{M}$ beizulegenden kleinen Werth eine Zahl p so zu bestimmen, dass, wie auch immer die positive Zahl s angenommen werde, die Bedingung

(7) $$-\frac{1}{M} < \gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)} < \frac{1}{M}$$

erfüllt ist. Da die Grösse C über der Einheit liegen soll, so befindet sich die Grösse $C^{\frac{1}{n}}$ ebenfalls über der Einheit, und die Potenz $C^{\frac{a}{n}}$ über oder unter der Einheit, je nachdem die ganze Zahl a positiv oder negativ ist, während die Grösse $C^0 = 1$ ist. Demnach folgt aus der obigen Gleichung (2), dass, wenn für zwei Brüche $\frac{a}{n}$ und $\frac{b_1}{n_1}$ die Differenz $\frac{a}{n} - \frac{b_1}{n_1}$ positiv ist oder die Ungleichheit $\frac{a}{n} > \frac{b_1}{n_1}$ gilt, der Quotient $\frac{C^{\frac{a}{n}}}{C^{\frac{b_1}{n_1}}}$ über der Einheit liegen oder $C^{\frac{a}{n}} > C^{\frac{b_1}{n_1}}$ sein muss. Vermöge dessen zieht die

aufgestellte Bedingung (7) die Ungleichheit

(8) $$C^{-\frac{1}{M}} < C^{\gamma^{(p)} - \gamma^{(p+s)}} < C^{\frac{1}{M}}$$

nach sich. Auf Grund derselben haben die Individuen der Reihe (6) die Eigenschaft, *dass der Quotient des Individuums* $C^{\gamma^{(p)}}$ *und irgend eines Individuums* $C^{\gamma^{(p+s)}}$ *von höherer Stellenzahl zwischen den Grössen* $C^{-\frac{1}{M}}$ *und* $C^{\frac{1}{M}}$ *eingeschlossen bleibt.*

Die Grösse $C^{\frac{1}{M}}$ muss, da C grösser als die Einheit ist, ebenfalls grösser als die Einheit sein; sie kommt aber der Einheit um so näher, je grösser die Zahl M genommen wird. Es sei

(9) $$C^{\frac{1}{M}} = 1 + \delta$$

wo δ eine positive Grösse bedeutet, so folgt daraus

$$C = (1 + \delta)^M$$

und man kann aus einer in § 19 angestellten Betrachtung oder aus dem in § 46 bewiesenen binomischen Lehrsatze schliessen, dass $(1+\delta)^M$ grösser ist als der Ausdruck $1 + M\delta$. Mithin ergiebt sich

(10) $$C > 1 + M\delta,$$

deshalb ist $\delta < \frac{C-1}{M}$, und folglich

(10*) $$C^{\frac{1}{M}} = 1 + \delta < 1 + \frac{C-1}{M}.$$

Man darf daher aus (8) die Schlüsse ziehen, dass

(11) $$C^{\gamma^{(p)}} < C^{\frac{1}{M}} C^{\gamma^{(p+s)}} < \left(1 + \frac{C-1}{M}\right) C^{\gamma^{(p+s)}},$$

und dass

(12) $$C^{\gamma^{(p+s)}} < C^{\frac{1}{M}} C^{\gamma^{(p)}} < \left(1 + \frac{C-1}{M}\right) C^{\gamma^{(p)}}$$

ist. Weil aber keiner der Brüche (5) einen bestimmten Werth numerisch überschreiten darf, so kann auch keine von den sämmtlichen mit diesen Brüchen als Exponenten gebildeten Potenzen der Basis C einen gewissen positiven Werth K überschreiten. Daher folgen aus (11) und (12) beziehungsweise die Ungleichheiten

$$(13)\qquad C^{\gamma^{(p)}} - C^{\gamma^{(p+s)}} < \frac{C-1}{M}\, C^{\gamma^{(p+s)}} < \frac{C-1}{M}\, K,$$

$$(14)\qquad C^{\gamma^{(p+s)}} - C^{\gamma^{(p)}} < \frac{C-1}{M}\, C^{\gamma^{(p)}} < \frac{C-1}{M}\, K.$$

Die Differenz von zwei Grössen aus der Reihe (6) *von dem Zeiger p und dem Zeiger $p+s$, der um irgend eine Zahl s grösser ist als p, $C^{\gamma^{(p)}} - C^{\gamma^{(p+s)}}$, ist also abgesehen von ihrem Vorzeichen kleiner als der* Werth $\frac{(C-1)K}{M}$ *und kann daher durch die Wahl einer hinreichend grossen Zahl M beliebig klein gemacht werden.*

Ebenso wie in § 15 von den *ganzzahligen Brüchen* (5) der Ausdruck gebraucht wird, *dass sie sich einem Grenzwerthe nähern,* so berechtigt die eben nachgewiesene Eigenschaft der *bestimmten Grössen* (6) zu der Aussage, *dass dieselben sich ebenfalls einem Grenzwerthe nähern.* Es ist in § 16 ein eigenes Zeichen für den Grenzwerth der Reihe von ganzzahligen Brüchen (5), nämlich $\mathfrak{G}$, eingeführt und die Rechnung mit Grenzwerthen begründet worden. In demselben Sinne darf ein Zeichen für den Grenzwerth der Reihe von bestimmten Grössen (6) eingeführt werden. Das übliche Zeichen hiefür ist *das Zeichen einer Potenz von der Basis C und dem Exponenten $\mathfrak{G}$,*

$$(15)\qquad C^{\mathfrak{G}}.$$

Insofern also, als durch $\mathfrak{G}$ eine beliebige bestimmte, positive oder negative, rationale oder irrationale Grösse ausgedrückt wird, stellt das vermöge der Reihe (6) *definirte Zeichen $C^{\mathfrak{G}}$ die erwähnte Verallgemeinerung des Begriffs einer Potenz dar.*

In § 15 wurde hervorgehoben, dass die auf einander folgenden Brüche (5) entweder die Beschaffenheit haben, *ihrem numerischen Werthe nach allmählig unter jede noch so kleine Grösse herabzusinken,* oder die Beschaffenheit, *beliebig weit fortgesetzt niemals numerisch kleiner zu werden als eine gewisse feste Grösse,* und *dass in dem zweiten Falle die sämmtlichen Brüche von einer bestimmten Stelle ab entweder positiv oder negativ sein müssen.* Dem ersten Falle entspricht die Bezeichnung, *dass der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ die Null sei,* dem zweiten Falle, je nachdem die eine oder die andere Voraussetzung zutrifft, die Aussage, *dass der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ positiv sei,* oder *dass der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ ne-*

gativ sei. Man kann nun leicht beurtheilen, wie sich die Grössen (6) bei jeder der drei Annahmen verhalten. Wenn die Brüche (5) sich *der Null als Grenzwerth* nähern, so können sie entweder von einer bestimmten Stelle ab positiv bleiben oder von einer bestimmten Stelle ab negativ bleiben oder fortwährend ihr Vorzeichen wechseln; immer müssen die Werthe der Brüche von einer gewissen Stellenzahl p ab zwischen den Grenzen $-\frac{1}{M}$ und $+\frac{1}{M}$ liegen, wo M, wie vorhin, eine beliebig grosse positive ganze Zahl bedeutet. Hieraus folgt aber vermöge einer schon angewendeten Schlussweise, dass die gleichstelligen Grössen der Reihe (6) zwischen den Grenzen $C^{-\frac{1}{M}}$ und $C^{\frac{1}{M}}$ eingeschlossen sind. Nun stellte sich heraus, dass $C^{\frac{1}{M}}$ kleiner ist als die Grösse $1 + \frac{C-1}{M}$, mithin liegen die in Rede stehenden Grössen der Reihe (6) zwischen den Grenzen $1 + \frac{C-1}{M}$ und $\frac{1}{1 + \frac{C-1}{M}}$, welche beide von der Einheit beliebig wenig verschieden sind, und *nähern sich deshalb der Einheit als ihrem Grenzwerthe.* Sobald die Brüche (5) von einer bestimmten Stelle ab *positiv* sind und *einen gewissen festen von der Null verschiedenen Werth stets übertreffen*, so liegen die gleichstelligen Grössen der Reihe (6) aus den erörterten Gründen *über einem gewissen die Einheit übertreffenden Werthe.* Sobald die Brüche (5) von einer bestimmten Stelle ab *negativ* sind und *numerisch einen gewissen festen von der Null verschiedenen Werth stets übertreffen,* so befinden sich die gleichstelligen Grössen der Reihe (6) *unter einem gewissen unterhalb der Einheit liegenden Werthe.* Diese Ergebnisse lassen sich in den Satz zusammen fassen, *dass die Grösse $C^{-\mathfrak{S}}$, bei der C einen bestimmten positiven die Einheit übertreffenden Werth hat, und die stets positiv ist, für jeden positiven Werth von $\mathfrak{S}$ grösser als die Einheit, für jeden negativen Werth von $\mathfrak{S}$ kleiner als die Einheit, und für den Werth $\mathfrak{S}=0$ gleich der Einheit ist.*

Nachdem die Potenz mit dem beliebigen Exponenten $C^{\mathfrak{G}}$ definirt ist, darf auch der Werth der Grösse $C^{\mathfrak{G}}$ mit den Werthen der einzelnen in (6) auf einander folgenden Potenzen $C^{\gamma'}, C^{\gamma''}, \ldots$ verglichen werden, und dann berechtigen die obigen Ungleichheiten (13) und (14) zu der Aussage, *dass, wofern der Bruch $\gamma^{(p)}$ der bestimmten Grösse $\mathfrak{G}$ beliebig nahe kommt, der numerische Werth der Differenz $C^{\mathfrak{G}} - C^{\gamma^{(p)}}$ beliebig klein wird.* Hieraus ergiebt sich weiter, *dass, wenn zwei bestimmte Grössen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ eine numerisch beliebig kleine Differenz haben, auch der numerische Werth der Differenz $C^{\mathfrak{G}_1} - C^{\mathfrak{G}}$ beliebig klein wird.*

Um die Regeln für die Rechnung mit Potenzen von beliebigen Exponenten zu erhalten, werde, wie in § 15, eine zweite Reihe von Brüchen

(16) $$\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$$

betrachtet, welche mit der Reihe der Brüche (5) die gleichen Anforderungen erfüllt. Der Grenzwerth, dem sich die Brüche (16) nähern, heisse $\mathfrak{E}$. In Folge der getroffenen Voraussetzungen nähern sich die Grössen

(17) $$C^{\varepsilon'}, C^{\varepsilon''}, \ldots$$

einem Grenzwerthe, der mit $C^{\mathfrak{E}}$ zu bezeichnen ist. Wir bilden jetzt drei neue Reihen von Grössen; indem jedes Glied von (6) mit jedem gleichstelligen Gliede von (17) multiplicirt wird, vermöge der Formel (1) die Reihe

(18) $$C^{\gamma'+\varepsilon'}, C^{\gamma''+\varepsilon''}, \ldots,$$

indem jedes Glied von (6) durch jedes gleichstellige Glied von (17) dividirt wird, vermöge der Formel (2) die Reihe

(19) $$C^{\gamma'-\varepsilon'}, C^{\gamma''-\varepsilon''}, \ldots$$

und indem jedes Glied von (6) auf eine Potenz erhoben wird, deren Exponent durch das gleichstellige Glied von (16) bezeichnet ist, vermöge der Formel (3) die Reihe

(20) $$C^{\gamma'\varepsilon'}, C^{\gamma''\varepsilon''}, \ldots$$

Nun ist aus den gleichstelligen Gliedern der Reihen (5) und (16) die Reihe der Exponenten in (18) durch *Addition*, die Reihe der Exponenten in (19) durch *Subtraction*, die Reihe der Exponenten in (20) durch *Multiplication* entstanden. Die ge-

nannten Reihen fallen daher respective mit den drei Reihen zusammen, die in § 16 mit (1), (2), (3) bezeichnet sind. Von jeder dieser Reihen ist dort nachgewiesen, dass ihre Glieder sich einem bestimmten Grenzwerthe nähern, und die bezüglichen drei Grenzwerthe haben die Bezeichnung erhalten

$$\mathfrak{G}+\mathfrak{E},\ \mathfrak{G}-\mathfrak{E},\ \mathfrak{G}\mathfrak{E}. \tag{21}$$

Hiernach müssen sich auch die Glieder der Reihe (18), die Glieder der Reihe (19), die Glieder der Reihe (20) einem Grenzwerthe nähern, und zwar sind die Grenzwerthe respective durch

$$C^{\mathfrak{G}+\mathfrak{E}},\ C^{\mathfrak{G}-\mathfrak{E}},\ C^{\mathfrak{G}\mathfrak{E}} \tag{22}$$

zu bezeichnen. Wenn man jetzt nach dem Vorgange des § 16 die Bezeichnung der Operationen, welche mit den einzelnen Individuen einer Reihe vorgenommen sind, auf den Grenzwerth überträgt, so gilt die Aussage, dass das Product des Grenzwerthes $C^{\mathfrak{G}}$ und des Grenzwerthes $C^{\mathfrak{E}}$ gleich dem Grenzwerthe der Glieder von (18), der Quotient bei der Division des Grenzwerthes $C^{\mathfrak{G}}$ durch den Grenzwerth $C^{\mathfrak{E}}$ gleich dem Grenzwerthe der Glieder von (19) und der auf den Grenzwerth $\mathfrak{E}$ als Exponenten erhobene Grenzwerth $\mathfrak{G}$ gleich dem Grenzwerthe der Glieder von (20) ist; die Ausdrücke der in Rede stehenden Grenzwerthe sind in (22) angegeben. Bedienen wir uns hingegen einer andern Sprache, so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ die Zeichen für beliebig bestimmte positive oder negative Grössen, und es entstehen *die für die Rechnung mit Potenzen von beliebigen positiven oder negativen Exponenten geltenden drei Regeln*

$$C^{\mathfrak{G}}.\,C^{\mathfrak{E}}=C^{\mathfrak{G}+\mathfrak{E}}, \tag{23}$$

$$\frac{C^{\mathfrak{G}}}{C^{\mathfrak{E}}}=C^{\mathfrak{G}-\mathfrak{E}}, \tag{24}$$

$$(C^{\mathfrak{G}})^{\mathfrak{E}}=C^{\mathfrak{G}\mathfrak{E}}, \tag{25}$$

welche beziehungsweise dieselbe Gestalt haben, wie die obigen für rationale gebrochene Exponenten aufgestellten drei Regeln (1), (2), (3).

Es ist zuerst in § 16 darauf hingewiesen und dann in § 20 noch einmal betont worden, dass für irgend zwei bestimmte gegebene Grössen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ die Differenz $\mathfrak{G}-\mathfrak{E}$ entweder einen positiven Werth oder einen negativen Werth oder den Werth

Null hat, und dass je nach diesen drei Fällen entweder $\mathfrak{G}$ grösser als $\mathfrak{E}$, oder $\mathfrak{G}$ kleiner als $\mathfrak{E}$, oder $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ sein muss. Da sich nun gezeigt hat, dass die Potenz $C^{\mathfrak{G}-\mathfrak{E}}$, je nachdem $\mathfrak{G}-\mathfrak{E}>0$, $\mathfrak{G}-\mathfrak{E}<0$ oder $\mathfrak{G}-\mathfrak{E}=0$ ist, einen Werth erhält, der über der Einheit liegt, oder unter der Einheit liegt, oder der Einheit gleich ist, so erlaubt die Gleichung (24) den Schluss, *dass, je nachdem $\mathfrak{G}>\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}<\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{E}$ ist, entweder die Potenz $C^{\mathfrak{G}}$ grösser als die Potenz $C^{\mathfrak{E}}$, oder die Potenz $C^{\mathfrak{G}}$ kleiner als die Potenz $C^{\mathfrak{E}}$, oder die Potenz $C^{\mathfrak{G}}$ gleich der Potenz $C^{\mathfrak{E}}$ ausfällt.*

§ 101. Fortsetzung. Allgemeiner Begriff der Function einer variabeln Grösse.

Nachdem für eine bestimmte positive die Einheit übertreffende Basis C und für eine beliebig positive oder negative bestimmte Grösse $\mathfrak{G}$ als Exponent die Grösse $C^{\mathfrak{G}}$ vollständig definirt worden ist, kann der *Exponent* als eine *beliebig veränderliche positive oder negative Grösse* aufgefasst werden. Zu jedem positiven oder negativen Werthe $\mathfrak{G}$ der Variable x gehört dann ein eindeutig definirter Werth $C^{\mathfrak{G}}$, und diese Beziehung lässt sich unter einem neuen Gesichtspunkte betrachten.

Der Abschnitt II enthält in § 22 die Definition *einer algebraischen rationalen ganzen* und *einer algebraischen rationalen gebrochenen Function einer Variable x;* der Werth einer rationalen ganzen Function ist für jeden Werth der Variable x bestimmt, der Werth einer rationalen gebrochenen Function, die stets als der Quotient von zwei rationalen ganzen Functionen dargestellt werden kann, ist für alle Werthe der Variable x mit Ausnahme von denjenigen Werthen bestimmt, für die der Nenner jenes Quotienten gleich Null wird. Von den *trigonometrischen Functionen eines Winkels*, dem *Sinus* und dem *Cosinus* desselben, ist seit § 30 häufig die Rede gewesen. Wir haben aber darauf aufmerksam zu machen, dass der Ausdruck *Function* in einem viel weiteren Umfange gebraucht wird, worauf schon in § 96 hingedeutet ist. *Wenn zu jedem reellen Werth einer Variable x, der zwischen zwei bestimmten Werthen a und b liegt, das heisst, die Bedingung $a \leq x \leq b$ erfüllt, eine bestimmte Grösse zugeord-*

net ist, welche durch die Ausführung gegebener Vorschriften gefunden wird und für andere und andere Werthe der Variable x andere und andere Werthe annehmen kann, so sagt man, dass der Werth der betreffenden Grösse von der variablen Grösse x abhängt, oder, dass diese Grösse eine Function der Variable x ist. Der Werth der Variable x wird auch *das Argument der Function* genannt. Da nun für jeden reellen positiven oder negativen Werth von x die Grösse C^x einen vollkommen bestimmten Werth erhält, so ist C^x *eine für alle reellen Werthe von x definirte Function der Variable x;* dieselbe wird *die Exponentialfunction mit der Basis C* genannt. Nach den Ausführungen des vorigen § nimmt die Function C^x nur positive Werthe an; sie ist vermöge der Voraussetzung, dass die Basis C grösser als die Einheit sein soll, für jedes negative x kleiner als die Einheit, für jedes positive x grösser als die Einheit, und für $x=0$ gleich der Einheit; sobald man von einem bestimmten Werthe der Variable x zu einem grössern Werthe derselben übergeht, so wächst auch die Function C^x. *Ferner wird der Werth der Differenz $C^{x_1}-C^x$ beliebig klein, sobald die Grösse x_1-x positiv ist und beliebig klein wird.* Auch lässt sich leicht erkennen, dass, wofern die Variable x positive Werthe annimmt, die grösser sind als irgend eine gegebene Grösse, die Function C^x ebenfalls jede gegebene Grösse übertrifft, und dass, wenn die Variable x negative Werthe annimmt, die numerisch grösser sind als irgend eine gegebene Grösse, die Function C^x unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt. Denn, wenn M eine positive ganze Zahl bedeutet, so ist nach einer schon benutzten Bemerkung, da die Basis C über der Einheit liegt, die Potenz $C^M=(1+C-1)^M$ grösser als der Werth $1+M(C-1)$, welcher mit wachsendem M über jedes Mass hinauswächst; deshalb muss der Werth C^M für eine wachsende Zahl M über jedes Mass hinaus zunehmen, dagegen der Werth $C^{-M}=\frac{1}{C^M}$ unter jede noch so kleine Grösse herab abnehmen.

Hieraus folgt aber die behauptete Eigenschaft der Function C^x, da jeder noch so grosse positive Werth von x, wofern er

keine ganze Zahl ist, zwischen zwei auf einander folgenden positiven ganzen Zahlen liegen muss, und da für jeden negativen numerisch noch so grossen Werth von x das entsprechende gilt. Die Hauptregeln für die Rechnung mit der Exponentialfunction C^x sind in den Gleichungen (23), (24), (25) des vorigen § enthalten, und werden, sobald $\mathfrak{G} = x$, $\mathfrak{E} = x_1$ gesetzt wird, zu den folgenden

(1) $$C^x\, C^{x_1} = C^{x+x_1},$$

(2) $$\frac{C^x}{C^{x_1}} = C^{x-x_1},$$

(3) $$(C^x)^{x_1} = C^{x\,x_1}.$$

Die Multiplication von Exponentialfunctionen mit verschiedenen positiven Basen C und D und demselben Exponenten x erfolgt nach der leicht zu begründenden Regel

(4) $$C^x\, D^x = (CD)^x.$$

§ 102. Logarithmen.

Zu jedem positiven oder negativen Werthe der Variable x gehört ein bestimmter positiver Werth u der mit einer bestimmten, die Einheit übertreffenden Basis C gebildeten Exponentialfunction C^x. Man kann sich nun umgekehrt eine positive Grösse u gegeben denken und untersuchen, ob für dieselbe eine positive oder negative Grösse x existirt, durch welche die Gleichung

(1) $$u = C^x$$

befriedigt wird. Keinenfalls existiren *zwei von einander verschiedene Grössen x und x_1*, welche die gestellte Aufgabe lösen. Denn wären durch zwei solche Grössen die beiden Gleichungen $u = C^x$ und $u = C^{x_1}$ erfüllt, so würde die Division der ersten durch die zweite zu der Gleichung $1 = C^{x-x_1}$ führen, und diese schlösse einen Widerspruch in sich; es müsste, weil x und x_1 von einander verschieden angenommen sind, die Differenz $x - x_1$ positiv oder negativ sein, die Grösse C^{x-x_1} würde aber im ersten Falle über der Einheit, im zweiten Falle unter der Einheit liegen, und könnte daher niemals der Einheit gleich sein. Um die gewünschte Antwort zu finden, legen wir der Variable x

Reihen von auf einander folgenden Werthen bei und vergleichen die hervorgehenden Werthe der Exponentialfunction C^x mit dem gegebenen Werthe u.

Es werde x zuerst gleich der Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt; dann entstehen die Werthe der Function C^x

$$\ldots, C^2, C^1, 1, C^{-1}, C^{-2}, \ldots, \tag{2}$$

welche eine nach beiden Seiten unbegrenzt fortschreitende geometrische Reihe ausmachen. Die Glieder sind sämmtlich positiv, sie wachsen nach der einen Seite hin in der Weise, dass sie jede noch so grosse gegebene Grösse übertreffen, und nehmen nach der anderen Seite so stark ab, dass sie kleiner werden als jede noch so kleine gegebene Grösse. Der gegebene positive Werth u muss daher entweder einem Gliede der Reihe (2) gleich sein, oder zwischen zwei Glieder der Reihe fallen. Geschieht das erste, so ist der Exponent x gefunden und gleich einer bestimmten positiven oder negativen ganzen Zahl λ, trifft das zweite ein, so darf man aus der Ungleichheit

$$C^{\lambda+1} > u > C^{\lambda} \tag{3}$$

schliessen, dass, wenn es einen Exponenten giebt, welcher die Gleichung (1) erfüllt, derselbe zwischen den ganzen Zahlen λ und $\lambda + 1$ liegen muss.

Man kann nun in ähnlicher Weise fortfahren, wie in § 14 bei dem Nachweise der Existenz der aus einem gegebenen positiven Bruche zu ziehenden positiven $n$ten Wurzel zu Werke gegangen ist. Zwischen die ganzen Zahlen λ und $\lambda + 1$ werden auf einander folgende Brüche von einem beliebig angenommenen Nenner τ eingeschaltet, und mit diesen Exponenten die Werthe

$$C^{\lambda+1}, C^{\lambda+\frac{\tau-1}{\lambda}}, C^{\lambda+\frac{\tau-2}{\tau}}, \ldots C^{\lambda+\frac{2}{\tau}}, C^{\lambda+\frac{1}{\tau}}, C^{\lambda} \tag{4}$$

gebildet, welche wieder eine geometrische Reihe darstellen. Ihre Grösse steigt, wenn man die Glieder von rechts nach links durchläuft. Mithin muss die positive Grösse u, welche wegen (3) zwischen dem ersten und dem letzten Gliede liegt, auch entweder einem Gliede gleich sein, oder zwischen zwei auf einander folgende fallen. Demnach ist der gesuchte Exponent x

entweder gleich einem Bruche $\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}$, oder man hat die Ungleichheit

$$(5) \qquad C^{\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}} > u > C^{\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}},$$

um derentwillen, wenn es einen der Gleichung (1) genügenden Exponenten giebt, derselbe zwischen den von der Zahl τ abhängenden Grenzen $\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}$ und $\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}$ liegen muss.

Da die Grösse des Nenners τ keiner Einschränkung unterworfen ist, so kann nach und nach zu immer grössern Werthen desselben übergegangen werden. Sobald für einen bestimmten Werth von τ die Werthe $\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}$ und $\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}$ bestimmt sind, und für einen grössern Werth $\tau = \varphi$ die entsprechenden Werthe $\lambda + \frac{\mu'+1}{\varphi}$ und $\lambda + \frac{\mu'}{\varphi}$ bestimmt werden, so sind die beiden letztern innerhalb der beiden erstern eingeschlossen und es entstehen wie in § 14 aus den obern und den untern Werthen zwei Reihen, deren Glieder *sich demselben Grenzwerthe nähern.* Indem dieser *Grenzwerth* als eine *bestimmte Grösse* aufgefasst wird, darf sein Werth mit den für ein bestimmtes τ gebildeten Werthen $\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}$ und $\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}$ verglichen werden und liegt zwischen den letztern. Von den beiden in (5) für u angegebenen Grenzen wird die obere aus der unteren erhalten, indem man die letztere mit der Grösse $C^{\frac{1}{\tau}}$ multiplicirt. In Betreff der Grösse $C^{\frac{1}{\tau}}$ wurde in § 100 nachgewiesen, dass sie kleiner ist als der Werth $1 + \frac{C-1}{\tau}$, welcher für einen hinreichend grossen Werth der Zahl τ kleiner wird als eine beliebig kleine gegebene Grösse. Hieraus und aus dem Umstande, dass der Werth $C^{\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}}$ stets kleiner ist als die gegebene Grösse u, darf man folgern, dass die Differenz zwischen den beiden in (5) enthaltenen Grenzen der Grösse u für eine hinreichend grosse Zahl τ

beliebig klein wird; mithin gilt dasselbe sowohl von dem numerischen Werthe der positiven Differenz

$$u - C^{\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}}, \tag{6}$$

wie auch von dem numerischen Werthe der negativen Differenz

$$u - C^{\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}}. \tag{7}$$

Die Forderung (1) besteht darin, dass die Differenz

$$u - C^x \tag{8}$$

gleich Null werde. Die Differenz (6) und die Differenz (7) nehmen aber für einen genügend grossen Werth der Zahl τ einen *beliebig kleinen numerischen Werth* an, das heisst einen solchen, dessen *Grenzwerth die Null* ist. *Also kann der gesuchte Exponent x bei einem hinreichend grossen Werthe der Zahl τ sowohl durch den Werth $\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}$ wie auch durch den Werth $\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}$, welcher von dem ersteren um die entsprechend kleine Grösse $\frac{1}{\tau}$ differirt, mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden; der Grenzwerth, welchem sich die Werthe $\lambda + \frac{\lambda'}{\tau}$ und $\lambda + \frac{\lambda'+1}{\tau}$ beständig nähern, ist der gesuchte Exponent x, und somit ist die Existenz desselben nachgewiesen.*

Bei der eben behandelten Aufgabe *wird der Exponent x der Logarithmus der positiven Grösse u in dem System mit der Basis C genannt und durch das Zeichen*

$$x = \operatorname{Log} u \tag{9}$$

bezeichnet. Vermöge der angestellten Erörterung ist die *Function $\operatorname{Log} u$ der Variable u für alle positiven Werthe der Variable eindeutig* definirt, so dass zu jedem positiven Werthe von u ein und nur ein Werth der Function gehört. Man pflegt den gegebenen Werth u, dessen Logarithmus gesucht wird, als die *Zahl* oder den *Numerus* zu bezeichnen. Einem unter der Einheit liegenden positiven Werthe von u entspricht ein negativer Logarithmus, einem über der Einheit liegenden Werthe von u ein positiver Logarithmus, der Logarithmus der Einheit ist die Null. Zu fortwährend wachsenden Werthen von u gehören Lo-

garithmen, welche jede positive Zahl überschreiten, zu Werthen von u, die sich fortwährend abnehmend der Null nähern, Logarithmen, die negativ sind und deren numerischer Werth nach und nach jede Zahl übertrifft.

Die Hauptregeln für die Rechnung mit Logarithmen sind eine unmittelbare Folge der Hauptregeln für die Rechnung mit der Exponentialfunction, die in (1), (2), (3) des § 101 mitgetheilt sind. Es sei der Gleichung (9) entsprechend für eine beliebige positive Grösse u_1

(10) $$x_1 = \text{Log } u_1,$$

in Folge dessen verwandeln sich jene Gleichungen in diese

$$uu_1 = C^{x+x_1}, \ \frac{u}{u_1} = C^{x-x_1}, \ u^{x_1} = C^{x x_1}.$$

Weil nun zu jeder positiven Grösse ein und nur ein Logarithmus gehört, so muss in jeder der vorstehenden Gleichungen der der Basis C beigelegte Exponent der Logarithmus des auf der linken Seite befindlichen positiven Werthes sein. Die drei Exponenten sind beziehungsweise $x + x_1 = \text{Log } u + \text{Log } u_1$, $x - x_1 = \text{Log } u - \text{Log } u_1$, $x x_1 = x_1 \text{ Log } u$; mithin gelten *die drei Hauptregeln der Rechnung mit Logarithmen*

(11) $$\text{Log }(uu_1) = \text{Log } u + \text{Log } u_1,$$
$$\text{Log}\left(\frac{u}{u_1}\right) = \text{Log } u - \text{Log } u_1,$$
$$\text{Log }(u^{x_1}) = x_1 \text{ Log } u.$$

An diese Gleichungen knüpft sich die grosse praktische Bedeutung, welche die Rechnung mit Logarithmen für die Ausführung von Multiplicationen, von Divisionen und von Potenzirungen besitzt. Wenn man für dieselbe Grösse u in einem System von der Basis C und einem System von der Basis D den Logarithmus bestimmt, und neben die obigen Gleichungen $u = C^x$, $x = \text{Log } u$, die Gleichungen $u = D^\xi$, $\xi = \log u$ setzt, so ist aus der Gleichung $C = D^{\log C}$ die Gleichung $u = D^{x \log C}$, und aus der Verbindung der letztern mit der Gleichung $u = D^\xi$ die Beziehung $\xi = x \text{ Log } C$ zu schliessen, oder $\text{Log } u = \frac{\log u}{\log C}$. Als die Basis des zum praktischen Gebrauche bestimmten Systems wird die Zahl *Zehn* genommen. Bei der Bildung des Logarith-

mus einer Zahl u in diesem System hat die in (3) definirte ganze Zahl λ den Namen der *Characteristik des Logarithmus*, der jedesmal zu der ganzen Zahl λ hinzuzuaddirende echte Bruch wird als *Decimalbruch* dargestellt, und *der Zähler des betreffenden Decimalbruchs* heisst die *Mantisse des Logarithmus.* Da zu jeder in dem dekadischen System ausgedrückten Zahl die Characteristik des betreffenden Logarithmus leicht angegeben werden kann, so bedarf es nur der Herstellung von Tafeln für die Mantissen der Logarithmen, und diesem Zwecke dienen die üblichen Logarithmentafeln. Damit der Logarithmus einer Zahl u als das Aggregat einer ganzen Zahl und eines Decimalbruches erscheine, hat man den oben mit τ bezeichneten Nenner successive gleich 10, 10^2, . . . bis zu einer beliebig hohen Potenz der Zahl *Zehn* zu nehmen. Es handle sich zum Beispiel um den Logarithmus der Zahl 13. Hier ist die Characteristik $\lambda = 1$; ferner ergeben sich die Werthe für

$$\begin{array}{ll} \tau = 10\ , & \lambda' = 1 \\ \tau = 10^2, & \lambda' = 11 \\ \tau = 10^3, & \lambda' = 113 \\ \tau = 10^4, & \lambda' = 1139 \\ \tau = 10^5, & \lambda' = 11394 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Man sieht, dass, wenn die Zahl τ gleich der Potenz 10^a gesetzt wird, die zugeordnete Zahl λ' die Mantisse des auf a Decimalstellen berechneten Logarithmus bildet. Bricht man die Berechnung hier ab, so muss das Resultat genügen, dass der gesuchte Logarithmus zwischen den Grenzen $\lambda + \frac{\lambda'}{10^a}$ und $\lambda + \frac{\lambda' + 1}{10^a}$ liegt. Wenn aber die Berechnung bis zu einem grössern Werthe der Zahl τ, etwa $\tau = 10^b$, fortgesetzt, und dem entsprechend eine auf b Decimalziffern bezügliche Mantisse μ' aufgesucht wird, dann sind damit für den gesuchten Logarithmus die Grenzen $\lambda + \frac{\mu'}{10^b}$ und $\lambda + \frac{\mu' + 1}{10^b}$ gewonnen, welche innerhalb der früher gefundenen Grenzen liegen. Diese annähernde Bestimmung kann durch die Vergrösserung der Anzahl der Decimalziffern beliebig weit getrieben werden.

Capitel II.

Trigonometrische Functionen und inverse trigonometrische Functionen.

§ 103. Trigonometrische Functionen.

Es war nothwendig, die Grundeigenschaften der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus eines Winkels in § 30 und den darauf folgenden §§ zu besprechen, um davon bei verschiedenen Gelegenheiten eine Anwendung machen zu können. Wir beschränken uns deshalb an dieser Stelle auf die Hinzufügung einiger Bemerkungen.

Da festgesetzt worden ist, dass der Winkel, auf den sich eine trigonometrische Function bezieht, durch die Länge des entsprechenden Bogens in einem mit der Längeneinheit als Radius beschriebenen Kreise gemessen werden soll, so bedarf es, um die Messung ausführen und in Zahlen darstellen zu können, einer Erklärung darüber, was unter der Länge eines Kreisbogens zu verstehen sei. Die Längeneinheit, welche bei der Messung benutzt wird, ist an und für sich ein Massstab für begrenzte gerade Linien. Es lässt sich nun beweisen, dass, wenn auf einem gegebenen Kreisbogen zwischen den Endpunkten desselben nach einander mehrere Punkte eingeschaltet werden und jeder Punkt mit dem nächsten durch eine gerade Linie verbunden wird, *die Summe der Längen der auf einander folgenden Sehnen, oder die Summe der Seiten des dem Kreisbogen eingeschriebenen Polygons* sich *einem festen Grenzwerthe* nähert, sobald nach und nach die Zahl der eingeschalteten Punkte vergrössert und gleichzeitig die Länge der einzelnen Sehnen verkleinert wird. *Der Grenzwerth der Summe der Seiten des dem Kreisbogen eingeschriebenen Polygons ist das Mass für die Länge des Kreisbogens.* Auch findet man, dass, wenn in den sämmtlichen innerhalb des Kreisbogens angenommenen Punkten und den beiden Endpunkten Tangenten an den Kreis gelegt werden und auf jeder Tangente von dem Berührungspunkte aus ein Stück abgeschnitten wird, das bis zu dem Schnittpunkte mit der nächsten Tangente reicht, *die Summe der Längen dieser Stücke von Tangenten oder die Summe der Seiten des dem Kreisbogen umgeschriebenen Polygons*

sich ebenfalls *einem festen Grenzwerthe* nähert, der mit dem zuerst bezeichneten Grenzwerthe zusammenfällt, und daher ebenfalls *ein Mass für die Länge des betreffenden Kreisbogens* ergiebt. Beide Definitionen lassen sich auch für *die Bestimmung* der *Länge der ganzen Kreisperipherie* benutzen und liefern unter der Voraussetzung, dass der Kreisradius gleich der Einheit angenommen ist, eine Definition des doppelten Werthes der Zahl $\pi = 3,1415926\,..$

Wenn bei einem Bogen, der kleiner ist als die halbe Kreisperipherie, die beiden Endpunkte durch eine Sehne verbunden, und wenn in den beiden Endpunkten des Bogens Tangenten an den Kreis gelegt und bis zu ihrem gemeinsamen Schnittpunkte verlängert werden, so folgt aus der so eben aufgestellten Definition mit Hinzuziehung des Lemmas, dass in einem jeden Dreiecke die Summe von zwei Seiten grösser ist als die dritte Seite, der Satz, *dass die Länge des Kreisbogens grösser ist als die Länge der zugehörigen Sehne, und kleiner als die Summe der Längen der beiden in den Endpunkten construirten Tangenten.* Um diesen Satz in Zeichen auszudrücken, sei der Kreisradius gleich der Einheit, die Länge des betrachteten Kreisbogens gleich $2\,y$, dann wird die Sehne durch den doppelten Werth der Function $\sin y$ und jede der Tangenten durch den Quotienten $\frac{\sin y}{\cos y}$ dargestellt, und man erhält, mit Weglassung des Factors 2, für jeden zwischen der Null und der Grösse $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werth von y die Ungleichheit

(1) $$\sin y < y < \frac{\sin y}{\cos y}.$$

Die trigonometrischen Functionen $\sin y$ und $\cos y$ sind vermöge der Gleichungen

(2) $$\cos(y+2\pi) = \cos y,\ \sin(y+2\pi) = \sin y$$

periodische Functionen des Arguments y *mit der Periode* 2π, und für alle positiven und negativen Werthe des Arguments eindeutig bestimmt. Für denselben Umfang zweier Argumente y und y_1 gelten die *Additionsformeln*

(3) $$\begin{aligned}\cos y \cos y_1 - \sin y \sin y_1 &= \cos(y+y_1)\\ \sin y \cos y_1 + \sin y \cos y_1 &= \sin(y+y_1),\end{aligned}$$

welche durch Benutzung der imaginären Einheit i sich zu der Gleichung vereinigen

(4) $(\cos y + i \sin y)(\cos y_1 + i \sin y_1) = \cos(y+y_1) + i \sin(y+y_1)$.

Vermöge der Grundgleichung

(5) $$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

wird die Function $\cos y$ aus der Function $\sin y$, und ebenso die Function $\sin y$ aus der Function $\cos y$ durch die Ausziehung einer Quadratwurzel erhalten. Nachdem festgesetzt worden ist, dass für positive unter $\frac{\pi}{2}$ liegende Werthe des Arguments y die Functionen $\sin y$ und $\cos y$ positive Werthe haben, mithin die in den Gleichungen

(6) $$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}, \quad \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$$

auftretenden Quadratwurzelgrössen positiv sein sollen, ergiebt sich der Verlauf der Functionen Cosinus und Sinus, der einem Fortschreiten des Arguments nach grösseren oder nach kleineren Werthen entspricht, und daher auch die zugehörige Bestimmung der für die Quadratwurzelgrössen in (6) zu nehmenden Vorzeichen mit Nothwendigkeit aus den Additionsformeln (3).

Durch die Gleichung (6) geht die Ungleichheit (1), bei der y zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ angenommen ist, in die Gestalt

(7) $$\sin y < y < \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

über und lehrt, dass für einen positiven gegen die Null abnehmenden Werth von y die Function $\sin y$ ebenfalls, positiv bleibend, sich der Null als Grenzwerth nähert, und dass auch umgekehrt bei einem positiven gegen die Null abnehmenden Werthe der Function $\sin y$ der zugeordnete Werth der Grösse y positiv bleibend sich der Null als Grenzwerth nähert. Für die Function $\cos y$ folgt alsdann aus der Gleichung (6), dass sie bei einem positiven gegen die Null abnehmenden Werthe von y positiv ist und sich wachsend der Einheit als Grenzwerth nähert. Sobald daher zu einem festen Argument y ein positives aber abnehmend sich der Null näherndes Argument y_1 hinzu addirt wird, so lässt sich aus dem erörterten Verhalten der Functionen $\cos y_1$ und $\sin y_1$ und der Betrachtung der Additionsformeln (3)

der Schluss ziehen, dass der Werth $\cos(y+y_1)$ von dem Werthe $\cos y$ und der Werth $\sin(y+y_1)$ von dem Werth $\sin y$ nur beliebig wenig abweicht. Die Formeln, vermittelst deren aus dem Cosinus und dem Sinus eines Arguments durch Quadratwurzelausziehung der Cosinus und der Sinus des halben Arguments entstehen, sind in § 34 benutzt worden, um die Darstellbarkeit des Cosinus und Sinus für jedes Argument $\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ nachzuweisen, bei dem q eine beliebige positive ganze Zahl und t eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Weil aber jeder gegebene reelle Werth y durch hinreichende Vergrösserung des Exponenten q in zwei beliebig zu verengernde Grenzen $\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ und $\frac{(t+1)\pi}{2^{q-1}}$ eingeschlossen werden kann, und weil so eben bewiesen ist, dass dem entsprechend sowohl $\cos y$ von dem Werthe $\cos\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ und dem Werthe $\cos\frac{(t+1)\pi}{2^{q-1}}$, wie auch $\sin y$ von dem Werthe $\sin\frac{t\pi}{2^{q-1}}$ und dem Werthe $\sin\frac{(t+1)\pi}{2^{q-1}}$ nur beliebig wenig abweicht, so genügt die entwickelte Methode in der That zu einer beliebig genauen Darstellung des Sinus und Cosinus für jedes bestimmte negative oder positive Argument.

Ausser den trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus gebraucht man in der Analysis besonders häufig die Tangente und die Cotangente, während die Secante und die Cosecante seltener vorkommen. Die Tangente und die Cotangente, welche durch die Gleichungen

$$(8) \qquad \operatorname{tang} y = \frac{\sin y}{\cos y}, \quad \operatorname{cotang} y = \frac{\cos y}{\sin y}$$

definirt werden, sind, weil $\cos y$ und $\sin y$ periodische Functionen des Arguments y mit der Periode 2π sind, ebenfalls *periodische Functionen des Arguments y mit der Periode* 2π; ein wesentlicher Unterschied zwischen ihnen und den Functionen Sinus und Cosinus liegt aber darin, dass, während die letztern nur solche Werthe annehmen, die zwischen der negativen und der positiven Einheit eingeschlossen sind, die erstern alle mög-

lichen negativen und positiven Werthe erhalten können. Der Nenner der Function tang y ist die Function cos y, und diese verschwindet für die Werthe $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$, wie auch für die Werthe $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \ldots$, bei denen der Zähler sin y entweder gleich der positiven oder der negativen Einheit ist, weshalb die Function tang y für die betreffenden Werthe selbst nicht definirt ist. Wenn man das Argument y von einem Werthe, der um beliebig wenig über $-\frac{\pi}{2}$ liegt, bis zu einem Werthe, der um beliebig wenig unter $\frac{\pi}{2}$ liegt, fortschreiten lässt, so bewegt sich in Folge des früher erwähnten Verhaltens der Functionen cos y und sin y die Function tang y fortwährend wachsend von einem numerisch beliebig grossen negativen bis zu einem beliebig grossen positiven Werthe. Sobald das Argument y von einem beliebig wenig unter $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werthe zu einem beliebig wenig über $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werthe übergeht, so *macht die Function tang y einen Sprung von einem beliebig grossen positiven zu einem numerisch beliebig grossen negativen Werthe*, und von nun an wiederholt sich für ein zunehmendes Argument die frühere Bewegung. In Folge der Gleichungen

(9) $$\cos(y+\pi) = -\cos y, \quad \sin(y+\pi) = -\sin y$$

gilt die Gleichung

(10) $$\operatorname{tg}(y+\pi) = \operatorname{tg} y;$$

mithin ist die Function tg y *nicht nur eine periodische Function mit der Periode* 2π *sondern auch eine periodische Function mit der Periode* π, *und durchläuft ihre sämmtlichen Werthe ohne Unterbrechung in jedem der Intervalle des Arguments von* $-\frac{\pi}{2}$ *bis* $+\frac{\pi}{2}$, *von* $+\frac{\pi}{2}$ *bis* $+\frac{3\pi}{2}, \ldots$ *wie auch von* $-\frac{3\pi}{2}$ *bis* $-\frac{\pi}{2}, \ldots$

Der Nenner der Function cotang y ist die Function sin y, welche für die Werthe des Arguments $0, \pi, 2\pi, \ldots$ und $-\pi, -2\pi, \ldots$ verschwindet, bei denen der Zähler cos y entweder gleich der positiven oder der negativen Einheit ist, so dass die Function

cotang y für diese Werthe nicht definirt ist. Wenn das Argument y von einem beliebig kleinen positiven Werthe bis zu einem beliebig wenig unter π liegenden Werthe zunimmt, so bewegt sich die Function cotang y stets abnehmend von einem beliebig grossen positiven Werthe bis zu einem numerisch beliebig grossen negativen Werthe, und macht, wofern hierauf das Argument einen beliebig wenig über π liegenden Werth annimmt, *einen Sprung zu einem beliebig grossen positiven Werthe* zurück. Aus den Gleichungen (9) wird für die Function cotang y die Gleichung

(11) $$\operatorname{cotang}(y+\pi) = \operatorname{cotang} y$$

abgeleitet; *die Function cotang y ist daher ebenfalls eine periodische Function mit der Periode* π, *und zwar durchläuft sie ihre sämmtlichen Werthe ohne Unterbrechung in jedem der Intervalle von* 0 *bis* π, *von* π *bis* $2\pi, \ldots$ *wie auch von* $-\pi$ *bis* 0, *von* -2π *bis* $-\pi, \ldots$

Die Eigenschaften der Function cotang y können unmittelbar aus den Eigenschaften der Function tang y erhalten werden, da die zweite entsteht, indem man den Werth der ersteren in die Einheit dividirt. Doch haben wir es vorgezogen, beide Functionen für sich zu betrachten, weil es bei jeder derselben von besonderer Wichtigkeit ist, die Bereiche des Arguments zu unterscheiden, für welche die Function ohne Unterbrechung fortschreitet, und weil die Unterbrechungen bei der einen immer gerade an denjenigen Stellen des Arguments stattfinden, wo die andere durch den Werth Null hindurchgeht und keine Unterbrechung erleidet.

§ 104. Inverse trigonometrische Functionen. Begriff der Umkehrung einer Function.

Ein Trieb unserer Erkenntniss geht dahin, nachdem eine bestimmte Aufgabe gelöst ist, die gefundene Antwort zu dem Gegenstande einer neuen Frage zu machen und die Lösung der umgekehrten Aufgabe zu suchen. Durch Umkehrung ist aus der Addition die Subtraction, aus der Multiplication die Division hervorgegangen. Auf dieselbe Weise entspricht, wie in § 14 bemerkt worden ist, der Erhebung einer Grösse auf die $n$te Potenz die Ausziehung der $n$ten Wurzel aus einer Grösse. Denkt

man sich eine auf die $n$te Potenz zu erhebende positive Grösse als veränderlich und bezeichnet sie mit x, so ist die Potenz $u = x^n$ *eine rationale ganze Function der Variable* x, gleichzeitig gehört zu jedem gegebenen positiven Werthe u ein eindeutig bestimmter positiver Werth $x = \sqrt[n]{u}$, welcher *eine irrationale Function der Variable* u genannt wird. Ebenso hängt nach § 102 mit *der Exponentialfunction* $u = C^x$ *die logarithmische Function* $\operatorname{Log} x$ zusammen. Diese Beziehung kann allgemein ausgedrückt werden, indem man den in § 101 erörterten Begriff der *Abhängigkeit einer Grösse von einer andern veränderlichen Grösse* zu Grunde legt. Wenn *eine Grösse* u *von einer veränderlichen Grösse* x *abhängig*, oder *als eine Function der Variable* x *gegeben* ist, und wenn man zu einem jeden vorkommenden Werthe der Grösse u den zugehörigen Werth x oder, falls es mehrere solche Werthe giebt, die zugehörigen Werthe x bestimmen kann, so heisst die Grösse x ebenfalls eine Function der Variable u, und zwar *die zu der ursprünglich gegebenen Function zugehörige umgekehrte Function.*

Demgemäss gehört zu jeder der trigonometrischen Functionen $\sin y$, $\cos y$, $\operatorname{tang} y$, $\operatorname{cotang} y$ *eine umgekehrte oder inverse trigonometrische Function.* Die betreffende Function giebt den *Bogen* oder *Arcus* an, welcher einem vorgeschriebenen *Sinus* oder *Cosinus*, einer vorgeschriebenen *Tangente* oder *Cotangente* correspondirt, und die einzelnen Functionen führen respective die Namen *Arcus sinus*, *Arcus cosinus*, *Arcus tangentis*, *Arcus cotangentis*.

Die Function $\sin y$ durchläuft, wenn das Argument y von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ geht, die Werthe von der negativen bis zu der positiven Einheit stets wachsend, und nimmt ausser diesen keine anderen Werthe an. Es muss daher ein Werth v, welchem die Function $\sin y$ gleich sein soll, zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen, und für einen solchen Werth kann die Function

(1) $$\operatorname{arc} \sin v = y$$

nur *einen zwischen den Grenzen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{\pi}{2}$ *liegenden Werth* annehmen. Bei dieser Beschränkung muss in Folge der Un-

gleichheiten (7) des vorigen §, wie dort bemerkt, zu einem beliebig kleinen Werthe von v ein beliebig kleiner Werth $\arc \sin v$ gehören, der mit v dasselbe Vorzeichen hat. Die Function $\cos y$ durchläuft, wenn das Argument y von 0 bis π geht, die Werthe von der positiven bis zu der negativen Einheit stets abnehmend, und nimmt ausser diesen keine andere Werthe an. Es muss daher ein Werth, dem die Function $\cos y$ gleich sein soll, zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen, und für einen solchen Werth kann die Function

$$\text{arc} \cos v = y \tag{2}$$

nur *einen zwischen den Grenzen* 0 *und* π *liegenden Werth* annehmen. Die Function $\text{tang}\, y$ bewegt sich, wie oben gezeigt worden ist, sobald das Argument y von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ mit Ausschluss der Grenzen fortschreitet, immer zunehmend von einem numerisch beliebig grossen negativen bis zu einem beliebig grossen positiven Werthe. Für jeden gegebenen negativen oder positiven Werth v erhält deshalb die Function

$$\text{arc tang}\, v = y \tag{3}$$

nur *einen zwischen den Grenzen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $+\frac{\pi}{2}$ *befindlichen Werth.* Auch für diese Function folgt unter der bezeichneten Beschränkung aus den erwähnten Ungleichheiten (7) des vorigen §, dass zu einem beliebig kleinen Werthe von v ein beliebig kleiner Werth $\text{arc tg}\, v$ gehört, der mit v dasselbe Vorzeichen hat. Die Function $\text{cotang}\, y$ bewegt sich, sobald das Argument y von 0 bis π mit Ausschluss der Grenzen fortschreitet, immer abnehmend von einem beliebig grossen positiven zu einem numerisch beliebig grossen negativen Werth. Für jeden gegebenen positiven oder negativen Werth v erhält deshalb die Function

$$\text{arc cotang}\, v = y \tag{4}$$

nur einen zwischen den Grenzen 0 *und* π *befindlichen Werth.*

In § 34 ist auseinander gesetzt worden, auf welche Weise der zwischen den Grenzen 0 und 2π befindliche Winkel oder Bogen mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden kann, sobald sein Cosinus und Sinus gegeben sind. Das eingeschlagene Verfahren fällt aber mit der Bestimmung der Functionen Arcus sinus und Arcus cosinus zusammen; es kann auch auf die Func-

tionen Arcus tangentis und Arcus cotangentis angewendet werden, und eignet sich zu dem Beweise des Satzes, *dass für einen zwischen den Grenzen* -1 *und* $+1$ *enthaltenen Werth* v *die innerhalb der Grenzen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $+\frac{\pi}{2}$ *eingeschlossene Function Arcus sinus und die innerhalb der Grenzen* 0 *und* π *eingeschlossene Function Arcus cosinus, für einen beliebigen positiven oder negativen Werth* v *die innerhalb der Grenzen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $+\frac{\pi}{2}$ *eingeschlossene Function Arcus tangentis und die innerhalb der Grenzen* 0 *und* π *eingeschlossene Function Arcus cotangentis eindeutig bestimmt ist.*

Die umgekehrten trigonometrischen Functionen sind bis jetzt Einschränkungen unterworfen worden, welche sie zu *eindeutig bestimmten Functionen* machen; ohne derartige Einschränkungen haben sie diese Eigenschaft nicht. Die Function $\sin y$ nimmt für alle Argumente denselben Werth an, die in einer der beiden Formen

(5) $$y+2t\pi,\ (2t+1)\pi-y$$

enthalten sind, die Function $\cos y$ erhält denselben Werth für alle Argumente von einer der beiden Formen

(6) $$y+2t\pi,\ -y+2t\pi,$$

die Functionen $\operatorname{tang} y$ und $\operatorname{cotang} y$ bleiben ungeändert für alle Argumente von der Form

(7) $$y+t\pi,$$

wo t überall irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Sobald für einen gegebenen Werth v ein Werth y der *Function arc sin* v gefunden ist, so kommen zu demselben alle in (5) dargestellten Werthe als Werthe der Function hinzu; die *Function arc sin* v ist deshalb eine *vieldeutige Function.* Unter den sämmtlichen Werthen giebt es aber *nur einen zwischen den Grenzen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $+\frac{\pi}{2}$ *enthaltenen Werth*, und dies ist der vorhin verlangte Werth. In gleicher Weise ist die *Function arc cos* v eine *vieldeutige Function*, bei der mit jedem Werthe y zusammen die sämmtlichen in (6) dargestellten Werthe auftreten. Ebenso sind die *Functionen arc tang* v und *arc cotg* v *vieldeutige Functionen*, da zu jedem Werthe y die sämmtlichen in (7) darge-

stellten Werthe als gleichberechtigt hinzukommen. Innerhalb der oben bezeichneten Grenzen existirt aber für jede dieser Functionen immer nur *ein Werth*, und sie wird zu einer eindeutigen Function.

Aus den Additionsformeln der trigonometrischen Functionen, die im vorigen § unter (3) angegeben sind, lassen sich Gleichungen zwischen umgekehrten trigonometrischen Functionen ableiten, die sehr beachtenswerth sind. Wir wollen dieselben für die Function Arcus sinus entwickeln. Es sei

(8) $$\sin y = v, \ \sin y_1 = v_1,$$

so folgt

(9) $$\cos y = \sqrt{1-v^2}, \ \cos y_1 = \sqrt{1-v_1^2},$$

mithin nimmt die erwähnte zweite Gleichung (3) des vorigen § die Gestalt an

(10) $$\sin(y+y_1) = v\sqrt{1-v_1^2} + v_1\sqrt{1-v^2}.$$

Nun ist aber wegen (8) $y = \operatorname{arc\,sin} v$, $y_1 = \operatorname{arc\,sin} v_1$, und ebenso gilt wegen (10) die Gleichung

(11) $$y + y_1 = \operatorname{arc\,sin}(v\sqrt{1-v_1^2} + v_1\sqrt{1-v^2}),$$

welche sich in die folgende verwandelt

(12) $$\operatorname{arc\,sin} v + \operatorname{arc\,sin} v_1 = \operatorname{arc\,sin}(v\sqrt{1-v_1^2} + v_1\sqrt{1-v^2}).$$

Durch diese Gleichung wird die Summe von zwei Functionen Arcus sinus, die zu gegebenen Werthen v und v_1 gehören, als ein Arcus sinus dargestellt, der zu dem aus v und v_1 algebraisch zusammengesetzten Werthe $v\sqrt{1-v_1^2} + v_1\sqrt{1-v^2}$ gehört. Auf gleiche Weise erhält man für die Differenz zweier Functionen den Ausdruck

(13) $$\operatorname{arc\,sin} v - \operatorname{arc\,sin} v_1 = \operatorname{arc\,sin}(v\sqrt{1-v_1^2} - v_1\sqrt{1-v_1}).$$

In Folge der Ungleichheiten (7) des vorigen § wird, wie schon hervorgehoben, die Function Arcus sinus für ein gegen die Null abnehmendes Argument selbst beliebig klein. Hieraus ergiebt sich, dass für abnehmende Werthe der Differenz $v - v_1$ die Differenz $\operatorname{arc\,sin} v - \operatorname{arc\,sin} v_1$ sich ebenfalls der Null nähert. Dieselbe Aussage gilt unter den oben bezeichneten Einschränkungen für die übrigen umgekehrten trigonometrischen Functionen und wird genau entsprechend bewiesen.

Abschnitt V.

Unendliche Summen und Producte.

Capitel I.

Allgemeine Eigenschaften von unendlichen Summen und Producten.

§ 105. Definitionen.

Die allgemeine Untersuchung des Grenzwerthes, dem sich eine Summe gegebener Grössen bei wachsender Anzahl der Summanden nähert, und des Grenzwerthes, dem sich ein Product gegebener Grössen bei wachsender Anzahl der Factoren nähert, ist ein Eigenthum der neueren Analysis. Allein die Keime zu den Begriffen, die hiebei in Anwendung kommen, liegen in der Lehre von der Rechnung mit irrationalen Grössen, und die Strenge, mit welcher die Griechen diese Lehre ausgebildet haben, wird für jene Untersuchungen ein beständiges Vorbild sein. Beispiele für die Betrachtung von Summen, deren Gliederzahl über jedes Mass hinaus zunimmt, haben im Vorhergehenden die geometrische Reihe und die recurrenten Reihen der verschiedenen Ordnungen geliefert. Bei allen diesen Reihen war man im Stande, die Summe einer bestimmten Anzahl vom ersten Gliede ab auf einander folgender Glieder durch einen übersichtlichen Ausdruck darzustellen. Man vermochte zu erkennen, wie sich der betreffende Ausdruck ändere, sobald die Anzahl der zusammenaddirten Glieder wächst, man konnte demnach beurtheilen, unter welchen Bedingungen der Ausdruck sich einem festen Grenzwerthe nähere, und für diese Voraussetzung den Grenzwerth selbst angeben, womit denn der Grenzwerth der vorgelegten unendlichen Summe gefunden war.

Die Ermittelung eines geschlossenen und zur Discussion

geeigneten Ausdruckes für die Summe einer Reihe, die auf eine beliebige endliche Anzahl von Gliedern ausgedehnt ist, hat für das Studium der Reihe einen entschiedenen Werth. Allein die Fälle, in denen eine solche endliche Summation ausgeführt werden kann, sind vergleichungsweise selten, und es ist nothwendig, das Vorhandensein eines Grenzwerthes bei einer unendlich ausgedehnten Summe so zu definiren, dass es gleichgültig bleibt, ob die endliche Summation bewerkstelligt ist oder nicht. Genau ebenso steht es mit der Definition für das Vorhandensein des Grenzwerthes für ein unendlich ausgedehntes Product. Wir formuliren die beiden Definitionen folgendermassen.

(I) *Es sei das Bildungsgesetz für eine unbegrenzt fortzusetzende Reihe von bestimmten reellen Grössen*

(1) $$c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots$$

gegeben, die Summe der auf einander folgenden Grössen habe die Bezeichnung

(2) $$s_0 = c_0,\ s_1 = c_0 + c_1,\ s_2 = c_0 + c_1 + c_2, \ldots$$

Wenn die Werthe der Summen $s_0, s_1, \ldots$ *stets numerisch unter einer bestimmten Grösse bleiben und wenn es möglich ist, für einen beliebig kleinen numerischen Werth* ω *die Anzahl* $q+1$ *der Glieder der Summe* s_q *so gross anzunehmen, dass die Differenz* $s_{q+t} - s_q$ *für jeden Werth der ganzen Zahl* t *numerisch kleiner bleibt als der Werth* ω, *so nähert sich die betreffende Summe bei wachsender Gliederzahl einem festen Grenzwerthe, oder sie ist convergent, und dieser Grenzwerth bezeichnet den Werth der unendlich ausgedehnten Summe.*

(II) *Es sei das Bildungsgesetz für eine unbegrenzt fortzusetzende Reihe von bestimmten reellen Grössen, unter denen keine gleich Null ist,*

(3) $$k_0,\ k_1,\ k_2, \ldots$$

gegeben, das Product der auf einander folgenden Grössen habe die Bezeichnung

(4) $$p_0 = k_0,\ p_1 = k_0 k_1,\ p_2 = k_0 k_1 k_2, \ldots$$

Wenn die Werthe der Producte $p_0, p_1, \ldots$ *stets numerisch unter einer bestimmten Grösse bleiben, und wenn es möglich ist, für einen beliebig kleinen numerischen Werth* ω *die Anzahl* $q+1$ *der Factoren des Products* p_q *so gross anzunehmen, dass der*

Quotient $\frac{p_{q+t}}{p_q}$ *für jeden Werth der ganzen Zahl* t *von der positiven Einheit um weniger abweicht als um den Werth* ω, *so nähert sich das betreffende Product bei wachsender Zahl von Factoren einem festen Grenzwerthe, oder ist convergent, und dieser Grenzwerth bezeichnet den Werth des unendlich ausgedehnten Products.*

Die Anforderungen, welche bei der Definition der Convergenz einer Summe an die auf einander folgenden Werthe $s_0, s_1, \ldots$ gestellt worden sind, entsprechen genau den Anforderungen, denen in § 15 die auf einander folgenden Brüche $\gamma', \gamma'', \ldots$ genügen müssen, damit die Aussage gelte, dass sie sich einem Grenzwerthe nähern. Die Betrachtungen des § 15 beginnen unter der Voraussetzung, dass nur *rationale ganzzahlige Brüche* vorhanden sind, und die erwähnten $\gamma', \gamma'', \ldots$ haben die Bedeutung von solchen Brüchen. Nachdem aber *die Rechnung mit bestimmten rationalen oder irrationalen Grössen* begründet ist, darf *eine Folge von bestimmten Grössen*, welche entsprechende Bedingungen erfüllen, zu der Definition eines Grenzwerthes verwandt werden. Dies ist in § 66 bei dem Nachweise der Existenz einer Wurzel für eine Gleichung eines beliebig hohen Grades, und in § 100 bei der Definition der Exponentialfunction geschehen. In gleicher Weise wird von den auf einander folgenden Werthen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ angenommen, dass sie überhaupt bestimmte Grössen sind. Wegen der in (2) enthaltenen Gleichungen

$$s_q = c_0 + c_1 + \ldots + c_q,\quad s_{q+t} = c_0 + c_1 + \ldots + c_{q+t}$$

hat die Differenz $s_{q+t} - s_q$ die Bedeutung

$$(5)\qquad s_{q+t} - s_q = c_{q+1} + c_{q+2} + \ldots + c_{q+t},$$

sie repräsentirt also das Aggregat der Glieder, welche zu der Summe der $q+1$ ersten Glieder s_q hinzukommen, damit die Summe der $q+t+1$ ersten Glieder s_{q+t} hervorgehe. Da die Zahl t jeden beliebigen Werth annehmen darf, so ist auch der Werth $t=1$ zulässig, bei dem die rechte Seite von (5) sich auf das eine Glied c_{q+1} reducirt. Aus der Bedingung, dass die Grössen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ stets numerisch unter einer festen Grösse blei-

ben, folgt vermöge der betreffenden Gleichung $s_{q+1} - s_q = c_{q+1}$, *dass die sämmtlichen Glieder der Reihe numerisch unter einer festen Grösse bleiben.* Auf Grund der ferneren für die Convergenz der Summe aufgestellten Bedingung lässt sich ausserdem für ein beliebig kleines ω die Zahl q so gross wählen, dass der Werth c_{q+1} numerisch unter ω liegt. Das heisst, *es müssen die einzelnen Glieder der Reihe* (1), *wofern die zugehörige unendliche Summe convergirt, bei wachsender Stellenzahl numerisch beliebig klein werden. Dagegen darf man aus dem Umstande, dass die einzelnen Glieder einer Reihe bei wachsender Stellenzahl sich der Null nähern, noch keineswegs den Schluss ziehen, dass die Summe der Reihe bei unendlicher Ausdehnung convergire.*

Die Differenz $s_{q+t} - s_q = c_{q+1} + c_{q+2} + \ldots + c_{q+t}$ soll für *jeden Werth der Zahl t* numerisch kleiner bleiben als eine beliebig kleine gegebene Grösse ω. Diese Bedingung hat den Inhalt, dass nachdem zu einer beliebig kleinen aber im einzelnen Falle bestimmt gegebenen Grösse ω die Anzahl $q+1$ von Gliedern der Reihe passend gewählt ist, das Aggregat von noch so vielen neu hinzutretenden Gliedern $c_{q+1} + c_{q+2} + \ldots + c_{q+t}$ niemals numerisch so gross werden darf, dass die Summe s_{q+t} der $(q+t+1)$ ersten Glieder von der Summe s_q der $(q+1)$ ersten Glieder um mehr oder um so viel abweicht als um die Grösse ω. Die Hinzufügung von beliebigen vielen in der gegebenen Ordnung folgenden Gliedern der Reihe ist alsdann nicht im Stande, auf die Bestimmung des Werthes der Summe einen Einfluss zu üben, durch den sich der Werth um mehr als um die Grösse ω ändert. Mithin wird der betreffende Grenzwerth durch die Summe s_q so dargestellt, dass die Abweichung oder der *begangene Fehler* numerisch kleiner ist als die Grösse ω. Da ferner die Grösse ω eine beliebig kleine sein soll, so kann man statt der zuerst gewählten Grösse ω später eine kleinere Grösse ω' setzen, hierauf eine zu dieser passende Zahl $q = q'$ bestimmen, und dieses Verfahren beliebig oft wiederholen.

Um die gegenwärtig angestellten Erörterungen auf ein schon behandeltes Beispiel anzuwenden, betrachten wir eine geometrische Reihe, wie sie in § 98 aufgetreten ist, und setzen

voraus, dass r_0, ξ, x reelle Grössen seien. Dann bestehen die Gleichungen

(5) $$c_0 = \frac{r_0}{x},\ c_1 = \frac{r_0 \xi}{x^2},\ c_2 = \frac{r_0 \xi^2}{x^3}, \ldots$$

vermöge derselben ist s_q gleich der Summe der $(q+1)$ ersten Glieder

(6) $$s_q = \frac{r_0}{x} + \frac{r_0 \xi}{x^2} + \frac{r_0 \xi^2}{x^3} + \ldots + \frac{r_0 \xi^q}{x^{q+1}},$$

ferner die Differenz $s_{q+t} - s_q$ gleich dem Ausdrucke

(7) $$s_{q+t} - s_q = \frac{r_0 \xi^{q+1}}{x^{q+2}} + \frac{r_0 \xi^{q+2}}{x^{q+3}} + \ldots + \frac{r_0 \xi^{q+t}}{x^{q+t+1}}.$$

Es wurde vorhin gezeigt, dass die einzelnen Glieder der Reihe bei wachsender Stellenzahl sich der Null nähern müssen, damit die Summe der Reihe convergire. Die Forderung, dass das Glied $c_{q+1} = \frac{r_0 \xi^{q+1}}{x^{q+2}}$ bei einem hinreichend grossen Werthe der Zahl q numerisch beliebig klein werde, bewirkt nun, dass der numerische Werth des Bruches $\frac{\xi}{x}$ unter der Einheit liegen muss, da die Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+1}$ in diesem Falle die gewünschte Eigenschaft hat, dagegen bei wachsenden Werthen von q wachsen würde, wenn $\frac{\xi}{x}$ numerisch über der Einheit läge, und numerisch sich nicht ändern würde, wenn $\frac{\xi}{x}$ gleich der positiven oder der negativen Einheit wäre. Sobald aber $\frac{\xi}{x}$ einen unter der Einheit liegenden absoluten Werth hat, so besitzt, wie sogleich gezeigt werden soll, auch die Differenz (7) die Eigenschaft, für einen angemessen gewählten Werth der Zahl q numerisch kleiner zu werden als eine beliebig kleine gegebene Grösse ω, und damit ist die in (1) angegebene Bedingung für die Convergenz der geometrischen Reihe erfüllt. Aus der Gleichung (1) des § 98 folgt für die Differenz $s_{q+t} - s_q$ die Bestimmung

(8) $$s_{q+t} - s_q = \frac{r_0 \left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+1} - r_0 \left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+t+1}}{x - \xi}.$$

Wofern nach der gemachten Voraussetzung die Grösse $\frac{\xi}{x}$ numerisch kleiner ist als die Einheit, hat die Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+t+1}$ einen kleineren numerischen Werth als die Potenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+1}$, folglich die Differenz $\left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+1} - \left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+t+1}$ einen kleineren numerischen Werth als die Grösse $2\left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+1}$. Aus diesem Grunde muss der numerische Werth der Differenz (8) geringer sein, als der numerische Werth des Ausdruckes $\dfrac{2\,r_0\left(\frac{\xi}{x}\right)^{q+1}}{x-\xi}$, von dem es feststeht, dass er bei der geltenden Voraussetzung für einen wachsenden Werth der Zahl q numerisch unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt. Demnach ist die ausgesprochene Behauptung erwiesen, und die Bedingung für die Convergenz der vorgelegten geometrischen Reihe aufs neue abgeleitet.

Bei der geometrischen Reihe stellte sich heraus, dass, wofern die einzelnen Glieder die Bedingung erfüllen, bei wachsender Stellenzahl gegen die Null abzunehmen, der numerische Werth des Quotienten von jedem Gliede durch das vorhergehende, der mit $\frac{\xi}{x}$ bezeichnet worden ist, unter der Einheit liegen muss, und dass alsdann auch die Summe der unendlich ausgedehnten Reihe convergent ist. Ein Beispiel einer Reihe, bei welcher zwar die einzelnen Glieder sich der Null nähern, die Summe einer wachsenden Anzahl von Gliedern jedoch nicht gegen einen festen Grenzwerth convergirt, liefern die in die Einheit dividirten natürlichen Zahlen. Es sei

$$c_0 = 1,\ c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{3}, \ldots \tag{9}$$

und daher

$$s_q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{q+1}. \tag{10}$$

Die Summe s_q hat die Eigenschaft, für beständig zunehmende Werthe der Zahl q jeden noch so grossen positiven Werth

zu übertreffen. Man kann, um den Beweis zu führen, die in den Nennern erscheinenden Zahlen so eintheilen, dass die auf einander folgenden Potenzen der Zahl Zwei die Grenzen bilden. Auf die Zahl Zwei folgen die zwei Zahlen 3, 4, auf die Zahl Vier die vier Zahlen 5, 6, 7, 8, u. s. f. Es ist aber der Bruch $\frac{1}{3}$ grösser als der Bruch $\frac{1}{4}$, mithin das Aggregat $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ grösser als der Werth $2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, ebenso sind allgemein alle in dem Aggregate $\frac{1}{2^{\lambda-1}+1}+\frac{1}{2^{\lambda-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^\lambda}$ vorkommenden Brüche grösser als der letzte Bruch, und deshalb ist der Werth des Aggregats grösser als das Product der Anzahl $2^{\lambda-1}$ in den Werth des Bruches $\frac{1}{2^\lambda}$, das heisst ebenfalls grösser als der Werth $\frac{1}{2}$. Hieraus folgt die Ungleichheit

$$(11) \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^\lambda}>1+\frac{\lambda}{2},$$

indem die auf der linken Seite befindliche Summe ausser den ersten beiden Gliedern 1 und $\frac{1}{2}$ noch $\lambda-1$ Aggregate enthält, deren jedes grösser ist als der Werth $\frac{1}{2}$. Also übertrifft der Werth der Summe s_q, wenn die Anzahl $q+1$ gleich der Potenz 2^λ gesetzt wird, welche auf der linken Seite von (11) steht, die Grösse $1+\frac{\lambda}{2}$, die bei einem stets zunehmenden Werthe des Exponenten λ grösser wird als eine noch so grosse Zahl; eine beständig zunehmende Zahl q überschreitet aber nach und nach jede noch so hohe Potenz der Zahl Zwei, daher wächst die Summe s_q bei stets wachsendem q über jede Grenze hinaus, und das sollte bewiesen werden.

In Bezug auf die für die Convergenz eines Products gegebene Definition können wir uns kürzer aussprechen. Für den Quotienten $\frac{p_{q+t}}{p_q}$ gilt in Folge von (4) die Gleichung

$$(12) \qquad \frac{p_{q+t}}{p_q} = k_{q+1}\, k_{q+2} \ldots k_{q+t},$$

die zu ähnlichen Beobachtungen veranlasst, wie die Gleichung (5). Die Zahl t darf wieder gleich der Einheit sein, mithin muss der Werth des Quotienten (12), welcher zu $t=1$ gehört, das heisst die Grösse k_{q+1} selbst, für ein hinreichend grosses q der positiven Einheit beliebig nahe kommen, folglich von einem bestimmten Zeiger ab jedenfalls positiv sein, und es müssen die bis zu diesen Stellen ausgedehnten Producte sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben. Wir können uns also die zu einem gegebenen Werthe ω gehörige Zahl q so gross gewählt denken, dass die Producte p_{q+t} für keinen Werth der Zahl t das Vorzeichen mehr ändern. Aus der Bedingung, dass das Product p_q stets numerisch kleiner bleibt als eine bestimmte Grösse P, und der Bedingung, dass der Quotient $\frac{p_{q+t}}{p_q}$ bei einem angemessenen grossen Werthe der Zahl q für jeden Werth der ganzen Zahl t von der positiven Einheit um weniger abweichen soll als um den beliebig kleinen Werth ω, oder dass die Differenz $\frac{p_{q+t}}{p_q} - 1$ numerisch unter ω liegen soll, folgt nunmehr, dass der absolute Werth der Differenz $p_{q+t} - p_q$ kleiner sein muss als der absolute Werth des Products $p_q\,\omega$, mithin auch kleiner als das Product der festen Grösse P in die beliebig kleine Grösse ω. Diese Differenz bleibt daher selbst numerisch beliebig klein, und deshalb ist für das Vorhandensein des Grenzwerthes der Producte p_q dieselbe Bedingung erfüllt, welche bisher als die Grundlage für das Vorhandensein eines Grenzwerthes angenommen ist.

§ 106. Kennzeichen für die Convergenz unendlicher Summen.

Für viele Arten von Reihen lässt sich die Convergenz ihrer Summe durch eine Zurückführung auf das Verhalten einer geometrischen Reihe beurtheilen. Namentlich ist dies der Fall, sobald die einzelnen Glieder der Reihe $c_0, c_1, c_2, \ldots$ in Producte zerlegt werden können

(1) $$c_0 = \varepsilon_0\,\varrho_0,\ c_1 = \varepsilon_1\,\varrho_1,\ c_2 = \varepsilon_2\,\varrho_2, \ldots$$

bei denen ε_0, $\varepsilon_1, \ldots$ *positive oder negative Grössen* bedeuten, die sämmtlich numerisch unter einem festen Werthe bleiben, und zugleich ϱ_0, $\varrho_1, \ldots$ *positive Grössen* sind, für welche der Quotient einer Grösse durch die vorhergehende bei wachsender Stellenzahl sich immer mehr einem entweder über oder unter der Einheit befindlichen Grenzwerthe nähert. Hier gelten die folgenden Sätze:

(I) *Wenn die Grössen* ε_0, $\varepsilon_1, \ldots$ *sich nicht der Null nähern, und der Quotient* $\dfrac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}$ *bei wachsender Zahl* t *sich beständig einer Grenze nähert, die grösser ist als die Einheit, so ist die Summe*

$$s_q = \varepsilon_0\,\varrho_0 + \varepsilon_1\,\varrho_1 + \ldots + \varepsilon_q\,\varrho_q$$

für eine wachsende Zahl q *nicht convergent.*

(II) *Wenn die Grössen* ε_0, $\varepsilon_1, \ldots$ *sämmtlich numerisch unter einer festen Grenze bleiben, und der Quotient* $\dfrac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}$ *bei wachsender Zahl* t *sich beständig einer Grenze nähert, die kleiner ist als die Einheit, so ist die Summe*

$$s_q = \varepsilon_0\,\varrho_0 + \varepsilon_1\,\varrho_1 + \ldots + \varepsilon_q\,\varrho_q$$

für eine wachsende Zahl q *convergent.*

Die Grenze, welcher sich der Quotient $\dfrac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}$ mehr und mehr nähern soll, heisse g. Dann muss sich für eine beliebig kleine gegebene Grösse θ die Zahl q_1 so gross annehmen lassen, dass der Quotient $\dfrac{\varrho_{q_1+t+1}}{\varrho_{q_1+t}}$ für jeden Werth der positiven ganzen Zahl t, die Null mitgerechnet, zwischen den Grenzen $g-\theta$ und $g+\theta$ eingeschlossen bleibt. Die kleine Grösse θ kann ferner stets so gewählt werden, dass, wenn $g > 1$ ist, auch $g-\theta > 1$ ist, und dass, wenn $g < 1$ ist, auch $g+\theta < 1$ ist. Bei der Voraussetzung des Satzes (I) dass $g > 1$ sei, nimmt man $g-\theta > 1$, und hat demgemäss, indem für t die auf einander folgenden Zahlen gesetzt werden, die Ungleichheiten

(2) $$\frac{\varrho_{q_1+1}}{\varrho_{q_1}} > g-\theta,\ \frac{\varrho_{q_1+2}}{\varrho_{q_1+1}} > g-\theta, \ldots \frac{\varrho_{q_1+t+1}}{\varrho_{q_1+t}} > g-\theta,$$

aus denen durch Multiplication die Ungleichheit

$$(3) \qquad \frac{\varrho_{q_1+t+1}}{\varrho_{q_1}} > (g-\theta)^t,$$

und ferner, da die Grössen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots$ sämmtlich positiv sind, die Ungleichheit

$$(3^*) \qquad \varrho_{q_1+t+1} > \varrho_{q_1}(g-\theta)^t$$

folgt. Weil die Basis $g-\theta$ grösser als die Einheit ist, so übertrifft die Potenz $(g-\theta)^t$ für einen hinreichend grossen Werth von t jede gegebene Grösse, durch die Multiplication mit der positiven Grösse ϱ_{q_1} wird diese Eigenschaft nicht aufgehoben und besteht daher auch für die Grösse ϱ_{q_1+t+1}. In dem Product $c_{q_1+t+1} = \varepsilon_{q_1+t+1}\,\varrho_{q_1+t+1}$ nähert sich der erste Factor unter den Voraussetzungen des Satzes (I) für einen wachsenden Zeiger nicht der Null. Weil nun der zweite Factor mit wachsendem Zeiger über jedes Mass hinaus zunimmt, so kann das Product der beiden Factoren, nämlich das Glied der zu prüfenden Reihe c_{q_1+t+1}, sich unmöglich mit wachsendem Zeiger der Null nähern. Nach dem vorigen § ist dies aber eine für die Convergenz der Summe s_q erforderliche Bedingung. Also kann die Summe s_q unter den Voraussetzungen des Satzes (I) nicht convergiren, und das sollte bewiesen werden.

Bei der Annahme des Satzes II, dass $g<1$ sei, wird $g+\theta<1$ genommen, und es ergeben sich, indem wieder für t die auf einander folgenden Zahlen gesetzt werden, die Ungleichheiten

$$(4) \qquad \frac{\varrho_{q_1+1}}{\varrho_{q_1}} < g+\theta,\ \frac{\varrho_{q_1+2}}{\varrho_{q_1+1}} < g+\theta, \ldots \frac{\varrho_{q_1+t+1}}{\varrho_{q_1+t}} < g+\theta.$$

Aus denselben folgt durch Multiplication die Ungleichheit

$$(5) \qquad \frac{\varrho_{q_1+t+1}}{\varrho_{q_1}} < (g+\theta)^t,$$

und, wie vorhin, die Ungleichheit

$$(5^*) \qquad \varrho_{q_1+t+1} < \varrho_{q_1}(g+\theta)^t.$$

Man bildet jetzt mit einer über q_1 liegenden Zahl q die Differenz

(6) $\quad s_{q+t} - s_q = \varepsilon_{q+1}\,\varrho_{q+1} + \varepsilon_{q+2}\,\varrho_{q+2} + \ldots + \varepsilon_{q+t}\,\varrho_{q+t}$

und bemerkt, dass der numerische Werth derselben vergrössert wird, sobald jede der Grössen $\varepsilon_{q+1}, \ldots \varepsilon_{q+t}$ durch ihren absoluten Werth ersetzt wird, da die zweiten Factoren sämmtlich positiv sind und auf diese Art eine Summe von lauter positiven Elementen entsteht. Eine fernere Vergrösserung erfolgt, indem statt den absoluten Werthen der Grössen $\varepsilon_{q+1}, \ldots \varepsilon_{q+t}$ eine positive Grösse $\mathfrak{E}$ substituirt wird, unter der nach den Voraussetzungen des Satzes (II) jene gelegen sind, und indem zugleich statt $\varrho_{q+1}, \varrho_{q+2}, \ldots \varrho_{q+t}$ respective die aus (5*) folgenden oberen Grenzen $\varrho_{q_1}(g+\theta)^{q-q_1}$, $\varrho_{q_1}(g+\theta)^{q-q_1+1}, \ldots \varrho_{q_1}(g+\theta)^{q-q_1+t}$ eintreten. Demnach ist der absolute Werth der Differenz (6) kleiner als der Werth der Summe der geometrischen Reihe

(7) $\quad \mathfrak{E}\varrho_{q_1}(g+\theta)^{q-q_1} + \mathfrak{E}\varrho_{q_1}(g+\theta)^{q-q_1+1} + \ldots + \mathfrak{E}\varrho_{q_1}(g+\theta)^{q-q_1+t}$,

welcher durch den Ausdruck

(8) $$\mathfrak{E}\varrho_{q_1}\frac{(g+\theta)^{q-q_1} - (g+\theta)^{q-q_1+t+1}}{1-(g+\theta)}$$

dargestellt wird. Da $g+\theta$ eine positive unter der Einheit liegende Grösse bedeutet, so ist die Potenz mit dem Exponenten $q-q_1+t+1$ kleiner als die Potenz mit dem Exponenten $q-q_1$, und der Werth des Ausdruckes (8) muss grösser sein als der Werth

(9) $$\mathfrak{E}\varrho_{q_1}\frac{(g+\theta)^{q-q_1}}{1-(g+\theta)},$$

bei welchem der zu subtrahirende Bestandtheil des Zählers fehlt. Nun lässt sich die Zahl q so gross wählen, dass das Product, das aus dem unveränderlichen Bruche $\frac{\mathfrak{E}\varrho_{q_1}}{1-(g+\theta)}$ und der $(q-q_1)$ten Potenz der unter der Einheit befindlichen Grösse $g+\theta$ als zweitem Factor entsteht, nämlich der Werth (9), kleiner wird als eine beliebig kleine gegebene Grösse ω. Dann bleibt aber der absolute Werth der Differenz (6), wie gross auch immer die Zahl t genommen werde, nothwendig kleiner als die Grösse ω, und damit ist vermöge der Definition (I) des vorigen § die Bedingung für die Convergenz der Summe s_q erfüllt, folglich der Inhalt des Satzes (II) erwiesen.

Wird unter den Voraussetzungen des Satzes (II) die Reihe untersucht, bei welcher statt der Glieder $\varepsilon_0 \varrho_0$, $\varepsilon_1 \varrho_1, \ldots$ die bezüglichen *absoluten Werthe* derselben auftreten, so ist an Stelle der Differenz (6) derjenige Ausdruck zu erörtern, bei dem ebenfalls statt der einzelnen Glieder der rechten Seite deren absolute Werthe genommen werden. Die gegebene Beweisführung hat nun gezeigt, dass gerade dieser Ausdruck kleiner bleibt als der Werth (9) und deshalb für eine genügend grosse Zahl q unter die beliebig kleine Grösse ω herabsinkt. Darin liegt zugleich der Beweis des Satzes

(III) *Unter den Bedingungen des Satzes* (II) *ist auch diejenige Summe convergent, welche aus* s_q *hervorgeht, indem statt der einzelnen Glieder die absoluten Werthe derselben genommen werden.*

Bis hieher ist in diesem Capitel die Anschauung festgehalten worden, dass die Glieder der zu summirenden Reihen für jeden einzelnen Fall gegeben sind. Von nun ab wird die Voraussetzung zur Geltung kommen, dass die Glieder von gewissen veränderlichen Grössen abhängig, und insofern selbst veränderlich sind. Zu diesem Zwecke knüpft unsere Betrachtung noch ein Mal an die geometrische Reihe und an die Reihen an, die aus der Entwickelung der negativen ganzen Potenzen eines Binoms hervorgehen.

§ 107. Potenzreihen.

Wenn ξ eine gegebene constante und x eine veränderliche Grösse bezeichnet, so ergiebt die nach den fallenden Potenzen von x geordnete Division des Binoms $x-\xi$ in die Einheit, und eine eben solche Division einer positiven ganzen Potenz des Binoms $(x-\xi)^a$ in die Einheit, eine geometrische Reihe und beziehungsweise recurrente Reihen, die auf beliebig viele Glieder ausgedehnt werden können. Nach § 98 und § 99 des Abschnittes III gelten die Gleichungen

$$(1)\quad \frac{1}{x-\xi} - \frac{\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}}{x-\xi} = x^{-1} + \xi x^{-2} + \xi^2 x^{-3} + \ldots + \xi^t x^{-t-1},$$

$$(2)\quad \frac{1}{(x-\xi)^2}-\frac{(t+1)\left(\frac{\xi}{x}\right)^t-t\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}}{(x-\xi)^2}=x^{-2}+2\xi x^{-3}+3\xi^2x^{-4}+\ldots$$
$$+t\xi^{t-1}x^{-t-1},$$

$$(3)\quad \frac{1}{(x-\xi)^a}-\frac{\mathfrak{R}^{(t)}_{0,a}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{-a+t+2}+\ldots+\mathfrak{R}^{(t)}_{a-1,a}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{t+1}}{(x-\xi)^a}$$
$$=x^{-a}+a\xi x^{-a-1}+\frac{a(a+1)}{1.2}\xi^2x^{-a-2}+..+\frac{a(a+1)..t}{1.2..(t-a+1)}\xi^{t-a+1}x^{-t-1},$$

und zwar für jeden Werth von x, mit Ausnahme des Werthes $x=\xi$.

Die Factoren $\mathfrak{R}^{(t)}_{0,a},\ldots\mathfrak{R}^{(t)}_{a-1,a}$ sind reine Zahlengrössen, die weder ξ noch x enthalten. Nun hat man hier unzweifelhaft das Recht, in einer jeden Gleichung sowohl auf der linken wie auf der rechten Seite gleichzeitig statt x die Grösse ξ und statt ξ die Grösse x zu setzen; die Differenz $x-\xi$ geht dadurch in die entgegengesetzte Differenz $-x+\xi$ über, so dass, nachdem die Gleichung (1) auf beiden Seiten mit der negativen Einheit, die Gleichheit (3) mit der Potenz $(-1)^a$ multiplicirt ist, die ebenfalls für jeden Werth von x mit Ausnahme des Werthes $x=\xi$ gültigen Gleichungen entstehen,

$$(4)\quad \frac{1}{x-\xi}-\frac{\left(\frac{x}{\xi}\right)^{t+1}}{x-\xi}=-\xi^{-1}-\xi^{-2}x-\xi^{-3}x^2-\ldots-\xi^{-t-1}x^t,$$

$$(5)\quad \frac{1}{(x-\xi)^2}-\frac{(t+1)\left(\frac{x}{\xi}\right)^t-t\left(\frac{x}{\xi}\right)^{t+1}}{(x-\xi)^2}=\xi^{-2}+2\xi^{-3}x+3\xi^{-4}x^2+\ldots$$
$$+t\xi^{-t-1}x^{t-1},$$

$$(6)\quad \frac{1}{(x-\xi)^a}-\frac{\mathfrak{R}^{(t)}_{0,a}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-a+t+2}+\ldots+\mathfrak{R}^{(t)}_{a-1,a}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{t+1}}{(x-\xi)^a}$$
$$=(-1)^a\xi^{-a}+a(-1)^a\xi^{-a-1}x+\frac{a(a+1)}{1.2}(-1)^a\xi^{-a-2}x^2+..$$
$$+\frac{a(a+1)\ldots t(-1)^a}{1.2.3\ldots(t-a+1)}\xi^{-t-1}x^{t-a+1}.$$

Wir erhalten auf diese Weise für die negativen ganzen Potenzen des Binoms $x-\xi$ Entwickelungsreihen, die nach den po-

sitiven Potenzen der Variable x fortschreiten. Diese Reihen können als das Resultat einer *nach den steigenden Potenzen der Variable x geordneten Division* aufgefasst werden, die auch auf zwei beliebige rationale ganze Functionen einer Variable x anwendbar ist und zu einer Erweiterung des Abschnittes III führen würde, welche wir nicht weiter verfolgen.

Der characteristische Unterschied zwischen der Entwickelung der negativen Potenz $(x-\xi)^{-\alpha}$, die nach den fallenden Potenzen der Variable x, und der Entwickelung, die nach den steigenden Potenzen der Variable x geordnet ist, zeigt sich durch die Untersuchung der Bedingungen, unter denen die eine und die andere Entwickelung bei wachsender Gliederzahl convergirt. Der Restbruch, welcher in (4) zu der Function $\frac{1}{x-\xi}$, in (5) zu der Function $\frac{1}{(x-\xi)^2}$, in (6) zu der Function $\frac{1}{(x-\xi)^\alpha}$ hinzukommt, wird respective aus dem Restbruche, der in (1), (2), (3) zu der gleichen Function hinzukommt, abgeleitet, indem $\frac{x}{\xi}$ an die Stelle von $\left(\frac{\xi}{x}\right)$ tritt. Aus dem Umstande, dass die Restbrüche in (1), (2), (3) für immer zunehmende Werthe der Zahl t bei reellen Werthen von ξ und x sich der Null nähern, sobald $\frac{\xi}{x}$ numerisch unter der Einheit liegt, bei complexen Werthen von ξ und x sich der Null nähern, sobald der absolute Betrag der complexen Grösse $\frac{\xi}{x}$ unter der Einheit liegt, folgt unmittelbar, dass die Restbrüche in (4), (5), (6) für immer zunehmende Werthe der Zahl t bei reellen Werthen von ξ und x sich der Null nähern, sobald $\frac{x}{\xi}$ numerisch unter der Einheit liegt, bei complexen Werthen von ξ und x sich der Null nähern sobald der absolute Betrag der complexen Grösse $\frac{x}{\xi}$ unter der Einheit liegt. Daher convergiren die auf der rechten Seite von (4), (5), (6) befindlichen Reihen für eine wachsende Anzahl von Gliedern bei reellen Werthen von ξ und x unter der Bedingung, dass $\frac{x}{\xi}$ numerisch kleiner ist als die Einheit, ferner bei com-

plexen Werthen von ξ und x unter der Bedingung, dass der absolute Betrag von $\frac{x}{\xi}$ kleiner ist als die Einheit, und zwar werden die Grenzwerthe beziehungsweise durch die Functionen $\frac{1}{x-\xi}$, $\frac{1}{(x-\xi)^2}$, $\frac{1}{(x-\xi)^a}$ dargestellt.

Wir erkennen jetzt die merkwürdige Thatsache, dass sich jede negative ganze Potenz einer Function des ersten Grades der Variable x, die mit $x-\xi$ bezeichnet wird, sowohl durch eine convergente unendliche Reihe darstellen lässt, die nach den negativen Potenzen der Variable x fortschreitet, wie auch durch eine convergente unendliche Reihe, die nach den positiven Potenzen der Variable x fortschreitet. Die Bedingungen, unter denen die eine und die andere Reihe anwendbar sind, schliessen sich aber gegenseitig aus. Für die Reihe der negativen Potenzen muss bei reellen Werthen von ξ und x der numerische Werth des Quotienten $\frac{\xi}{x}$, bei complexen Werthen von ξ und x der absolute Betrag des Quotienten $\frac{\xi}{x}$ kleiner als die Einheit sein, während für die Reihe der positiven Potenzen bei reellen Werthen von ξ und x der numerische Werth des Quotienten $\frac{\xi}{x}$, bei complexen Werthen von ξ und x der absolute Betrag des Quotienten $\frac{\xi}{x}$ grösser als die Einheit sein muss. Sobald die Grösse ξ gegeben ist, zerfallen die *sämmtlichen Werthe der complexen Grösse x* in solche, *deren absoluter Betrag kleiner ist als der absolute Betrag von ξ*, in solche, *deren absoluter Betrag grösser ist als der Betrag von ξ*, und in solche Werthe, *deren absoluter Betrag dem absoluten Betrage von ξ gleich ist.* Für die Werthe der ersten Art convergirt die bezeichnete Reihe der positiven Potenzen, für die Werthe der zweiten Art die bezeichnete Reihe der negativen Potenzen, für die Werthe der dritten Art keine von beiden. Die *Gauss*'sche Interpretation der complexen Grössen, welche am Schlusse der § 98 und § 99 angewendet ist, giebt hiefür das Bild, dass, nachdem um den Nullpunkt der repräsentirenden Ebene als Centrum ein Kreis be-

schrieben ist, welcher durch den Punkt ξ hindurchgeht, die Werthe der complexen Grösse x durch Punkte der Ebene vertreten werden, die bei der ersten Voraussetzung innerhalb des beschriebenen Kreises, bei der zweiten Voraussetzung ausserhalb desselben Kreises, und bei der dritten Voraussetzung auf dem Kreise selbst liegen.

Wir wenden uns jetzt zu einer allgemeinen Betrachtung *der Reihen, welche nach den positiven Potenzen einer variabeln Grösse x* geordnet sind. Sie nehmen in der gesammten Analysis eine ausgezeichnete Stellung ein. Es seien b_0, $b_1, \ldots$ gegebene reelle Grössen, die sämmtlich numerisch unter einer festen Grenze liegen, mit denen die Summe

$$s_q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_q x^q \tag{7}$$

gebildet wird. Die variable Grösse x möge gegenwärtig ebenfalls nur reelle und der Einfachheit halber auch nur positive Werthe erhalten, und es sei ein specieller Werth $x = X$ bekannt, für den die Summe s_q bei unendlicher Ausdehnung convergirt. Dann besteht der folgende Satz:

(I) *Sobald die in* (7) *definirte Summe s_q bei einer stets zunehmenden Gliederzahl für den reellen positiven Werth $x = X$ convergirt, so convergirt sie auch für jeden reellen positiven Werth x, der kleiner ist als der Werth X.*

Weil nach § 105 die Summe der Glieder einer convergenten Reihe, von einem zu bestimmenden Zeiger ab bis zu einem beliebig weit vorgerückten Zeiger genommen, numerisch kleiner ausfallen muss als eine beliebig kleine gegebene Grösse θ, und weil die Reihe (7) für $x = X$ convergent sein soll, so kann der Zeiger q so gewählt werden, dass die Summe

$$\sigma_{q,q+t} = b_{q+1} X^{q+1} + b_{q+2} X^{q+2} + \ldots + b_{q+t} X^{q+t}$$

für jeden Werth der positiven ganzen Zahl t numerisch kleiner bleibt als die beliebig kleine gegebene Grösse θ.

Die Differenz $s_{q+t} - s_q$ lässt sich nun folgendermassen darstellen

$$s_{q+t} - s_q = b_{q+1} X^{q+1} \left(\frac{x}{X}\right)^{q+1} + b_{q+2} X^{q+2} \left(\frac{x}{X}\right)^{q+2} + \ldots + b_{q+t} X^{q+t} \left(\frac{x}{X}\right)^{q+t}, \tag{8}$$

ferner ist in Folge der eingeführten Bezeichnung

$$(9)\quad b_{q+1} X^{q+1} = \sigma_{q,q+1},\ b_{q+2} X^{q+2} = \sigma_{q,q+2} - \sigma_{q,q+1}, \ldots$$
$$b_{q+t} X^{q+t} = \sigma_{q,q+t} - \sigma_{q,q+t-1}.$$

Durch Substitution kommt

$$(10)\quad s_{q+t} - s_q = \sigma_{q,q+1}\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1} + (\sigma_{q,q+2} - \sigma_{q,q+1})\left(\frac{x}{X}\right)^{q+2} + \ldots$$
$$+ (\sigma_{q,q+t} - \sigma_{q,q+t-1})\left(\frac{x}{X}\right)^{q+t},$$

und durch Auflösung der mit den Potenzen von $\frac{x}{X}$ multiplicirten Differenzen kann die neue Anordnung erhalten werden

$$(11)\quad s_{q+t} - s_q = \sigma_{q,q+1}\left(\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1} - \left(\frac{x}{X}\right)^{q+2}\right)$$
$$+ \sigma_{q,q+2}\left(\left(\frac{x}{X}\right)^{q+2} - \left(\frac{x}{X}\right)^{q+3}\right) + \ldots + \sigma_{q,q+t-1}\left(\left(\frac{x}{X}\right)^{q+t-1} - \left(\frac{x}{X}\right)^{q+t}\right)$$
$$+ \sigma_{q,q+t}\left(\frac{x}{X}\right)^{q+t}.$$

Da $\frac{x}{X}$ eine positive unter der Einheit liegende Grösse bedeutet, so haben die sämmtlichen Differenzen

$$\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1} - \left(\frac{x}{X}\right)^{q+2}, \ldots \left(\frac{x}{X}\right)^{q+t-1} - \left(\frac{x}{X}\right)^{q+t}$$

wie auch die Potenz $\left(\frac{x}{X}\right)^{q+t}$ positive Werthe. Die rechte Seite von (11) wird deshalb numerisch vergrössert, sobald man jede der Grössen $\sigma_{q,q+1}, \sigma_{q,q+2}, \ldots \sigma_{q,q+t}$ durch den positiven Werth θ ersetzt, welcher nach der bestehenden Voraussetzung jede derselben numerisch übertrifft. Alsdann zieht sich aber die rechte Seite von (11) zu dem Product

$$(12)\qquad \theta\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1}$$

zusammen. Der numerische Werth der Differenz $s_{q+t} - s_q$ bleibt also für jede Zahl t kleiner, als das Product $\theta\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1}$, welches beliebig klein gemacht werden kann, und damit ist die Behauptung des Satzes (I) bewiesen.

Bei der geometrischen Reihe und den andern vorhin besprochenen besonderen Potenzreihen ist die Variable nicht blos reell angenommen, sondern auch durch eine complexe Grösse ersetzt worden. Die allgemeine Lehre der Potenzreihen erfordert die Vollziehung desselben Schrittes. In der Reihe (7) wird jetzt statt der reellen Variable x die complexe Grösse

(13) $$x + iy = z$$

substituirt, so dass das Resultat

(14) $$s_q = b_0 + b_1(x + iy) + b_2(x + iy)^2 + \ldots + b_q(x + iy)^q$$

entsteht. Alsdann zerfällt jedes Glied von s_q in einen reellen und einen rein imaginären Theil, mithin auch s_q selbst, und die Aussage, dass die Summe s_q für eine wachsende Zahl q convergire, hat die Bedeutung, dass sowohl die Summe der reellen Theile wie auch die Summe der rein imaginären Theile, nachdem sie von dem Factor i befreit ist, convergent sei. Um die Trennung in den einzelnen Gliedern auszuführen, bezeichne r den absoluten Betrag der complexen Grösse $x + iy$ und ψ einen innerhalb der ganzen Kreisperipherie vollständig bestimmten Winkel, so dass

(15) $$x + iy = r(\cos\psi + i\sin\psi)$$

ist; da $b_0, b_1, \ldots$ reelle Grössen sein sollen, stellt in der Gleichung

(16) $$\begin{aligned} s_q = b_0 + {} & b_1 r\cos\psi + b_2 r^2\cos 2\psi + \ldots + b_q r^q \cos q\psi \\ & + i(b_1 r\sin\psi + b_2 r^2 \sin 2\psi + \ldots + b_q r^q \sin q\psi) \end{aligned}$$

die erste Zeile der rechten Seite den reellen Theil, die zweite Zeile den rein imaginären Theil der Summe s_q dar. Man kann nunmehr den Satz (I) in der folgenden Weise ausdehnen:

(II) *Sobald die in* (14) *definirte Summe* s_q *bei wachsendem* q *für diejenigen Werthe* $x + iy = X + iY$ *convergirt, deren absoluter Betrag gleich* R *ist, so convergirt sie auch für jeden complexen Werth* $x + iy$, *dessen absoluter Betrag* r *kleiner als der Werth* R *ist.*

Der Beweis besteht in einer Zurückführung auf den Satz (I). Für eine beliebig gewählte Grösse $x + iy$, deren absoluter Betrag r kleiner als R ist, enthält die Gleichung (15) einen

bestimmten Winkel ψ. Mit diesem Winkel bilde man die complexe Grösse

(17) $$X + iY = R(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Nach der Voraussetzung convergirt s_q bei der Substitution dieser Grösse statt der Grösse $x + iy$, das heisst, es convergirt die Summe

(18) $$\begin{aligned} b_0 + \; & b_1 R\cos\psi + b_2 R^2\cos 2\psi + \ldots + b_q R^q \cos q\psi \\ & + i(b_1 R\sin\psi + b_2 R^2 \sin 2\psi + \ldots + b_q R^q \sin q\psi). \end{aligned}$$

Nun folgt nach (I) aus der Convergenz des reellen Theiles von (18) die Convergenz des reellen Theiles von (16), und aus der Convergenz des durch die imaginäre Einheit i dividirten imaginären Theiles von (18) die Convergenz des durch die imaginäre Einheit i dividirten imaginären Theiles von (16). Mithin ist der Satz (II) gültig.

Es gewährt ein Interesse, die Ausdrücke hinzuzufügen, unter denen der reelle und der imaginäre Theil der hierher gehörigen Differenz $s_{q+t} - s_q$ enthalten bleiben, und aus deren beliebiger Abnahme die Convergenz der Summe s_q geschlossen wird. Für jeden der beiden Theile ist der Ausdruck zu bilden, welcher dem bei dem Beweise des Satzes (II) vorkommenden Product (12) entspricht. An die Stelle von x und X tritt beide Male respective r und R. Nachdem dann die positive beliebig kleine Grösse θ gewählt ist, muss eine Zahl q so gross angenommen werden, dass sowohl die Summe

(19) $$b_{q+1} R^{q+1} \cos\overline{(q+1)\psi} + \ldots + b_{q+t} R^{q+t} \cos\overline{(q+t)\psi},$$

wie auch die Summe

(20) $$b_{q+1} R^{q+1} \sin\overline{(q+1)\psi} + \ldots + b_{q+t} R^{q+t} \sin\overline{(q+t)\psi}$$

für jeden Werth der Zahl t numerisch kleiner als θ bleibt. Unter dieser Voraussetzung sind sowohl der reelle wie auch der durch i dividirte imaginäre Theil der Differenz $s_{q+t} - s_q$ numerisch kleiner als die Grösse

(21) $$\theta\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}.$$

Die Bedeutung dieses Ausdruckes hängt wesentlich davon ab, wie zu der gegebenen kleinen Grösse θ die Zahl q gefunden wird, oder in andern Worten, wieviel Glieder bei dem reellen

und dem imaginären Theile der Summe (18) erforderlich sind, damit der bei dieser Summe zu begehende Fehler unter der Grösse θ bleibe. Die Art, in welcher die mit dem speciellen Werthe $r = R$ gebildete Summe (18) convergirt, bestimmt also den für die Summe (16) entscheidenden Ausdruck (21). Man kann indessen häufig auch ohne vorhergehende Kenntniss specieller Werthsysteme, für welche die Summe einer Potenzreihe convergirt, die Convergenz derselben beurtheilen, indem man den folgenden Satz anwendet:

(III) *Wenn die absoluten Werthe der Grössen $b_0, b_1 R, b_2 R^2, \ldots$ sämmtlich unter einer festen Grösse $\mathfrak{B}$ bleiben, so convergirt die in* (14) *definirte Summe s_q für diejenigen Werthe $x + iy$, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Grösse R.*

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es, die in (16) gegebene Darstellung von s_q in die Gestalt zu bringen

$$(22)\quad s_q = b_0 + b_1 R \cos\psi \frac{r}{R} + b_2 R \cos \overline{2\psi} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \ldots$$
$$+ b_q R^q \cos q\psi \left(\frac{r}{R}\right)^q$$
$$+ i\left(b_1 R \sin\psi \frac{r}{R} + b_2 R \sin\overline{2\psi}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \ldots + b_q R^q \sin\overline{q\psi}\left(\frac{r}{R}\right)^q \right)$$

und den Beweis des im vorigen § mitgetheilten Satzes (II) zu benutzen. Weil die Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels ψ stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$ enthalten bleiben, so liegen sowohl die Grössen

$$b_0,\ b_1 R \cos\psi,\ b_2 R\cos 2\psi, \ldots$$

wie auch die Grössen

$$b_1 R\sin\psi,\ b_2 R \sin 2\psi, \ldots$$

unter der in der Voraussetzung bezeichneten Grösse $\mathfrak{B}$ und erfüllten die Bedingung, welche bei dem erwähnten Satze des vorigen § für die dortigen Grössen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ gestellt ist. Die auf einander folgenden Potenzen der unter der Einheit befindlichen positiven Basis $\frac{r}{R}$ treten an die Stelle der Grössen, die mit $\varrho_0, \varrho_1 \ldots$ bezeichnet sind, und zwar ist es erlaubt, bei der Aufsuchung eines Werthes, der die dortige Differenz (6) numerisch übertrifft, sowohl den Grenzwerth g wie auch die später ein-

geführte Grösse $g+\theta$ durch die Grösse $\frac{r}{R}$ zu ersetzen. Der reelle und der von dem Factor i befreite imaginäre Theil der zu der Reihe (22) gehörenden Differenz $s_{q+t}-s_q$ liegen in Folge jener Erörterungen für jeden Werth der Zahl t numerisch unter der Grösse

$$\mathfrak{B}\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^q}{1-\frac{r}{R}}, \tag{23}$$

welche aus dem Ausdrucke (9) des vorigen § entsteht, indem $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{B}$, ϱ_{q_1} durch $\left(\frac{r}{R}\right)^{q_1}$, und $g+\theta$ durch $\frac{r}{R}$ ersetzt wird. Die Grösse (23) wird aber vermöge der Potenz $\left(\frac{r}{R}\right)^q$ beliebig klein, und deshalb convergiren, wie behauptet worden, die bezüglichen Summen, so lange der absolute Betrag r der complexen Grösse kleiner ist als die positive Grösse R.

Es leuchtet ein, dass die absoluten Werthe der Grössen b_0, $b_1 R$, $b_2 R^2$, .. sehr wohl unter einer festen Grösse liegen können, ohne dass die Summe (18) convergirt, in welche die Summe (16) bei $r = R$ übergeht. Daher lässt sich der Satz (III) nur beweisen, sobald für die Reihe s_q der absolute Betrag r kleiner als die Grösse R ist, *mit Ausschluss des Falles der Gleichheit.* Bei dem Satze (II) wird dagegen die Convergenz der Reihe (18) vorausgesetzt, und es folgt die Convergenz der Reihe s_q, wofern der absolute Betrag r kleiner als die Grösse R ist, *mit Einschluss des Falles der Gleichheit.* Hierin liegt der Unterschied der beiden Sätze.

§ 108. Fortsetzung. Begriff der Stetigkeit einer Function.

Der Werth der Summe einer unendlichen Reihe, die nach den positiven Potenzen einer Variable x fortschreitet und für alle reellen numerisch unter einer bestimmten Grösse liegenden Werthe der Variable convergirt, ist für jeden dieser Werthe vollständig bestimmt, und stellt daher vermöge der in § 101 gegebenen Definition *eine Function der Variable x* dar. Alle so

erzeugten Functionen haben gewisse gemeinsame Eigenschaften, zu deren Darstellung es nothwendig ist, einen bisher noch nicht erörterten Begriff zur Sprache zu bringen, *den Begriff der Stetigkeit einer Function.* Die Definition desselben ist die folgende: *Wenn eine Function* $f(x)$, *welche für alle der Bedingung* $a \leqq x \leqq b$ *genügenden Werthe von* x *gegeben ist, die Eigenschaft hat, dass bei je zwei innerhalb dieses Intervalles befindlichen Werthen* x *und* $x+h$ *die Differenz der zugehörigen Werthe der Function* $f(x+h)-f(x)$ *für einen gegen die Null abnehmenden Werth der Grösse* h *selbst gegen die Null abnimmt, so wird* $f(x)$ *eine stetige Function der Variable* x *genannt.*

Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, dass *jede positive ganze Potenz der Variable* x stets den Anforderungen der aufgestellten Definition genügt und somit *eine stetige Function der Variable* x ist. Für jeden Werth der Grösse x und der Grösse h und jeden ganzen positiven Werth des Exponenten n gilt der in § 46 nachgewiesene *binomische Lehrsatz*

$$(1) \qquad (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n,$$

durch welchen die zu bildende Differenz $(x+h)^n - x^n$ den Ausdruck erhält

$$(2) \qquad (x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

Die einzelnen Glieder sind Producte aus den ganzzahligen Binomialcoefficienten, aus positiven Potenzen der Grösse x und aus positiven Potenzen der Grösse h von der 1ten bis zur $n$ten. Für einen numerisch hinreichend kleinen Werth von h wird jede der Potenzen von h beliebig klein, die andern Factoren wachsen nicht, folglich erhält das ganze aus einer beschränkten Anzahl von Gliedern bestehende Aggregat einen numerisch beliebig kleinen Werth, weshalb die für die positiven ganzen Potenzen einer Variable x ausgesprochene Behauptung gültig ist. Aus der Stetigkeit der Potenz x^n folgt sogleich, dass *jede rationale ganze Function einer Variable eine stetige Function von* x ist. Eine solche Function ist gleich der Summe einer beschränkten Anzahl von ganzen positiven Potenzen, die in constante Coefficienten multiplicirt sind,

(3) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

jeder Summand hat aus der angeführten Ursache die Eigenschaft, eine stetige Function von x zu sein, und die zu bildende endliche Summe nimmt an dieser Eigenschaft Theil. Hiebei ist die Grösse x keiner Einschränkung unterworfen. Dagegen liefert die rationale gebrochene Function $\frac{1}{x-\xi}$, bei der ξ einen beliebigen reellen Werth bedeutet, das Beispiel einer Function, welche sowohl für alle Werthe von x, bei denen $x-\xi$ positiv ist, wie auch für alle Werthe von x, bei denen $x-\xi$ negativ ist, stetig bleibt, dagegen bei dem Uebergange von einem unter der Grösse ξ liegenden Werthe x zu einem über der Grösse ξ liegenden Werthe $x+h$ *eine Unterbrechung der Stetigkeit* aufweist. Dass die Differenz $\frac{1}{x+h-\xi} - \frac{1}{x-\xi} = \frac{-h}{(x+h-\xi)(x-\xi)}$, sobald die Grössen $x+h-\xi$ und $x-\xi$ dasselbe Vorzeichen haben und von Null verschieden sind, bei numerisch abnehmendem h sich der Null nähert, ist leicht einzusehen. Auch kann nicht bezweifelt werden, dass, wofern δ und ε positive Grössen bedeuten und $x-\xi = -\delta$, $x-\xi+h = \varepsilon$ genommen wird, die Differenz $\frac{1}{x-\xi+h} - \frac{1}{x-\xi} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\delta}$ für hinreichend kleine Werthe von δ und ε einen beliebig grossen Werth erhält. Daraus folgt das Behauptete.

Damit der Begriff der Stetigkeit auf die Summe einer unendlichen Reihe angewendet werde, muss selbstverständlich vorher die Convergenz der Reihe festgestellt sein. Wir betrachten jetzt die im vorigen § in (7) angegebene Summe, fügen der Bezeichnung den Werth der Variable x hinzu, so dass

(4) $$s_q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_q x^q$$

ist, und machen die Voraussetzung des dortigen Satzes (I), *dass die Summe für den reellen positiven Werth $x = X$ convergire.* Sie convergirt dann nach diesem Satze auch *für die reellen positiven unter X liegenden Werthe von x, den Werth X mit eingerechnet*, und drückt eine bestimmte Function von x aus. Es lässt sich nun zeigen, *dass die unendliche Summe $s_q(x)$ für dieses Intervall der Variable x, innerhalb dessen die Variable x dem*

Werthe X beliebig genähert werden darf, eine stetige Function der Variable x ist.

Das Ziel wird erreicht sein, sobald man für je zwei zwischen den Grenzen 0 und X liegende Werthe x und $x+h$ eine Zahl q so bestimmen kann, dass die Differenz

$$(5) \qquad s_{q+t_1}(x+h) - s_{q+t}(x)$$

bei einem gegen die Null abnehmenden Werthe von h numerisch beliebig klein wird, wie gross auch immer die ganzen Zahlen t und t_1 gewählt werden mögen. Der numerische Werth der Differenz $s_{q+t}(x) - s_q(x)$ liegt für jede Zahl t unter der im vorigen § mit (12) notirten Grösse $\theta\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1}$, der numerische Werth der Differenz $s_{q+t_1}(x+h) - s_q(x+h)$ für jede Zahl t_1 unter der entsprechend gebildeten Grösse $\theta\left(\frac{x+h}{X}\right)^{q+1}$. *Sowohl der Ausdruck $\theta\left(\frac{x}{X}\right)^{q+1}$ wie auch der Ausdruck $\theta\left(\frac{x+h}{X}\right)^{q+1}$ werden vermöge der beliebig kleinen Grösse θ beliebig klein, wie nahe die Grösse $\frac{x}{X}$ oder $\frac{x+h}{X}$ an die Einheit gerückt werde, und sind es selbst auch dann noch, wenn man eine von ihnen den Werth der Einheit selbst annehmen lässt.* Weil aber die Differenz (5) gleich dem Aggregat der Differenzen

$$(6) \qquad \begin{aligned} & s_q(x+h) - s_q(x) \\ & + (s_{q+t_1}(x+h) - s_q(x+h)) \\ & - (s_{q+t}(x) - s_q(x)) \end{aligned}$$

ist, und aus der angeführten Ursache die zweite und dritte Differenz numerisch beliebig klein ausfallen, so kommt es nur noch darauf an, zu beweisen, dass auch die erste Differenz

$$(7) \qquad s_q(x+h) - s_q(x)$$

beliebig klein wird. Hier bedenke man, dass die Zahl q zu der gegebenen kleinen Grösse θ passend gewählt worden ist, ohne auf die Werthe x und $x+h$ Rücksicht zu nehmen. Daher darf für den Augenblick $s_q(x)$ als eine ganze Function der Variable x vom $q$ten Grade aufgefasst werden, und die vor-

hin nachgewiesene Stetigkeit der ganzen Functionen bringt es mit sich, dass durch die Wahl der Grösse h die Differenz (7) numerisch kleiner gemacht werden kann als jede noch so kleine gegebene Grösse. Daraus folgt die Thatsache, dass der numerische Werth der Differenz (6) beliebig klein wird, mithin die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung. Insbesondere ist aber hervorzuheben, *dass vermöge des gelieferten Beweises die durch die unendlich ausgedehnte Summe* $s_q(x)$ *dargestellte Function auch dann stetig bleibt, wenn der Werth der Variable* x *dem gegebenen Werthe* X *beliebig genähert wird.*

Für das Folgende muss auch die Abhängigkeit einer Grösse von zwei und von mehr als zwei veränderlichen Grössen ins Auge gefasst werden. Die abhängige Grösse heisst dann *eine Function dieser veränderlichen Grössen*, in Uebereinstimmung mit dem im § 22 des Abschnittes II eingeführten Ausdrucke einer rationalen Function von mehreren veränderlichen Grössen. Bei einer gegebenen Function von zwei veränderlichen Grössen x und y gehört immer *zu der Verbindung eines Werthes von* x *mit einem Werthe von* y *ein Werth der Function.* Diese Vorstellung wird erleichtert, indem man die beiden veränderlichen Grössen x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene auffasst und sich denkt, dass der für die Werthe der Variabeln x und y gegebene Werth der Function zu dem Punkte der Ebene gehöre, dessen Coordinaten x und y sind. Hieraus entspringt die Vorstellung, dass die Function für einen Theil der Ebene oder für Theile der Ebene gegeben sei, in denen sich die bezeichneten Punkte befinden. Wenn eine Function von x und y für alle Verbindungen von je zwei Werthen gegeben ist, bei denen x zwischen den Grenzen a und b, y zwischen den Grenzen c und d liegt, so erkennt man, dass diese sämmtlichen Verbindungen die Coordinaten von Punkten sind, die innerhalb eines leicht zu construirenden Rechtecks liegen. Ist eine Function von x und y für alle Verbindungen der Werthe x und y gegeben, bei denen die Quadratsumme $x^2 + y^2$ kleiner ist als eine Grösse R^2, so befinden sich die Punkte, deren Coordinaten x und y sind, innerhalb eines Kreises, der um den Coordinatenanfangspunkt mit dem Radius R beschrieben ist. Der Inbegriff der Werthverbindungen von x und y,

für welche eine Function gegeben ist, wird nach der Analogie des Theiles der Ebene ein Gebiet genannt.

Eine für ein gewisses Gebiet von Werthverbindungen der Variabeln x und y gegebene Function $f(x, y)$ heisst eine stetige Function von x und y, sobald der absolute Werth der Differenz von je zwei in dem Gebiete vorkommenden Werthen der Function $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ bei stets abnehmender Grösse der Werthe h und k sich beliebig der Null nähert. Wenn man x, y als die Coordinaten eines Punktes der Ebene, ferner $x+h$, $y+k$ als die Coordinaten eines zweiten Punktes der Ebene ansieht, so nähert sich bei der Abnahme der Grössen h und k der zweite Punkt dem ersten Punkte.

Eine rationale ganze Function von zwei Variabeln x und y ist gleich dem Aggregat einer beschränkten Zahl von Gliedern, deren jedes durch Multiplication einer ganzen positiven Potenz von x, einer ganzen positiven Potenz von y und einer constanten Grösse erhalten wird, wobei die Null unter den Potenzexponenten zugelassen ist. Durch die Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf jedes einzelne Glied $A x^{n} y^{p}$ ergiebt sich, dass die Differenz $A(x+h)^{n}(y+k)^{p} - a x^{n} y^{p}$ bei abnehmenden Werthen von h und k numerisch beliebig klein wird, und daraus folgt vermöge derselben Schlüsse wie sie bei einer ganzen Function einer Variable benutzt sind, *dass jede rationale ganze Function von zwei Variabeln x und y ohne Einschränkung der denselben beizulegenden Werthe eine stetige Function von x und y ist.*

Sobald man in eine rationale ganze Function einer Variable z statt z eine complexe Grösse $x + iy$ substituirt, so wird der reelle Theil gleich einer ganzen Function von x und y und der durch die imaginäre Einheit i dividirte imaginäre Theil ebenfalls gleich einer ganzen Function von x und y mit reellen Coefficienten. Wie wir so eben fanden, sind beide Functionen *stetige Functionen von x und y.* Die Coefficienten der ursprünglich angenommenen Function von z dürfen beliebige feste complexe Grössen sein. Wenn man daher die Bedeutung der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ in (3) dahin erweitert, beliebige complexe Grössen darzustellen, so liefert dieselbe für das Ergebniss der bezeichneten Operation den Ausdruck

(8) $f(x+iy) = a_0(x+iy)^n + a_1(x+iy)^{n-1} + \ldots + a_n$.

Die Substitution von $x+h$ für x und von $y+k$ für y bringt dann die Gleichung

(9) $$f(x+iy+h+ik) = a_0(x+iy+h+ik)^n + a_1(x+iy+h+ik)^{n-1} + \ldots + a_n$$

hervor. Statt der in (8) vorkommenden complexen Grösse $x+iy$ ist in (9) das Aggregat der complexen Grösse $x+iy$ und der complexen Grösse $h+ik$ getreten. Wir erblicken hier denselben Process, der in § 63 vorgenommen ist, als es sich um den Nachweis der Existenz einer Wurzel für jede algebraische Gleichung handelte. Der in (8) definirte Ausdruck $f(x+iy)$ wird *eine rationale ganze Function des nten Grades von der complexen Grösse $x+iy$* genannt, und die Eigenschaft derselben, dass sowohl der reelle wie der imaginäre Theil der Differenz $f(x+iy+h+ik) - f(x+iy)$, für eine beständige Abnahme der Grössen h und k gegen die Null numerisch beliebig klein wird, hat die Bezeichnung erhalten, dass $f(x+iy)$ *eine stetige Function der complexen Grösse $x+iy$* sei.

Ein ähnliches Verhalten zeigt die Summe (14) des vorigen §, die wir jetzt so bezeichnen,

(10) $$s_q(x+iy) = b_0 + b_1(x+iy) + b_2(x+iy)^2 + \ldots + b_q(x+iy)^q.$$

Sie convergirt bei unendlicher Ausdehnung für eine complexe Grösse $x+iy$, deren Betrag unter der dort eingeführten Grösse R liegt, und man sagt alsdann, *dass* (10) *eine Function der complexen Grösse $x+iy$ darstelle.* Mit zwei complexen Grössen $x+iy$ und $x+iy+h+ik$, für welche die Summe convergirt, wird die Differenz

(11) $$s_{q+t_1}(x+iy+h+ik) - s_{q+t}(x+iy)$$

aufgestellt, wo t und t_1, wie oben, beliebig grosse positive ganze Zahlen sind. *Wofern der reelle und der imaginäre Theil von* (11) *bei stets abnehmenden Werthen von h und k numerisch beliebig klein werden, so sind der reelle und der imaginäre Theil der unendlich ausgedehnten Summe* (10) *stetige Functionen der Variabeln x und y, oder die unendlich ausgedehnte Summe* (10) *ist eine stetige Function der complexen Grösse $x+iy$.*

Wir werden jetzt die Differenz (11) unter verschiedenen Voraussetzungen prüfen. Wie die Differenz (5) in das Aggregat

(6) aufgelöst worden ist, so giebt man der zu untersuchenden Differenz (11) die Gestalt

$$(12)\qquad \begin{aligned} & s_q(x+iy+h+ik)-s_q(x+iy) \\ & +\left(s_{q+t_1}(x+iy+h+ik)-s_q(x+iy+h+ik)\right) \\ & -\left(s_{q+t}(x+iy)-s_q(x+iy)\right). \end{aligned}$$

Um die zweite und die dritte der in (12) enthaltenen Differenzen zu beurtheilen, werde $x+iy$ so, wie in (15) des vorigen §, und $x+iy+h+ik$ dem entsprechend ausgedrückt, so dass

$$(13)\ x+iy=r(\cos\psi+i\sin\psi),\ x+iy+h+ik=r_1(\cos\psi_1+i\sin\psi_1)$$

ist. Offenbar nähert sich, sobald h und k numerisch gegen die Null abnehmen, der Betrag r_1 dem Betrage r und gleichzeitig der Winkel ψ_1 dem Winkel ψ. Dies wird namentlich durch die Benutzung der *Gauss*'schen Interpretation der complexen Grössen klar. Für den Punkt $x+iy$ ist r die Länge der nach demselben vom Nullpunkte aus gezogenen geraden Linie, ψ der Winkel, den jene Linie mit der positiven Halbaxe der reellen Werthe bildet. Für den Punkt $x+iy+h+ik$ haben die Grössen r_1 und ψ_1 die entsprechende Bedeutung. Wenn sich nun $x+h$ dem Werthe x und $y+k$ dem Werthe y nähert, so rückt der Punkt $x+iy+h+ik$ auf den Punkt $x+iy$ zu, und dann nähert sich auch der Abstand r_1 dem Abstande r, und der Winkel ψ_1 dem Winkel ψ. Eine complexe Grösse $x+iy$, deren absoluter Betrag r kleiner oder beziehungsweise gleich einer Grösse R ist, wird, wie schon erwähnt, durch einen Punkt der Ebene vertreten, der beziehungsweise innerhalb oder auf der Peripherie eines Kreises liegt, welcher um den Nullpunkt mit dem Radius R beschrieben ist, und nur complexe Grössen von der bezeichneten Beschaffenheit kommen demnächst zur Erörterung. Wir nehmen bei der Discussion der Differenz (12) zuerst an, dass die Voraussetzung des in dem vorigen § aufgestellten Satzes (III) bestehe, nach welcher *die sämmtlichen Grössen* b_0, $b_1 R$, $b_2 R^2, \ldots$ *numerisch unter einer festen Grösse* $\mathfrak{B}$ *liegen.* Dann befinden sich vermöge der dortigen Betrachtungen der reelle und der imaginäre Theil der Differenz $s_{q+t_1}(x+iy+h+ik) - s_q(x+iy+h+ik)$ für jeden Werth von t_1 numerisch unter

der Grösse $\frac{\mathfrak{B}\left(\frac{r_1}{R}\right)^q}{1-\frac{r_1}{R}}$, und der reelle und der imaginäre Theil der Differenz $s_{q+t}(x+iy)-s_q(x+iy)$ für jeden Werth von t numerisch unter der Grösse $\frac{\mathfrak{B}\left(\frac{r}{R}\right)^q}{1-\frac{r}{R}}$. Hier sind die Quotienten $\frac{r}{R}$ und $\frac{r_1}{R}$ kleiner als die Einheit, folglich werden sowohl $\frac{\mathfrak{B}\left(\frac{r_1}{R}\right)^q}{1-\frac{r_1}{R}}$ wie auch $\frac{\mathfrak{B}\left(\frac{r}{R}\right)^q}{1-\frac{r}{R}}$ für einen genügend grossen Werth der Zahl q beliebig klein. Nachdem aber die Zahl q diesem Zwecke entsprechend gewählt ist, kann bei der in (12) vorhandenen ersten Differenz

$$(12^*) \qquad s_q(x+iy+h+ik)-s_q(x+iy)$$

der numerische Werth von h und k mit dem Erfolge beständig verkleinert werden, dass der reelle wie der imaginäre Theil von (12*) sich beliebig der Null nähern. Unter der erwähnten Voraussetzung gilt dies also für jede der drei in (12) vereinigten Differenzen, mithin auch für ihr Aggregat. Darum ist alsdann *die unendlich ausgedehnte Summe* (10) *für alle complexen Grössen* $x+iy$, *deren Betrag* r *kleiner ist als die Grösse* R, *eine stetige Function von* $x+iy$. Der zugeordnete Punkt der Ebene $x+iy$ darf dann alle Oerter innerhalb des Kreises einnehmen, der um den Nullpunkt mit dem Radius R beschrieben ist, die Kreisperipherie ausgeschlossen.

Man hat die Differenz (12) zweitens unter der Voraussetzung zu erörtern, die dem Satze (II) des vorigen § zu Grunde liegt, dass nämlich *die Summe*

$$(14) \quad s_q(R(\cos\psi+i\sin\psi))$$
$$=b_0+b_1R\cos\psi+b_2R^2\cos 2\psi+\ldots+b_qR^q\cos q\psi$$
$$+i(b_1R\sin\psi+b_2R^2\sin 2\psi+\ldots+b_qR^q\sin q\psi)$$

bei unendlicher Ausdehnung für jeden Werth des Winkels ψ *con-*

vergire. Die Voraussetzung des Satzes (III), dass die sämmtlichen Grössen $b_0, b_1 R, b_2 R^2, \ldots$ unter einer festen Grösse liegen, ist zufolge einer in § 105 enthaltenen Bemerkung in der gegenwärtig wiederholten Voraussetzung des Satzes (II) eingeschlossen. Wir können daher aus dem so eben gelieferten Beweise das Resultat ableiten, dass der reelle und der imaginäre Theil der Differenz (12) beliebig klein werden, wofern *die in* (13) *definirten Beträge* r *und* r_1 *kleiner als die Grösse* R sind. Dagegen gestattet das angewendete Beweisverfahren *nicht, den Betrag* r *oder den Betrag* r_1 *der Grösse* R *gleich werden zu lassen.*

Unter der gegenwärtig geltenden, zu dem Satze (II) des vorigen § gehörigen Voraussetzung convergirt die Summe (14) auch für die Substitution des aus (13) entnommenen Winkels ψ_1,

$$(15)\ s_q(R(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1))$$
$$= b_0 + b_1 R\cos\psi_1 + b_2 R^2 \cos 2\psi_1 + \ldots + b_q R^q \cos q\psi_1$$
$$+ i(b_1 R \sin\psi_1 + b_2 R^2 \sin 2\psi_1 + \ldots + b_q R^q \sin q\psi_1).$$

Es kommt nun darauf an, vermittelst der an der betreffenden Stelle des vorigen § ausgeführten Betrachtung einen Werth zu erhalten, welcher den reellen und den imaginären Theil der Differenz $s_{q+t_1}(x+iy+h+ik) - s_q(x+iy+h+ik)$ numerisch übertrifft, und einen Werth, welcher den reellen und den imaginären Theil der Differenz $s_{q+t}(x+iy) - s_q(x+iy)$ numerisch übertrifft. Für die letztere Differenz wird ein solcher Werth durch den mit (21) notirten Ausdruck des vorigen § dargestellt. *Wenn* θ *eine beliebige kleine gegebene Grösse bedeutet, so hat man die Zahl* q *so gross zu nehmen, dass bei der in* (14) *dargestellten Summe* $s_q(R(\cos\psi + i\sin\psi))$ *weder der reelle noch der imaginäre Theil numerisch um mehr als die Grösse* θ *wachsen kann, sobald statt der Zahl* q *eine beliebige grössere Zahl* $q+t$ *eingeführt wird; dann ist jener Ausdruck gleich dem Product* $\theta\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}$.

Um für die Differenz $s_{q+t_1}(x+iy+h+ik) - s_q(x+iy+h+ik)$ dasselbe zu leisten, *nehmen wir an, dass dieselbe Zahl* q *ausreiche, damit bei der in* (15) *dargestellten Summe* $S_q(R(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1))$, *wie sehr auch der Winkel* ψ_1 *dem Winkel* ψ *genähert werden möge, weder der reelle noch der imaginäre Theil numerisch um*

mehr als die Grösse θ wachsen könne, sobald statt der Zahl q eine beliebige grössere Zahl $q+t_1$ eingeführt wird; dann ist der zu dieser Differenz gehörende entsprechende Ausdruck gleich dem Product $\theta\left(\frac{r_1}{R}\right)^{q+1}$. Auf diese Weise werden jetzt ebenfalls der reelle und der imaginäre Theil in der zweiten und der dritten in (12) enthaltenen Differenz beliebig klein, wobei es frei steht, über ψ und ψ_1 irgend wie zu verfügen, ferner den Betrag r oder den Betrag r_1 an die Grösse R beliebig heran zu rücken, und auch diese Grösse erreichen zu lassen. Für die erste in (12) vorkommende Differenz bewirkt, nachdem die Zahl q in der angegebenen Weise bestimmt worden ist, die numerische Abnahme von h und k, bei der r_1 gegen r und ψ_1 gegen ψ genähert wird, dass der reelle und imaginäre Theil beliebig klein werden. *Es nähert sich daher auch unter den gegenwärtig bezeichneten Voraussetzungen der reelle und der imaginäre Theil der Differenz* (12) *der Null, und folglich ist die unendlich ausgedehnte Summe* (10) *für alle complexen Grössen $x+iy$, deren Betrag r kleiner als die Grösse R ist und auch der Grösse R gleich werden darf, eine stetige Function von $x+iy$.* Der zugeordnete Punkt der Ebene $x+iy$ darf dann alle Oerter innerhalb des Kreises einnehmen, der um den Nullpunkt mit dem Radius R beschrieben ist, die Kreisperipherie eingeschlossen.

Man hat häufige Veranlassung, solche Potenzreihen zu untersuchen, bei denen die Coefficienten von einer besondern veränderlichen Grösse abhängen. Es seien *die reellen Coefficienten $b_0, b_1, \ldots$ der Reihe* (10) *als Functionen einer reellen Variable w für ein gewisses Intervall derselben* gegeben, und zwar als *stetige Functionen von w.* Demgemäss bezeichnen wir $b_0, b_1, \ldots$ respective mit $b_0(w)$, $b_1(w), \ldots$ und setzen

$$(16)\quad s_q(x+iy,w)=b_0(w)+b_1(w)(x+iy)+b_2(w)(x+iy)^2+\ldots$$
$$+b_q(w)(x+iy)^q.$$

Die Functionen $b_0(w)$, $b_1(w), \ldots$ sollen so beschaffen sein, dass *für alle vorkommenden Werthe der Variable w* die absoluten Werthe der mit der positiven Grösse R gebildeten Ausdrücke

$$b_0(w),\ b_1(w)R,\ b_2(w)R^2,\ldots$$

numerisch unter einer und derselben festen Grösse $\mathfrak{B}$ bleiben.

Dann lehrt der Beweis des im vorigen § befindlichen Satzes (III), dass die Differenz

$$s_{q+t}(x+iy,w) - s_q(x+iy,w) \tag{17}$$

für jede complexe Grösse $x+iy$, *deren Betrag* r *kleiner als* R *ist, und für jeden vorkommenden Werth der Variable* w in ihrem reellen und ihrem imaginären Theil Grössen enthält, die numerisch kleiner sind als der beliebig zu verkleinernde Werth $\dfrac{\mathfrak{B}\left(\frac{r}{R}\right)^q}{1-\frac{r}{R}}$. Aus diesem Grunde ist *die unendlich ausgedehnte Reihe* (16) für die erwähnten Voraussetzungen *convergent.* Dass sie *eine stetige Function der complexen Grösse* $x+iy$ darstellt, folgt aus dem Vorhergehenden. Wir werden jetzt noch den Nachweis hinzufügen, *dass ihr reeller und imaginärer Theil zugleich stetige Functionen der Variable* w *sind.*

Wenn man mit einem von w verschiedenen zulässigen Werthe $w+l$ die Differenz

$$s_{q+t_1}(x+iy, w+l) - s_q(x+iy, w+l) \tag{18}$$

bildet, so liegt ihr reeller und imaginärer Theil ebenfalls numerisch unter der Grösse $\dfrac{\mathfrak{B}\left(\frac{r}{R}\right)^q}{1-\frac{r}{R}}$. Nun hat man für eine Differenz $s_{q+t_1}(x+iy, w+l) - s_{q+t}(x+iy, w)$ wieder den Ausdruck

$$\begin{aligned} &s_q\quad(x+iy, w+l) - s_q(x+iy, w) \\ &+\ s_{q+t_1}(x+iy, w+l) - s_q(x+iy, w+l) \\ &-(s_{q+t}(x+iy, w) \quad - s_q(x+iy, w)). \end{aligned} \tag{19}$$

Die beiden letzten hier auftretenden Differenzen erfüllen die Forderung, dass ihr reeller und imaginärer Theil für eine genügend grosse Zahl q numerisch beliebig klein werden. Wofern von der ersten Differenz für die Voraussetzung, dass der Werth l sich beständig der Null nähert, dasselbe gezeigt werden kann, so gilt dies nach einem mehrfach benutzten Schlusse auch für die in (19) dargestellte Differenz

$$s_{q+t_1}(x+iy, w+l) - s_{q+t}(x+iy, w),$$

und die ausgesprochene Behauptung ist gerechtfertigt. Führt man die erwähnte erste Differenz folgendermassen aus

$$(20)\quad s_q(x+iy, w+l) - s_q(x+iy)$$
$$= (b_0(w+l) - b_0(w)) + (b_1(w+l) - b_1(w))(x+iy) + \ldots$$
$$+ (b_q(w+l) - b_q(w))(x+iy)^q,$$

so sieht man, dass jede der Differenzen $b_0(w+l) - b_0(w)$, $b_1(w+l) - b_1(w), \ldots$ für die Voraussetzung, dass der Werth l sich beständig der Null nähert, beliebig klein werden muss, weil die Coefficienten $b_0(w)$, $b_1(w), \ldots$ stetige Functionen der Variable w sind. Durch die vorher getroffene Wahl ist die Zahl q bestimmt; deshalb wird auch der reelle und der imaginäre Theil der rechten Seite von (20), wo jede der $(q+1)$ Differenzen in eine bestimmte Potenz der complexen Grösse $(x+iy)$ multiplicirt ist, bei abnehmendem l beliebig klein. Das aber sollte bewiesen werden.

§ 109. Addition, Subtraction und Multiplication von unendlichen Summen.

Die Eigenschaft der aus einer endlichen Anzahl von Grössen gebildeten Summen, nach einfachen Vorschriften addirt, subtrahirt und multiplicirt werden zu können, lässt sich unter geeigneten Modificationen auf unendliche Summen übertragen. Es sei, wie in § 105, eine Reihe von reellen Grössen gegeben $c_0, c_1, c_2, \ldots$, und die aus denselben gebildete Summe

$$(1)\qquad s_q = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots c_q$$

convergire bei unendlicher Ausdehnung; es sei ferner eine zweite Reihe von reellen Grössen gegeben $c'_0, c'_1, c'_2, \ldots$, und die aus denselben gebildete Summe

$$(2)\qquad s'_q = c'_0 + c'_1 + c'_n + \ldots c'_q$$

convergire ebenfalls bei unendlicher Ausdehnung. Alsdann verursacht die Anwendung der Operationen des Addirens und des Subtrahirens keine Schwierigkeit. *Wenn man durch Addition der gleichstelligen Glieder der beiden gegebenen Reihen eine neue Reihe*

$$(3)\qquad c_0 + c'_0,\ c_1 + c'_1,\ c_2 + c'_2, \ldots$$

und durch Subtraction der gleichstelligen Glieder der beiden gegebenen Reihen eine zweite neue Reihe

(4) $$c_0 - c'_0,\ c_1 - c'_1,\ c_2 - c'_2, \ldots$$

hervorbringt, so convergirt sowohl die Summe der Reihe (3) *wie auch die Summe der Reihe* (4), *und zwar ist der Grenzwerth der erstern gleich der Summe des Grenzwerthes von* s_q *und des Grenzwerthes von* s'_q, *ferner der Grenzwerth der letztern gleich der Differenz, die durch Subtraction des Grenzwerthes der Summe* s'_q *von dem Grenzwerthe der Summe* s_q *erhalten wird.*

Sobald man für eine beliebig gegebene kleine Grösse ω die Zahl q so gross wählt, dass sowohl die Differenz $s_{q+t} - s_q$ wie auch die Differenz $s'_{q+t} - s'_q$ für jeden Werth der Zahl t numerisch kleiner bleibt als ω, was nach den getroffenen Voraussetzungen möglich ist, so wird sowohl der numerische Werth des Ausdruckes

(5) $$s_{q+t} - s_q + s'_{q+t} - s'_q$$

wie auch der numerische Werth des Ausdruckes

(6) $$s_{q+t} - s_q - s'_{q+t} + s'_q$$

numerisch kleiner als 2ω, mithin beliebig klein bleiben. Die Summe der Reihe (3) und der Reihe (4) werde folgendermassen bezeichnet

(3*) $$S_q = c_0 + c'_0 + c_1 + c'_1 + \ldots + c_q + c'_q,$$

(4*) $$D_q = c_0 - c'_0 + c_1 - c'_1 + \ldots + c_q - c'_q,$$

dann gelten die Gleichungen

(5) $$S_q = s_q + s'_q$$

(6) $$D_q = s_q - s'_q,$$

und der Ausdruck (5) fällt mit der Differenz $S_{q+t} - S_q$, der Ausdruck (6) mit der Differenz $D_{q+t} - D_q$ zusammen. Daher convergirt sowohl die Summe S_q wie auch die Summe D_q bei unendlicher Ausdehnung, und vermöge der Gleichungen (5) und (6) entsteht der Grenzwerth von S_q durch Addition, hingegen der Grenzwerth von D_q durch Subtraction aus den Grenzwerthen von s_q und s'_q, wie behauptet worden war.

Die Ausdehnung der Multiplication auf zwei unendliche Summen erfolgt dadurch, dass vermittelst der Glieder $c_0, c_1, c_2, \ldots$ der ersten Reihe und der Glieder $c'_0, c'_1, c'_2, \ldots$ der zweiten Reihe die folgende Reihe von Grössen dargestellt wird,

$$(7)\qquad \begin{cases} g_0 = c_0\,c'_0 \\ g_1 = c_0\,c'_1 + c_1\,c'_0 \\ g_2 = c_0\,c'_2 + c_1\,c'_1 + c_2\,c'_0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_q = c_0\,c'_q + c_1\,c'_{q-1} + \dots + c_{q-1}\,c'_1 + c_q\,c'_0; \end{cases}$$

das Glied g_q ist ein Aggregat aller derjenigen Producte aus einem Gliede der ersten und einem Gliede der zweiten Reihe, bei denen die Summe der beiden Zeiger der Zahl q gleich ist. Zu der Bedingung, dass die Summe s_q und die Summe s'_q convergiren, wird jetzt noch *die Bedingung hinzugefügt, dass, wofern $\varrho_0, \varrho_1, \dots$ die absoluten Werthe der Grössen $c_0, c_1, \dots$, und $\varrho'_0, \varrho'_1, \dots$ die absoluten Werthe der Grössen $c'_0, c'_1, \dots$ bedeuten, auch die Summe*

$$(8)\qquad \varrho_0 + \varrho_1 + \dots$$

und die Summe

$$(9)\qquad \varrho'_0 + \varrho'_1 + \dots$$

bei unendlicher Ausdehnung convergiren. Unter dieser Voraussetzung ist auch die unendlich ausgedehnte Summe

$$(10)\qquad P_q = g_0 + g_1 + \dots + g_q$$

convergent, und ihr Grenzwerth gleich dem Product der Grenzwerthe von s_q und s'_q.

Das Product der Summe s_q mit der Summe s'_q für einen bestimmten Werth der Zahl q ist gleich der Summe aller Producte aus je einem Gliede der einen und je einem Gliede der andern Summe. Man kann diese Producte so anordnen, dass diejenigen zusammengefasst werden, bei denen die Summe der beiden Zeiger denselben Werth hat, und zwar durchläuft der betreffende Werth die Reihe der Zahlen von 0 bis $2q$. Bei dem Werthe 0 erscheint das eine Product $c_0\,c'_0 = g_0$, bei dem Werthe 1 die Summe der beiden Producte $c_0\,c'_1 + c_1\,c'_0 = g_1$, und so fort bis zu dem Werthe q, bei dem die Summe $c_0\,c'_q + c_1\,c'_{q-1} + \dots + c_{q-1}\,c'_1 + c_q\,c'_q = g_q$ auftritt, der in (7) gegebenen Definition gemäss. Von hier ab erscheinen Summen, welche nur einen Theil der in $g_{q+1}, g_{q+2}, \dots g_{2q}$ enthaltenen Producte umfassen. Es findet sich

$$c_1 c'_q + c_2 c'_{q-1} + \ldots + c_q c'_1 = g_{q+1} - c_0 c'_{q+1} - c_{q+1} c'_0$$
$$c_2 c'_q + c_3 c'_{q-1} + \ldots + c_q c'_2 = g_{q+2} - c_0 c'_{q+2} - c_1 c'_{q+1} - c_{q+1} c'_1 - c_{q+2} c'_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_q c'_q \qquad\qquad = g_{2q} - c_0 c'_{2q} - c_1 c'_{2q-1} \ldots - c_{2q-1} c'_1 - c_{2q} c'_0.$$

Zieht man alle Ausdrücke zusammen, welche auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen zu subtrahiren sind, so entsteht für den Ueberschuss der Summe

$$P_{2q} = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_q + g_{q+1} + \ldots + g_{2q}$$

über das Product $s_q s'_q$ die Darstellung

$$(11) \quad P_{2q} - s_q s'_q = + s_0 c'_{2q} + s_1 c'_{2q-1} + \ldots + s_{q-1} c'_{q+1}$$
$$+ s'_0 c_{2q} + s'_1 c_{2q-1} + \ldots + s'_{q-1} c_{q+1}.$$

Hier sind die absoluten Werthe von $s_0, s_1, \ldots s_{q-1}$ kleiner als die Summe $\varrho_0 + \varrho_1 + \ldots + \varrho_{q-1}$, ferner die absoluten Werthe von $s'_0, s'_1, \ldots s'_{q-1}$ kleiner als die Summe $\varrho'_0 + \varrho'_1 + \ldots + \varrho'_{q-1}$, mithin ist die rechte Seite von (11) numerisch kleiner als der Ausdruck, bei dem statt der Grössen $s_0, s_1, \ldots$ und $s'_0, s'_1, \ldots$ die bezeichneten oberen Grenzen, und statt der andern Factoren ihre absoluten Werthe selbst gesetzt sind,

$$(12) \quad (\varrho_0 + \varrho_1 + \ldots + \varrho_{q-1})\,(\varrho'_{q+1} + \varrho'_{q+2} + \ldots + \varrho'_{2q})$$
$$+ (\varrho'_0 + \varrho'_1 + \ldots + \varrho'_{q-1})\,(\varrho_{q+1} + \varrho_{q+2} + \ldots + \varrho_{2q}).$$

Die Summen (8) und (9) sollen bei unendlicher Ausdehnung convergent sein und gestatten deshalb, vermöge der in § 105 aufgestellten Definition, die Zahl q so gross anzunehmen, dass die Summen

$$\varrho_{q+1} + \varrho_{q+2} + \ldots + \varrho_{2q}$$

und

$$\varrho'_{q+1} + \varrho'_{q+2} + \ldots + \varrho'_{2q}$$

beliebig kleine Werthe erhalten, während die Summen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \ldots + \varrho_{q-1}$$

und

$$\varrho'_0 + \varrho'_1 + \ldots + \varrho'_{q-1}$$

stets unter festen Grössen enthalten bleiben. Aus diesem Grunde bleibt der Werth von (12) ebenfalls beliebig klein, mithin auch der numerische Werth der Differenz $P_{2q} - s_q\, s'_q$. Die Summe P_{2q} ist daher bei unendlicher Ausdehnung convergent, und ihr Grenzwerth stimmt mit dem Product der Grenzwerthe von s_q und s'_q überein, wie behauptet worden war.

Die Summe der Reihe, welche nach der Vorschrift der Gleichungen (7) aus zwei gegebenen Reihen abgeleitet ist, kann auch dann *convergent* sein, *wenn diese beiden Reihen zwar convergente Summen haben, jedoch nicht die Eigenschaft besitzen, dass die absoluten Werthe der einzelnen Glieder convergente Summen liefern. Für die Voraussetzung, dass* s_q, s'_q *und* P_q *bei unendlicher Ausdehnung überhaupt convergiren, gilt aber der Satz, dass der Grenzwerth der unendlich ausgedehnten Summe* P_q *gleich dem Product der Grenzwerthe ist, gegen welche die unendlich ausgedehnte Summe* s_q *und die unendlich ausgedehnte Summe* s'_q *convergiren.*

Der Beweis lässt sich vermittelst der vorhin entwickelten Eigenschaften der Potenzreihen liefern. Es sei x eine unabhängige reelle variable Grösse, die die Werthe von der Null bis zu der positiven Einheit durchläuft. Mit derselben werden die Potenzreihen

(13) $$c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \ldots,$$

(14) $$c'_0 + c'_1\, x + c'_2\, x^2 + \ldots$$

gebildet, aus diesen entsteht durch Anwendung des in den Gleichungen (7) angegebenen Multiplicationsverfahrens die Potenzreihe

(15) $$g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots$$

In der Voraussetzung, dass die Summen s_q, s'_q und P_q bei unendlicher Ausdehnung convergiren, ist nach § 105 die Bedingung mit enthalten, dass sowohl die Grössen $c_0, c_1, \ldots$ wie auch die Grössen $c'_0, c'_1, \ldots$, wie auch die Grössen $g_0, g_1, \ldots$ ihrem absoluten Werthe nach stets unter einer festen Grösse bleiben. Daher ergiebt sich aus dem Satze (III) des § 107 bei der Annahme $R = 1$, dass für jeden positiven unter der Einheit befindlichen Werth der Variable x sowohl die Summe (13) wie auch die Summe (14) convergiren, und dass für den gleichen Umfang der Variable x auch die mit den absoluten Werthen der einzelnen Glieder gebildeten Summen

(13*) $$\varrho_0 + \varrho_1\, x + \varrho_2\, x^2 + \ldots,$$

(14*) $$\varrho'_0 + \varrho'_1\, x + \varrho'_2\, x^2 + \ldots$$

convergiren. In Folge des zuletzt bewiesenen Satzes ist also für die Voraussetzung $0 < x < 1$ der Grenzwerth der convergen-

ten Summe (15) gleich dem Product des Grenzwerthes der Summe (13) und des Grenzwerthes der Summe (14). Nun lehrt uns die im vorigen § mit der Summe (4) angestellte Betrachtung, indem der Werth $x = 1$ angenommen wird, dass die Summe einer nach den positiven Potenzen der Variable x geordneten Reihe, die für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$, den letztern Werth eingeschlossen, convergirt, eine Function der Variable x darstellt, die für diesen ganzen Bereich der Variable x, den Werth $x = 1$ eingeschlossen, stetig ist. Weil also die Summen s_q, s'_q und P_q convergent sind, so drücken sowohl die Summe (13) wie auch die Summe (14), wie auch die Summe (15) Functionen der Variable x aus, die für alle Werthe der Variable x von Null an bis zu der Einheit, diese selbst eingeschlossen, vollständig bestimmt und stetig sind. Da ferner festgestellt ist, dass für einen jeden unter der Einheit liegenden Werth von x der Grenzwerth der Summe (15) gleich dem Product des Grenzwerthes der Summe (13) und des Grenzwerthes der Summe (14) ist, und da jeder dieser Grenzwerthe sich stetig verhält, das heisst, sich um beliebig wenig ändert, sobald die Variable x von einem beliebig wenig unter der Einheit liegenden Werthe zu der Einheit selbst übergeht, so gilt die abgeleitete Gleichung auch für die Voraussetzung, dass der Werth x gleich der Einheit selbst wird, wodurch sich die Summe (13) in den Grenzwerth von s_q, die Summe (14) in den Grenzwerth von s'_q, die Summe (15) in den Grenzwerth von P_q verwandelt; mithin ist der Grenzwerth der Summe P_q gleich dem Product der Grenzwerthe der Summe s_q und der Summe s'_q. Das aber sollte bewiesen werden.

Reihen, deren Glieder complexe Grössen sind und deren Summen bei unendlicher Ausdehnung convergiren, können in entsprechender Weise durch Addition, Subtraction und Multiplication verbunden werden, und aus den so eben für Reihen mit reellen Gliedern bewiesenen Sätzen folgen für jene Reihen gleichartige Sätze. Man habe, indem in den einzelnen Gliedern von zwei gegebenen Reihen das Reelle vom Imaginären getrennt wird,

$$(16) \qquad s_q = (c_0 + i\,d_0) + (c_1 + i\,d_1) + \ldots + (c_q + i\,d_q),$$

$$(17) \qquad s'_q = (c'_0 + i d'_0) + (c'_1 + i d'_1) + \ldots + (c'_q + i d'_q),$$

dann bedarf die Anwendung der Addition und der Subtraction keiner Erörterung. Für die Anwendung der Multiplication folgt aus dem Schema der Gleichungen (7) das Schema

$$(18)\quad \begin{cases} g_0+ih_0=(c_0+id_0)(c'_0+id'_0) \\ g_1+ih_1=(c_0+id_0)(c'_1+id'_1)+(c_1+id_1)(c'_0+id'_0) \\ \cdot\;\cdot \\ g_q+ih_q=(c_0+id_0)(c'_q+id'_q)+(c_1+id_1)(c'_{q-1}+id'_{q-1})+\,.. \\ \qquad\qquad +(c_q+id_q)(c'_0+id'_0). \end{cases}$$

Hier liefert die Trennung des Reellen vom Imaginären die Relationen

$$(19)\qquad g_q=c_0\,c'_q+\ldots+c_q\,c'_0-(d_0\,d'_q+\ldots+d_q\,d'_0),$$

$$(20)\qquad h_q=c_0\,d'_q+\ldots+c_q d'_0+(d_0\,c'_q+\ldots+d_q\,c'_0).$$

Da also jede Grösse g_q gleich der Differenz von zwei Ausdrücken und jede Grösse h_q gleich der Summe von zwei andern Ausdrücken ist, welche vier Ausdrücke nach einander entstehen, indem das Multiplicationsverfahren auf die Combination von jeder der beiden in s_q enthaltenen reellen Reihen $c_0+c_1+\ldots$ und $d_0+d_1+\ldots$ mit jeder der beiden in s'_q enthaltenen reellen Reihen $c'_0+c'_1+\ldots$ und $d'_0+d'_1+\ldots$ angewendet wird, so leuchtet ein, dass, wenn die reellen Theile der Glieder von s_q und die imaginären Theile der Glieder von s_q, absolut genommen, convergente Summen liefern und wenn für s'_q dasselbe gilt, die Summe $(g_0+ih_0)+(g_1+ih_1)+\ldots$ bei unendlicher Ausdehnung convergirt und gleich dem Product der Grenzwerthe von s_q und s'_q sein muss. Ebenso überzeugt man sich durch eine Betrachtung, wie sie vorhin für reelle Reihen benutzt worden ist, dass, wenn s_q, s'_q und die Summe $(g_0+ih_0)+(g_1+ih_1)+\ldots$ bei unendlicher Ausdehnung convergiren, der Grenzwerth der letztern Summe nothwendig gleich dem Producte der Grenzwerthe von s_q und s'_q ist.

Wenn bei einer Reihe von complexen Grössen sowohl die Summe der reellen Theile, absolut genommen, wie auch die Summe der imaginären Theile, absolut genommen, convergirt, so convergirt auch die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Glieder, und wenn die letztgenannte Summe convergirt, so convergirt auch jede der beiden zuerst genannten Summen.

Diese Thatsache hat in dem Umstande ihren Grund, dass bei jeder complexen Grösse $c + di$ der absolute Betrag $\sqrt{c^2 + d^2}$ kleiner oder höchstens ebenso gross ist wie die Summe der absoluten Werthe der Grösse c und der Grösse d, und dass der absolute Werth von jeder dieser letztern kleiner oder höchstens ebenso gross ist wie der Betrag $\sqrt{c^2 + d^2}$.

§ 110. Kennzeichen für die Convergenz unendlicher Producte.

Für die unendlichen Producte, deren Convergenz jetzt untersucht werden soll, wird vorausgesetzt, dass, nachdem ihre Factoren k_0, $k_1, \ldots$ in die Gestalt gesetzt sind

$$(1) \qquad k_0 = 1 + e_0,\ k_1 = 1 + e_1, \ldots$$

die reellen Grössen $e_0, e_1, \ldots$ von einem bestimmten Zeiger ab sämmtlich entweder das positive Vorzeichen oder das negative Vorzeichen behalten und numerisch kleiner als die Einheit bleiben. Dass eine der Grössen $k_0, k_1, \ldots$ gleich Null sei, ist schon bei der Definition (II) in § 105 ausgeschlossen. Unter diesen Beschränkungen gelten die folgenden Sätze:

(I) *Wenn die aus den Grössen $e_0, e_1, \ldots$ gebildete Summe bei unendlicher Ausdehnung convergirt, so convergirt auch bei unendlicher Ausdehnung das Product $p_q = (1 + e_0)(1 + e_1) \ldots (1 + e_q)$ gegen einen festen von der Null verschiedenen Grenzwerth.*

(II) *Wenn die Grössen $e_0, e_1, \ldots$ von einer bestimmten Stelle ab sämmtlich positiv sind, und die aus denselben gebildete Summe bei unendlicher Ausdehnung über jede positive Grösse hinaus zunimmt, so wächst auch der numerische Werth des Products $p_q = (1 + e_0)(1 + e_1) \ldots (1 + e_q)$ bei unendlicher Ausdehnung über jedes Mass.*

(III) *Wenn die Grössen $e_0, e_1, \ldots$ von einer bestimmten Stelle ab sämmtlich negativ sind, und die aus denselben gebildete Summe bei unendlicher Ausdehnung numerisch ohne Ende wächst, so convergirt das Product $p_q = (1 + e_0)(1 + e_1) \ldots (1 + e_q)$ bei unendlicher Ausdehnung gegen den Grenzwerth Null.*

Wir erörtern zuerst die Annahme, dass die Grössen $e_0, e_1, \ldots$ von einem bestimmten Zeiger ab *sämmtlich negativ* seien und

drücken dieselben beziehungsweise durch die absoluten Werthe $E_0, E_1, \ldots$ aus, die unter der Einheit liegen. Dann folgt vermöge einer Betrachtung, welche der schon in § 19 angewendeten ähnlich ist, dass, wenn q grösser ist als jener Zeiger, das Product von zwei Factoren

$$(1-E_{q+1})(1-E_{q+2}) = 1 - E_{q+1} - E_{q+2} + E_{q+1}E_{q+2}$$

einen grössern Werth hat, als $1 - E_{q+1} - E_{q+2}$. Es sei die Summe $E_{q+1} + E_{q+2} + \ldots + E_{q+t}$ für jeden Werth der Zahl t gleich einer unter der Einheit liegenden Grösse, so ist zunächst $E_{q+1} + E_{q+2} < 1$; das Verfahren kann nun auf das Product $(1 - E_{q+1} - E_{q+2})(1 - E_{q+3})$ angewendet und fortgesetzt werden, und seine Wiederholung ergiebt die Ungleichheit

$$(2) \quad (1-E_{q+1})(1-E_{q+2})\ldots(1-E_{q+t}) > 1 - E_{q+1} - E_{q+2} - \ldots - E_{q+t}.$$

Bei der Voraussetzung des Satzes (I), dass die unendliche Summe $e_0 + e_1 + \ldots$ convergire, lässt sich die Zahl q so gross annehmen, dass die Summe $E_{q+1} + E_{q+2} + \ldots + E_{q+t}$ nicht nur kleiner als die Einheit, sondern auch kleiner als eine beliebig kleine gegebene Grösse ω bleibt. Das auf der linken Seite von (2) befindliche Product, welches mit dem Ausdrucke $\frac{p_{q+t}}{p_q}$ bezeichnet werden darf, besteht aus lauter positiven Factoren, die unter der Einheit liegen, und hat deshalb selbst einen unter der Einheit liegenden Werth. Dasselbe ist aber gleichzeitig grösser als die Grösse $1 - \omega$, und weicht deshalb von der Einheit um weniger als um die Grösse ω ab. Hiernach folgt aus der Voraussetzung des Satzes (I), *wofern die Grössen* $e_{q+1}, e_{q+2} \ldots$ *sämmtlich negativ sind*, die in § 105 aufgestellte Bedingung für die Convergenz des Products p_q, und zwar ist der Grenzwerth desselben von der Null verschieden, weil das mit einem bestimmten angemessen gewählten Werthe der Zahl q gebildete Product p_q aus lauter Factoren besteht, von denen kein einzelner gleich Null ist.

Für die Voraussetzung des Satzes (III), welche sich so aussprechen lässt, dass die Summe

$$-e_{q+1} - e_{q+2} - \ldots - e_{q+t} = E_{q+1} + E_{q+2} + \ldots + E_{q+t}$$

bei wachsendem t jede gegebene Grösse übertreffe, kann man,

da $1-E_{q+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{E_{q+1}}{1-E_{q+1}}}$ ist, u. s. f., den reciproken Werth des Products (2) in die Gestalt bringen

$$(3)\qquad \left(1+\frac{E_{q+1}}{1-E_{q+1}}\right)\left(1+\frac{E_{q+2}}{1-E_{q+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{E_{q+t}}{1-E_{q+t}}\right).$$

In jedem der auftretenden Factoren wird zu der Einheit eine positive Grösse addirt. Folglich bringt die oben erwähnte Schlussweise des § 19 unmittelbar die Ungleichheit hervor

$$(4)\qquad \left(1+\frac{E_{q+1}}{1-E_{q+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{E_{q+t}}{1-E_{q+t}}\right)$$
$$>1+\frac{E_{q+1}}{1-E_{q+1}}+\frac{E_{q+2}}{1-E_{q+2}}+\cdots+\frac{E_{q+t}}{1-E_{q+t}}.$$

Da nun die Summe $\dfrac{E_{q+1}}{1-E_{q+1}}+\dfrac{E_{q+2}}{1-E_{q+2}}+\cdots+\dfrac{E_{q+t}}{1-E_{q+t}}$ aus lauter positiven Gliedern besteht, die grösser sind als die betreffenden Glieder der Summe $E_{q+1}+E_{q+2}+\ldots+E_{q+t}$, und da der Werth der letztern mit der Zahl t über jedes Mass hinaus wächst, so hat um so mehr die erstere und gewiss das Product auf der linken Seite von (4) diese Eigenschaft. Dasselbe ist gleich dem in die Einheit dividirten Werthe des Quotienten $\dfrac{p_{q+t}}{p_q}$, das ist gleich dem Quotienten $\dfrac{p_q}{p_{q+t}}$; das endlose Wachsen desselben bewirkt aber, dass das Product p_{q+t} gegen die Null convergiren muss, womit der Satz (III) bewiesen ist.

Es bleibt jetzt die Discussion der zweiten Annahme, nach welcher die Grössen $e_0, e_1, \ldots$ von einem bestimmten Zeiger ab *sämmtlich positiv* sein sollen. Das Product

$$(5)\qquad (1+e_{q+1})(1+e_{q+2})\ldots(1+e_{q+t}),$$

bei dem wieder q grösser ist als der betreffende Zeiger, enthält alsdann lauter positive Factoren, die über der Einheit liegen, und hat deshalb ebenfalls einen positiven über der Einheit liegenden Werth. Mit Hülfe der Umformung

$$1+e_{q+1}=\frac{1}{1-\dfrac{e_{q+1}}{1+e_{q+1}}},$$

die auf alle Factoren zu übertragen ist, erhält der reciproke Werth des Products (5) den Ausdruck

$$(6)\qquad \left(1-\frac{e_{q+1}}{1+e_{q+1}}\right)\left(1-\frac{e_{q+2}}{1+e_{q+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{e_{q+t}}{1+e_{q+t}}\right).$$

In jedem Factor wird von der Einheit eine positive unter der Einheit befindliche Grösse abgezogen, und dabei hat die Summe

$$\frac{e_{q+1}}{1+e_{q+1}}+\frac{e_{q+2}}{1+e_{q+2}}+\cdots+\frac{e_{q+t}}{1+e_{q+t}}$$

einen kleinern Werth als die Summe

$$e_{q+1}+e_{q+2}+\cdots+e_{q+t},$$

welche, sobald die Voraussetzung des Satzes (I) in Kraft tritt, für einen hinreichend grossen Werth von q bei jedem Werthe der Zahl t kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine gegebene Grösse ω. Unter der Voraussetzung des Satzes (I) findet daher alles, was vorhin in Betreff des Products (2) nachgewiesen ist, auf das Product (6) Anwendung, das heisst, der Werth des letztern bleibt bei der über die Zahl q getroffenen Verfügung stets grösser als der Werth $1-\omega$. Mithin bleibt das Product (5), welches gleich dem Quotienten $\frac{p_{q+t}}{p_q}$ und gleich dem reciproken Werthe des Products (6) ist, stets kleiner als der Werth $\frac{1}{1-\omega}$. Da nun nach einer eben gemachten Bemerkung der Quotient $\frac{p_{q+t}}{p_q}$ grösser als die Einheit ist, so liegt derselbe zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{1-\omega}$, und unterscheidet sich deshalb für einen beliebig kleinen Werth der Grösse ω von der Einheit um beliebig wenig. Also ist gegenwärtig aus der Voraussetzung des Satzes (I), *wofern die Grössen* $e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots$ *sämmtlich positiv sind*, die Convergenz des Products p_q abgeleitet, während der Grenzwerth aus demselben Grunde, der oben bezeichnet ist, nicht die Null sein kann.

Die Voraussetzung des Satzes (II), dass die Summe $e_{q+1}+e_{q+2}+\cdots+e_{q+t}$ bei stets zunehmendem t jede gegebene

Grösse überschreitet, hat zur Folge, dass das Product (5) ebenfalls über jedes Mass hinaus wächst, weil nach dem wiederholt benutzten Motiv für das letztere Product die Ungleichheit

(7) $(1+e_{q+1})(1+e_{q+2})\,..\,(1+e_{q+t})>1+e_{q+1}+e_{q+2}+\ldots+e_{q+t}$

besteht. Auf diese Weise sind jetzt die Sätze (I), (II), (III) vollständig bewiesen.

Die allgemeine Lehre von den unendlichen Summen und Producten verfolgen wir an dieser Stelle nicht weiter, machen aber darauf aufmerksam, dass eine Fortsetzung des hier Mitgetheilten in der Abhandlung von *Gauss: disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma\;(\gamma+1)}x^2+\,..$ und in der Abhandlung von *Weierstrass: Ueber die Theorie der analytischen Facultäten*, *Crelle*'s Journal für Mathematik Bd. 51, pag. 1 enthalten ist. Von der letztern Abhandlung rührt auch der Inhalt des gegenwärtigen § her.

§ 111. Anwendungen.

Die Summe der reciproken Werthe der auf einander folgenden natürlichen Zahlen hat, wie in § 105 gezeigt worden ist, die Eigenschaft, bei wachsender Gliederzahl jede gegebene Grösse zu übertreffen. Wenn man dagegen die auf einander folgenden natürlichen Zahlen auf einen bestimmten die Einheit übertreffenden Exponenten $1+\sigma$ erhebt, und dann die Summe der reciproken Werthe bildet, so entsteht die convergente Summe

(1) $$\frac{1}{1^{1+\sigma}}+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\frac{1}{3^{1+\sigma}}+\ldots$$

Um die Convergenz zu beweisen, theilen wir die Zahlen in ähnlicher Weise mittelst der Potenzen der Zahl Zwei ein, wie in § 105, fassen sie aber anders zusammen. Offenbar ist jede der zwei Grössen $\frac{1}{2^{1+\sigma}}$ und $\frac{1}{3^{1+\sigma}}$ kleiner oder gleich $\frac{1}{2^{1+\sigma}}$, mithin ihre Summe kleiner als $\frac{2}{2^{1+\sigma}}=\frac{1}{2^{\sigma}}$, jede der vier Grössen $\frac{1}{4^{1+\sigma}}$, $\frac{1}{5^{1+\sigma}}$, $\frac{1}{6^{1+\sigma}}$, $\frac{1}{7^{1+\sigma}}$ kleiner oder gleich $\frac{1}{4^{1+\sigma}}$, mithin ihre Summe kleiner als $\frac{4}{4^{1+\sigma}}=\frac{1}{4^{\sigma}}$, u. s. f.

Demnach bestehen für irgend zwei Zahlen λ und μ, von denen μ die grössere ist, die Ungleichheiten

$$(2)\quad 1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\frac{1}{3^{1+\sigma}}+\ldots+\frac{1}{(2^{\lambda}-1)^{1+\sigma}}<1+\frac{1}{2^{\sigma}}+\frac{1}{4^{\sigma}}+\ldots+\frac{1}{(2^{\lambda-1})^{\sigma}},$$

$$(3)\quad \frac{1}{(2^{\lambda})^{1+\sigma}}+\frac{1}{(2^{\lambda}+1)^{1+\sigma}}+\ldots+\frac{1}{(2^{\mu}-1)^{1+\sigma}}<\frac{1}{(2^{\lambda})^{\sigma}}+\ldots+\frac{1}{(2^{\mu-1})^{\sigma}}.$$

Auf der rechten Seite von beiden Ungleichheiten befinden sich geometrische Reihen, von denen wir die zweite durch den Ausdruck summiren

$$(4)\qquad \frac{\dfrac{1}{(2^{\lambda})^{\sigma}}-\dfrac{1}{(2^{\mu})^{\sigma}}}{1-\dfrac{1}{2^{\sigma}}}.$$

Da σ eine feste gegebene positive Grösse bedeutet, so liegt der Werth $\frac{1}{2^{\sigma}}$ unter der Einheit, und der Werth (4) ist kleiner als der Werth

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{1}{2^{\lambda\sigma}}}{1-\dfrac{1}{2^{\sigma}}}.$$

Zugleich kann bei dem letztern die Zahl λ so gross gewählt werden, dass derselbe kleiner wird als jede beliebig kleine gegebene Grösse. Für einen solchen Werth der Zahl λ hat deshalb die auf der linken Seite von (3) befindliche Summe $\frac{1}{(2^{\lambda})^{1+\sigma}}+\frac{1}{(2^{\lambda}+1)^{1+\sigma}}+\ldots+\frac{1}{(2^{\mu}-1)^{1+\sigma}}$ die Eigenschaft, beliebig klein zu werden, wie auch immer die Zahl μ gewählt werden möge. Die Zahl μ kann man aber so gross annehmen, dass die Potenz 2^{μ} grösser ausfällt als jede gegebene ganze Zahl n. Weil also bei der angegebenen Wahl der Zahl λ die beliebig weit fortgesetzte Summe $\frac{1}{(2^{\lambda})^{1+\sigma}}+\frac{1}{(2^{\lambda}+1)^{1+\sigma}}+\ldots.$ einen beliebig kleinen Werth behält, so ist die unendlich ausgedehnte Summe (1), bei der σ einen festen positiven Werth hat, in der That convergent.

Vermöge des Umstandes, dass die Summe (1) für ein gegebenes positives σ convergirt, dagegen für $\sigma=0$ nicht conver-

girt, liefert uns die betreffende Reihe Beispiele für die drei im vorigen § aufgestellten Sätze. Es sei α eine beliebige positive Grösse, so haben die Glieder der durch Multiplication mit α entstehenden Reihe

$$(6) \qquad \frac{\alpha}{1^{1+\sigma}},\ \frac{\alpha}{2^{1+\sigma}},\ \frac{\alpha}{3^{1+\sigma}},\ldots$$

für jedes positive σ wie auch für $\sigma=0$ die Beschaffenheit, von einem bestimmten Zeiger ab kleiner als die Einheit und positiv zu sein; ihre Summe convergirt, so lange σ positiv ist, und convergirt nicht für $\sigma=0$. Die entsprechende Beschaffenheit einer Reihe, bei der die sämmtlichen Glieder gleich den negativen Werthen der respectiven Glieder von (6) sind, ergiebt sich von selbst. Mithin folgen aus den drei Sätzen des vorigen § die Resultate:

Das unendliche Product $\left(1+\frac{\alpha}{1^{1+\sigma}}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2^{1+\sigma}}\right)\left(1+\frac{\alpha}{3^{1+\sigma}}\right)\ldots$ *und das unendliche Product* $\left(1-\frac{\alpha}{1^{1+\sigma}}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2^{1+\sigma}}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3^{1+\sigma}}\right)\ldots$, *wo* α *eine positive Grösse und* σ *eine positive Grösse bedeutet, sind convergent, und jeder der beiden Grenzwerthe ist von der Null verschieden.*

Das unendliche Product $\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)\ldots$, *wo* α *eine positive Grösse bedeutet, convergirt gegen die Null.*

Das unendliche Product $\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)\ldots$, *wo* α *eine positive Grösse bedeutet, wächst über jedes Mass hinaus.*

Capitel II.

Potenzreihen zur Entwickelung von fundamentalen Functionen der Analysis.

§ 112. Aufstellung der Binominalreihe und der Exponentialreihe.

Nachdem erkannt worden ist, dass die Summe einer unendlichen nach den positiven Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitenden Reihe eine Function der Variable x darzustellen vermag, wird es wünschenswerth, zu beurtheilen,

ob für eine bestimmte gegebene Function einer Variable x eine solche Darstellung möglich sei, und falls dieselbe möglich ist, sie ausführen zu können. Allein die Mittel zu der Lösung dieser allgemeinen Aufgabe stehen gegenwärtig nicht in unserer Gewalt. Wir werden vielmehr, indem wir eine beschränkte Aufgabe wählen, den umgekehrten Weg einschlagen, und von der Betrachtung gewisser Potenzreihen, die eine fundamentale Bedeutung in der Analysis gewonnen haben, ausgehend, die Functionen aufsuchen, welche durch die Reihen dargestellt werden. An dieser Stelle möge auch erwähnt werden, dass häufig, wo von der unendlich ausgedehnten Summe einer Reihe gesprochen werden soll und keine Verwechselung zu befürchten ist, die unendliche Reihe genannt wird, und dass namentlich statt des Ausdruckes, die unendlich ausgedehnte Summe einer Reihe sei convergent, der Ausdruck gebräuchlich ist, dass die unendliche Reihe convergent sei.

Vor der Aufstellung der ersten von den zu erörternden Potenzreihen bemerken wir, dass, nachdem in der neueren Analysis die Formulirung mathematischer Sätze durch bestimmte Zeichen Eingang gefunden hat, der Fortschritt sehr häufig mit der Frage zusammenhängt, ob ein unter einer bestimmten Voraussetzung abgeleiteter Satz noch gültig bleibe, wofern einem in dem Ausdrucke des Satzes vorkommenden Zeichen eine Bedeutung beigelegt wird, die in der ursprünglichen Voraussetzung nicht enthalten ist.

In § 46 ist die *Entwickelung einer beliebigen positiven ganzen Potenz eines Binoms*, oder der *binomische Lehrsatz* abgeleitet, und später vielfach benutzt worden. Für die positive ganze $n$te Potenz des Binoms $(1+z)$ hat der binomische Lehrsatz die Gestalt

$$(1)\quad (1+z)^n = 1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2+\dots \\ +\frac{n(n-1)(n-2)..(n-q+1)}{1.2.3\dots q}z^q+\dots+z^n,$$

und gilt in Bezug auf jeden reellen oder complexen Werth der Grösse z. Die Coefficienten der auf einander folgenden positiven Potenzen der Grösse z sind unter der Voraussetzung, welche der Deduction zu Grunde liegt, dass n eine positive ganze

Zahl sei, gleich positiven ganzen Zahlen, wie an der erwähnten Stelle hervorgehoben ist. Die Ausdrücke der auf einander folgenden Coefficienten

$$(2)\quad 1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1.2},\ldots\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots.q},\ldots$$

behalten aber auch dann einen bestimmten Sinn, wenn das Zeichen n *die Bedeutung einer beliebigen bestimmten reellen Grösse* erhält; sie werden *rationale ganze Functionen der Grösse* n. Nur zeigt sich sogleich der Unterschied, dass das Product $n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)$, welches den Zähler ausmacht, für keinen Werth von n, der nicht gleich einer positiven ganzen Zahl ist, jemals gleich Null wird, während dasselbe für den Fall, dass n gleich einer positiven ganzen Zahl ist, verschwindet, sobald die positive ganze Zahl q den Werth $n+1$ oder irgend einen Werth annimmt, der grösser als $n+1$ ist. Demnach liefern die Ausdrücke (2) eine Reihe von Grössen, die nothwendig *abbricht, wofern n gleich einer positiven ganzen Zahl ist*, die dagegen *ohne Ende fortschreitet, sobald n nicht gleich einer positiven ganzen Zahl ist.* Wenn man daher unter der Voraussetzung, dass n gleich einer bestimmten reellen Grösse, aber nicht gleich einer positiven ganzen Zahl sei, die Ausdrücke (2) zu den Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen einer Grösse z macht, so entsteht *die ins Unendliche fortzusetzende Reihe*

$$(3)\quad 1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}z^q+\ldots,$$

welche *die Binomialreihe* genannt wird.

Newton hat diese unendliche Reihe zuerst aufgestellt und erkannt, dass sie zu der Darstellung der Grösse $(1+z)^n$ dienen kann. Den Beleg bildet der Brief *Newton*'s an *Oldenburg* vom 13. Juni 1676, der in § 19 angeführt worden ist. Im Folgenden wird untersucht werden, wann die Summe der unendlichen Reihe (3) convergire, und für diese Voraussetzung ihr Werth bestimmt werden.

Eine andere fundamentale Reihe der Analysis entsteht dadurch, dass in jedem einzelnen Gliede der Reihe (3) die Grösse z durch die Grösse $\frac{z}{n}$ ersetzt, und statt jedes nunmehr erhaltenen Coefficienten einer Potenz von z der Grenzwerth genom-

men wird, dem sich der bezügliche Coefficient für ein über jedes Mass hinaus wachsendes n nähert. Aus den auf einander folgenden Gliedern

$$(4)\qquad \frac{nz}{n},\ \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{z}{n}\right)^2, \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}\left(\frac{z}{n}\right)^q, \ldots$$

werden, da der Zähler des numerischen Bruches soviel Factoren als der Potenzexponent Einheiten enthält, respective die Ausdrücke

$$(4^*)\qquad \frac{z}{1},\ \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}z^2, \ldots \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{q-1}{n}\right)}{1.2.3\ldots q}z^q.$$

Hier nähern sich die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{q-1}{n}$, bei denen die Zähler fest bleiben, jedoch der Nenner n über jedes Mass hinaus wächst, der Null, mithin nähern sich die Zähler der bei den Potenzen der Grösse z auftretenden Coefficienten sämmtlich der Einheit. Daher ergiebt das mit den einzelnen Gliedern der unendlichen Reihe (3) auszuführende Verfahren die unendliche Reihe

$$(5)\qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{z^q}{1.2.3\ldots q}+\ldots$$

Sie heisst *die Exponentialreihe.* Es empfiehlt sich, die Erörterung der Convergenz und die Werthbestimmung bei dieser Reihe früher vorzunehmen, als bei der Binomialreihe. Die Behandlung wird sich der Untersuchung *Abel*'s über die Binomialreihe anschliessen, die in der Gesammtausgabe seiner Werke Bd. I, pag. 66, und in *Crelle*'s Journal für Mathematik Bd. 1, pag. 311 erschienen ist, und die über die Theorie der Reihen ein neues Licht verbreitet hat.

§. 113. Untersuchung der Exponentialreihe.

Es sei R ein beliebiger bestimmter reeller positiver Werth. Setzt man in der zu untersuchenden Reihe

$$(1)\qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots+\frac{z^q}{1.2.3\ldots q}+\ldots$$

die Variable z gleich R, so ergiebt sich die Reihe

$$(2)\qquad 1+\frac{R}{1}+\frac{R^2}{1.2}+\ldots+\frac{R^q}{1.2.3\ldots q}+\ldots,$$

deren Summe bei unendlicher Ausdehnung nach dem Satze (II)

des § 106 convergirt. Die Glieder der dortigen Reihe (1) verwandeln sich in die Glieder der vorliegenden, indem jede der Grössen ε_0, $\varepsilon_1, \ldots$ gleich der Einheit, ferner $\varrho_0 = 1$, $\varrho_1 = \frac{R}{1}$, und allgemein $\varrho_t = \frac{R^t}{1.2.3\ldots t}$ gesetzt wird. Der Quotient $\frac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}$ bekommt dadurch den Werth $\frac{R}{t+1}$; da aber die Grösse R fest angenommen ist, dagegen der Nenner $t+1$ mit wachsender Zahl t fortdauernd wächst, so nimmt der Werth $\frac{R}{t+1}$ stets ab, und nähert sich *der Null als Grenze*, wie gross auch immer die Grösse R gewählt sein möge. Weil nun die im Satze (II) des § 106 bezeichnete Summe convergirt, wofern der Quotient $\frac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}$ sich einer unter der Einheit liegenden Grenze nähert, und weil diese Bedingung bei der obigen Reihe (2) erfüllt ist, so muss deren Summe convergent sein.

Wenn die Variable z gleich einer beliebigen bestimmten reellen negativen Grösse $-R$ genommen wird, kann die Convergenz durch die gleichen Schlüsse bewiesen werden. Die Zurückführung auf den Satz (II) des § 106 erfolgt dadurch, dass man die dortigen Grössen ε_0, $\varepsilon_1, \ldots$ durch die Gleichungen $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$, allgemein $\varepsilon_t = (-1)^t$ bestimmt. Die Glieder der Reihe haben jetzt abwechselnd das positive und das negative Vorzeichen. Nimmt man die absoluten Werthe der einzelnen Glieder, so geht die Reihe hervor, die aus (1) durch die Bestimmung $z = R$ erhalten wurde, und deren Convergenz so eben festgestellt ist. *Die Summe der unendlichen Reihe* (1) *convergirt mithin für jeden beliebigen bestimmten reellen Werth der Variable z, und die Summe der absoluten Werthe der einzelnen Glieder convergirt ebenfalls.*

Wir substituiren in (1) statt der Variable z eine beliebige bestimmte complexe Grösse $x + iy$, wodurch sich (1) in die Reihe

$$(3) \qquad 1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x+iy)^q}{1.2.3\ldots q} + \ldots$$

verwandelt. Welche bestimmten reellen Werthe die in die com-

plexe Grösse $x + iy$ eingehenden reellen Grössen x und y auch empfangen mögen, stets muss der absolute Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ eine bestimmte positive Grösse sein, und man kann deshalb zweifellos eine andere bestimmte positive Grösse R angeben, welche grösser ist als die Grösse r. Die Summe der Reihe (2) convergirt für jeden bestimmten positiven Werth R, mithin liegen die einzelnen Glieder derselben unter einer festen Grösse. Deshalb sind für die vorliegende Reihe (3) die Bedingungen befriedigt, welche der Satz (III) des § 107 vorschreibt, und ihre Summe convergirt. *Die Reihe* (3) *besitzt demnach die ausgezeichnete Eigenschaft, für jeden beliebigen bestimmten Werth der complexen Grösse* $x + iy$ *eine convergente Summe zu haben.*

Die auf einander folgenden Glieder der Reihe (3) liefern die absoluten Beträge $1, \frac{r}{1}, \frac{r^2}{1.2}, \frac{r^3}{1.2.3}, \ldots$, deren Summe $1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1.2} + \ldots$ sich von der Summe (2) dem Wesen nach nicht unterscheidet und deshalb für jedes bestimmte r convergirt. *Folglich convergirt vermöge einer am Schlusse des* § 107 *gemachten Bemerkung sowohl der reelle wie der imaginäre Theil der Summe* (3) *auch dann noch, wenn in jedem derselben statt der einzelnen Glieder ihre absoluten Werthe genommen werden.*

In § 108 ist nachgewiesen worden, dass die daselbst mit (10) bezeichnete Summe

$$s_q(x + iy) = b_0 + b_1(x + iy) + b_2(x + iy)^2 + \ldots b_q(x + iy)^q$$

bei unendlicher Ausdehnung für alle complexen Grössen $x + iy$, deren absoluter Betrag r kleiner ist als eine positive Grösse R, eine stetige Function von $x + iy$ darstellt, wofern der absolute Werth der sämmtlichen Grössen

$$b_0, b_1 R, b_2 R^2, \ldots$$

beständig unter einer gewissen festen Grösse liegt. Vorhin hat sich gezeigt, dass in Bezug auf die gegenwärtig zu discutirende Reihe (1) für jede beliebige bestimmte Grösse R diese Bedingung erfüllt ist. Man kann also bei jeder beliebigen bestimmten complexen Grösse $x + iy$ eine bestimmte reelle Grösse R zu Hülfe nehmen, unter welcher der absolute Betrag r der Grösse $x + iy$ enthalten ist. *Aus diesem Grunde stellt die Reihe* (3)

für jeden bestimmten Werth der complexen Grösse $x+iy$ eine stetige Function der complexen Grösse $x+iy$ dar. Diese Function werden wir durch das Zeichen $\Phi(x+iy)$ andeuten, und insofern die complexe Grösse $x+iy$ mit z notirt wird, durch das Zeichen $\Phi(z)$.

Eine charakteristische Eigenschaft der Reihe (1) findet sich, sobald man zwei Reihen, bei denen die Werthe des Arguments z beliebig gewählt sind, mit einander multiplicirt. Werden zwei beliebige bestimmte reelle Argumente $z=x$ und $z'=x'$ genommen, so folgt nach § 109 aus dem vorhin hervorgehobenen Umstande, dass für beide Reihen die absoluten Werthe der einzelnen Glieder convergente Summen liefern, das Resultat, dass die Summe der durch die Multiplication erzeugten Reihe convergirt. Wenn zwei beliebige bestimmte complexe Argumente $z=x+iy$ und $z'=x'+iy'$ gewählt werden, so ist nach demselben § aus der vorhin erwiesenen Thatsache, dass in jeder der beiden Reihen sowohl die Glieder des reellen Theiles wie auch die Glieder des imaginären Theiles, absolut genommen, convergente Summen haben, zu schliessen, dass die Summe der durch die Multiplication hervorgebrachten Reihe ebenfalls convergirt. Die Gleichungen (7) des § 109 geben für die Glieder der Reihe, welche durch die Multiplication der beiden Summen

$$\Phi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^q}{1.2\ldots q}+\ldots,$$

$$\Phi(x')=1+\frac{x'}{1}+\frac{x'^2}{1.2}+\ldots+\frac{x'^q}{1.2.3\ldots q}+\ldots$$

entsteht, die Ausdrücke

$$(4)\qquad 1,\ \frac{x'}{1}+\frac{x}{1},\ \frac{x'^2}{1.2}+\frac{x'}{1}\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2},\ldots$$

$$\frac{x'^q}{1.2.3\ldots q}+\frac{x'^{q-1}}{1.2.3..(q-1)}\frac{x}{1}+\ldots\frac{x^{q-1}}{1.2.3..(q-1)}\frac{x'}{1}+\frac{x^q}{1.2.3..q}.$$

Bringt man die Ausdrücke beziehungsweise auf die gemeinsamen Nenner $1, 1.2, 1.2.3,\ldots$ so nehmen sie die Gestalt an

$$(5)\qquad 1,\ \frac{x'+x}{1},\ \frac{x'^2+2x'x+x^2}{1.2},\ldots$$

$$\frac{x'^q+\frac{q}{1}x'^{q-1}x+\frac{q(q-1)}{1.2}x'^{q-2}x^2+\ldots+\frac{q}{1}x'x^{q-1}+x^q}{1.2.3\ldots q}.$$

Hier fallen aber die in den Zählern befindlichen ganzen Functionen von x und x' vermöge des binomischen Lehrsatzes mit den auf einander folgenden ganzen positiven Potenzen des Aggregats $x'+x$ zusammen. Die Summe der Glieder

$$(6)\qquad 1, \frac{x+x'}{1}, \frac{(x+x')^2}{1.2}, \ldots \frac{(x+x')^q}{1.2.3\ldots q}, \ldots$$

ist aber die Summe der Reihe (1) für das Argument $z=x+x'$. Folglich besteht für die Summe (1) oder für die Function $\Phi(x)$ die Gleichung

$$(7)\qquad \Phi(x)\,\Phi(x') = \Phi(x+x').$$

Bei zwei beliebigen complexen Argumenten $z=x+iy$ und $z'=x'+iy'$ folgt durch die Multiplication der beiden Reihen

$$\Phi(x+iy) = 1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1.2} + \ldots$$
$$\Phi(x'+iy') = 1 + \frac{x'+iy'}{1} + \frac{(x'+iy')^2}{1.2} + \ldots$$

nach den Gleichungen (18) des § 109 eine Reihe, deren Glieder diese sind

$$(8)\quad 1, \frac{x'+iy'}{1} + \frac{x+iy}{1}, \frac{(x'+iy')^2}{1.2} + \frac{(x'+iy')}{1}\frac{(x+iy)}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1.2}, \ldots$$

Da der binomische Lehrsatz auch die positiven ganzen Potenzen eines Aggregats ausdrückt, dessen Bestandtheile irgend welche complexe Grössen sind, so hat man für die aufeinander folgenden Grössen (8) ebenfalls die Darstellung

$$(9)\qquad 1, \frac{x+iy+x'+iy'}{1}, \frac{(x+iy+x'+iy')^2}{1.2}, \ldots$$

Die Summe derselben geht aus der Summe (3) hervor, indem man $x+iy$ durch das Aggregat $x+iy+x'+iy'$ ersetzt, und deshalb besteht für die Function $\Phi(x+iy)$, welche durch die Summe (3) ausgedrückt wird, die Gleichung

$$(10)\qquad \Phi(x+iy)\,\Phi(x'+iy') = \Phi(x+iy+x'+iy').$$

Das Product von zwei Werthen der Function $\Phi(x+iy)$, deren Argumente zwei beliebige complexe Grössen sind, ist also gleich demjenigen Werthe derselben Function, dessen Argument gleich der Summe jener beiden Argumente ist.

§ 114. Fortsetzung. Reihe mit reellem Argument zur Darstellung der Exponentialfunction.

Die Exponentialreihe hat die evidente Eigenschaft, sobald ihr Argument verschwindet, gleich der positiven Einheit zu werden. Wenn man deshalb in der Gleichung (7) des vorigen § die reellen Argumente x und x', und in der allgemeineren Gleichung (10) des vorigen § die complexen Argumente $x+iy$ und $x'+iy'$ so wählt, dass das betreffende Aggregat gleich Null wird, so bekommt man die Gleichungen

(1) $$\Phi(x)\ \Phi(-x) = \Phi(0) = 1,$$

(2) $$\Phi(x+iy)\ \Phi(-x-iy) = \Phi(0) = 1.$$

Da nun ein Product von bestimmten reellen und ein Product von bestimmten complexen Grössen nothwendig verschwindet, sobald einer seiner beiden Factoren gleich Null ist, so lehren die vorstehenden Gleichungen, vermöge deren das Product von zwei Functionen $\Phi(z)$ von entgegengesetzten Argumenten stets gleich der Einheit ist, *dass die Function $\Phi(z)$ weder für irgend ein bestimmtes reelles Argument $z=x$ noch für irgend ein bestimmtes complexes Argument $z=x+iy$ gleich Null werden kann.* Für ein reelles positives Argument x besteht die unendliche Summe

(3) $$\Phi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

aus lauter positiven Gliedern, und hat deshalb gewiss einen positiven Werth. Weil aber das Vorzeichen von zwei reellen Grössen dasselbe sein muss, damit das Product positiv ausfalle, so ist in Folge der Gleichung (1) die Function $\Phi(z)$ auch für jedes reelle negative Argument $z=-x$ gleich einem positiven Werthe. *Mithin nimmt die Function $\Phi(z)$ für alle reellen Werthe des Arguments $z=x$ nur positive Werthe an.*

Die Gleichung (10) des vorigen § gestattet, den Werth der Function $\Phi(x+iy)$ als das Product von zwei Werthen derselben Function darzustellen, wobei die eine Function das reelle Argument x, die andere Function das rein imaginäre Argument iy hat, denn aus (10) folgt allgemein die Gleichung

(4) $$\Phi(x)\ \Phi(iy) = \Phi(x+iy).$$

Man kann deshalb zu einer vollständigen Werthbestimmung der

Function $\Phi(x+iy)$ gelangen, indem man zuerst den Werth der Function für reelle Argumente, und dann den Werth der Function für rein imaginäre Argumente ermittelt.

Wir beginnen mit dem ersten Falle und stützen uns auf die Gleichung (7) des vorigen §, die so lautet

$$\Phi(x)\ \Phi(x') = \Phi(x+x'). \tag{5}$$

Wird zu den beiden reellen Argumenten x, x' ein beliebiges drittes reelles Argument x'' hinzugefügt, so folgt durch die wiederholte Anwendung von (5) die Gleichung

$$\Phi(x)\ \Phi(x')\ \Phi(x'') = \Phi(x+x'+x''), \tag{5*}$$

und es ist klar, dass dieselbe auf jede beliebige bestimmte Anzahl von gegebenen Argumenten ausgedehnt werden darf. Wenn insbesondere dieselbe Function $\Phi(x)$ die Anzahl M von Malen mit sich selbst multiplicirt wird, so entsteht die Gleichung

$$(\Phi(x))^M = \Phi(Mx). \tag{5**}$$

Es sei nun *das Argument x gleich einem beliebigen rationalen Bruche $\frac{G}{M}$, der vermöge der Division der positiven oder negativen ganzen Zahl G durch die positive Zahl M erhalten wird.* Dann folgt aus (5**) die Gleichung

$$\left(\Phi\left(\frac{G}{M}\right)\right)^M = \Phi(G). \tag{6}$$

Die Function $\Phi(G)$ wird, sobald G eine positive ganze Zahl ist, in derselben Weise durch die Gleichung

$$\Phi(G) = (\Phi(1))^G \tag{7}$$

bestimmt. Wenn G eine negative ganze Zahl ist, so kommt zunächst die Gleichung $\Phi(G) = (\Phi(-1))^{-G}$; da aber nach (1) $\Phi(-1) = (\Phi(+1))^{-1}$ ist, so gilt die Gleichung (7) auch für die negative ganze Zahl G. Mithin führt in beiden Fällen die Verbindung von (6) und (7) zu der Gleichung

$$\left(\Phi\left(\frac{G}{M}\right)\right)^M = (\Phi(1))^G. \tag{8}$$

Der Werth $\Phi(1)$, auf den sich jetzt die Aufmerksamkeit richtet, ist gleich der dem Argument $x=1$ entsprechenden unendlichen Summe

$$\Phi(1) = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots \tag{9}$$

und übertrifft, da alle Glieder positiv sind, offenbar den Werth der Zahl Zwei. Derselbe wird meistens mit dem Buchstaben e bezeichnet. Die numerische Berechnung ergiebt den Werth

(10) $$\Phi(1) = e = 2{,}71828182845904523536028\ldots$$

Die Gleichung (8) sagt aus, *dass die Grösse* $\Phi\left(\frac{G}{M}\right)$, *welche einen positiven Werth haben muss, weil nach dem Obigen* $\Phi(x)$ *für jedes reelle Argument einen positiven Werth annimmt, eine Wurzel der reinen Gleichung des Mten Grades*

(11) $$u^M = (\Phi(1))^G$$

ist, deren rechte Seite ebenfalls einen positiven Werth hat. Eine solche Gleichung hat nach § 29 immer nur eine einzige positive Wurzel. Folglich ist die Grösse $\Phi\left(\frac{G}{M}\right)$ als die einzige positive Wurzel der Gleichung (11) vollständig bestimmt, und wird vermittelst des in § 19 eingeführten Gebrauches der gebrochenen Potenzexponenten folgendermassen als eine Potenz der positiven, die Einheit übertreffenden Basis $\Phi(1) = e$ ausgedrückt

(12) $$\Phi\left(\frac{G}{M}\right) = (\Phi(1))^{\frac{G}{M}}.$$

Nachdem auf diese Weise der Werth der Function $\Phi(x)$ für jeden rationalen Werth des Arguments x gefunden ist, ergiebt sich die Bestimmung des Werthes der Function für ein beliebiges irrationales Argument x mit Hülfe *des Begriffes der Stetigkeit. Die Function* $\Phi(x)$ *ist zufolge des vorigen § für jeden reellen Werth des Arguments* x *eine stetige Function des Arguments* x, das heisst, der numerische Werth der Differenz zweier Werthe der Function $\Phi(x+h) - \Phi(x)$ wird bei abnehmendem h beliebig klein. Nun kann nach § 20, indem x an die Stelle des Zeichens G, und $\frac{G}{M}$ an die Stelle eines Bruches aus der Reihe γ', $\gamma''\ldots$ tritt, für einen bestimmten irrationalen Werth x stets ein rationaler Bruch $\frac{G}{M}$ angegeben werden, für welchen die Differenz $x - \frac{G}{M}$ numerisch beliebig klein ausfällt. Alsdann muss aus dem angeführten Grunde die Differenz $\Phi(x) - \Phi\left(\frac{G}{M}\right)$

ebenfalls numerisch beliebig klein sein. Ferner erinnern wir uns der Art und Weise, wie in § 100 die Exponentialfunction von der beliebigen positiven Basis C definirt worden ist. An die Stelle von C komme jetzt die in (10) angegebene positive, die Einheit übertreffende Basis $\Phi(1) = e$. Die in § 100 angestellte und in § 101 fortgesetzte Betrachtung zeigt alsdann, dass für einen beliebig kleinen numerischen Werth der Differenz $x - \frac{G}{M}$ die Differenz $(\Phi(1))^x - (\Phi(1))^{\frac{G}{M}}$, für einen beliebig kleinen numerischen Werth der zwischen irgend zwei bestimmten Grössen x_1 und x genommenen Differenz die Differenz $(\Phi(1))^{x_1} - (\Phi(1))^x$ numerisch beliebig klein werden muss. Hiemit ist die Thatsache ausgesprochen, *dass die Exponentialfunction* $(\Phi(1))^x$ *für jeden Werth des reellen Arguments x eine stetige Function des Arguments x ist.* Da also bei einer fortgesetzten Annäherung des Bruches $\frac{G}{M}$ an die bestimmte irrationale Grösse x die linke Seite der Gleichung (12) von dem Werthe der Function $\Phi(x)$, und zugleich die rechte Seite derselben Gleichung von dem Werthe der Exponentialfunction e^x beliebig wenig abweicht, so entsteht die für jeden bestimmten reellen rationalen oder irrationalen Werth von x gültige Gleichung

$$\Phi(x) = e^x. \tag{13}$$

Durch die zu untersuchende Reihe wird daher bei einem beliebigen reellen Argument x die Exponentialfunction e^x dargestellt

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^q}{1.2.3\ldots q} + \ldots \tag{14}$$

Die Basis einer Exponentialfunction bildet, sobald man zu der zugehörigen umgekehrten Function übergeht, die Basis des betreffenden Logarithmensystems. Die Logarithmen, welche durch die Gleichungen

$$u = e^x,\ x = \log u \tag{15}$$

definirt sind, führen den Namen der *natürlichen Logarithmen*. Mit Rücksicht hierauf pflegt man die Constante e als *die Basis des natürlichen Logarithmensystems* zu bezeichnen.

§ 115. Fortsetzung. Reihe mit rein imaginärem Argument zur Darstellung der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus.

Ein rein imaginäres Argument iy ist mit dem entgegengesetzten Argument $-iy$ conjugirt. Da nun die ungeraden Potenzen der imaginären Einheiten $+i$ und $-i$ einander entgegengesetzt, die geraden Potenzen einander gleich sind, so ist der Werth der Function

$$(1) \qquad \Phi(iy) = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{1.2} + \frac{(iy)^3}{1.2.3} + \ldots$$

mit dem Werthe der Function

$$(2) \qquad \Phi(-iy) = 1 - iy + \frac{(-iy)^2}{1.2} + \frac{(-iy)^3}{1.2.3} + \ldots$$

in Bezug auf den reellen Theil A gleich, in Bezug auf den imaginären Theil iB gleich und entgegengesetzt, folglich $\Phi(iy) = A + iB$ mit $\Phi(-iy) = A - iB$ ebenfalls conjugirt.

Die Gleichung (2) des vorigen § geht für ein rein imaginäres Argument in die Gleichung

$$(3) \qquad \Phi(iy)\ \Phi(-iy) = 1$$

über und zeigt daher, dass das Product $(A+iB)(A-iB)$, das heisst, *die Summe der Quadrate des reellen Theiles und des von dem Factor i befreiten imaginären Theiles, oder die Norm der complexen Grösse $\Phi(iy)$ gleich der positiven Einheit ist.*

Die Trennung des Reellen vom Imaginären bei der Function $\Phi(iy)$ wird durch die Gleichung

$$(4) \quad \Phi(iy) = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} \mp \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{1.2.3} \mp \ldots\right)$$

dargestellt, so dass der reelle Theil nur die geraden, der imaginäre Theil nur die ungeraden Potenzen der Grösse y enthält. Jede complexe Grösse $A + iB$ kann in die Gestalt $P(\cos\theta + i\sin\theta)$ gesetzt werden, wo P den absoluten Betrag $\sqrt{A^2+B^2}$ bedeutet, und der Winkel θ innerhalb einer Kreisperipherie vollständig bestimmt ist. Aus dem Umstande, dass bei der Function $\Phi(iy) = A + iB$ die Norm $A^2 + B^2$, und deshalb auch der absolute Betrag $\sqrt{A^2+B^2}$ den Werth der positiven Einheit hat, folgt demnach die Gleichung

$$(5) \qquad \Phi(iy) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Es bleibt also zu ermitteln, auf welche Weise der Winkel θ von der reellen Grösse y abhängt.

Die Gleichung (10) des § 113 bringt für zwei beliebige Argumente iy und iy' die Gleichung

(6) $$\Phi(iy)\,\Phi(iy') = \Phi(iy + iy')$$

hervor, welche, auf das Product von M gleich $\Phi(iy)$ genommenen Factoren angewendet, zu der Gleichung

(6*) $$(\Phi(iy))^M = \Phi(iMy)$$

führt. Wir betrachten nun wieder die Voraussetzung, *dass das Argument y gleich einem Bruche $\frac{H}{M}$ sei, dessen Zähler H eine positive oder negative ganze Zahl, und dessen Nenner M eine ganze Zahl M ist. Der Nenner M wird ausserdem später der Beschränkung unterworfen werden, kleiner zu sein als eine immerhin grosse aber bestimmt gewählte ganze Zahl N.* Wie weit sich nun auch die bis zu der gegebenen Zahl N fortgesetzte Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots N-1$ erstrecke, immer kann nach § 9 die kleinste ganze Zahl bestimmt werden, in welche diese sämmtlichen Zahlen aufgehen, oder *das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben*, und diese Zahl werde Ω genannt. Zugleich leuchtet es ein, dass, wenn der Zahl N nach und nach immer grössere Werthe beigelegt werden, Ω ebenfalls grösser wird. Wir ersetzen in der Gleichung (6*) die ganze Zahl M durch die Zahl Ω und die Grösse y durch den Bruch $\frac{1}{\Omega}$, so dass die Gleichung

(7) $$\left(\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right)\right)^{\Omega} = \Phi(i)$$

entspringt. Für den Werth $\Phi(i)$ darf vermöge der Gleichung (5) mit einem innerhalb einer Kreisperipherie bestimmten Winkel σ_1 der Ausdruck

(8) $$\Phi(i) = \cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1$$

gebildet werden.

Offenbar hat die Gleichung (7) den Inhalt, *dass die Grösse $\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right)$ eine Wurzel der reinen Gleichung des Ωten Grades*

(9) $$v^{\Omega} = \Phi(i) = \cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1$$

ist. Eine solche Gleichung ist in § 33 behandelt worden, und es ist daselbst nachgewiesen, dass sie Ω von einander verschiedene Wurzeln hat, welche, da die Grösse $\cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1$ den absoluten Betrag Eins besitzt, durch die Formel

$$(10)\qquad \cos\frac{\sigma_1+2k\pi}{\Omega} + i\sin\frac{\sigma_1+2k\pi}{\Omega}$$

dargestellt werden; für k ist successive eine der ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots \Omega-1$ zu setzen. Die Grösse $\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right)$ ist vermöge ihrer Definition durch die Reihe (4) vollständig bestimmt und kann deshalb nur einer einzigen unter den Ω Wurzeln gleich sein. Für diese empfängt die ganze Zahl k einen eindeutig bestimmten Werth, und mit diesem Werthe von k werde die Gleichung

$$(11)\qquad \sigma_1 + 2k\pi = \sigma$$

formulirt. Dann ist $\cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1$ auch gleich $\cos\sigma + i\sin\sigma$, und es gelten die Gleichungen

$$(12)\qquad \Phi(i) = \cos\sigma + i\sin\sigma,\ \Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right) = \cos\frac{\sigma}{\Omega} + i\sin\frac{\sigma}{\Omega}.$$

Aus der zweiten derselben kann jetzt der Werth der Function $\Phi(iy)$ für jedes Argument, bei dem y gleich dem rationalen Bruche $\frac{H}{M}$ und die Zahl $M < N$ ist, durch Erhebung auf eine positive ganze Potenz abgeleitet werden. Nach der für die ganze Zahl Ω gegebenen Definition geht die ganze Zahl M in Ω auf, das heisst, es giebt eine ganze Zahl M', mittelst welcher $MM' = \Omega$ ist. Wenn H eine positive ganze Zahl ist, so ergiebt die Erhebung auf die Potenz von dem Exponenten HM' bei der Function $\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right)$ nach (6*) die Function $\Phi\left(i\frac{HM'}{\Omega}\right) = \Phi\left(i\frac{H}{M}\right)$, und bei dem Ausdrucke $\cos\frac{\sigma}{\Omega} + i\sin\frac{\sigma}{\Omega}$ vermöge seiner Grundeigenschaft das Resultat

$$\cos\sigma\frac{HM'}{\Omega} + i\sin\sigma\frac{HM'}{\Omega} = \cos\sigma\frac{H}{M} + i\sin\sigma\frac{H}{M}.$$

Wenn H eine negative ganze Zahl ist, so ist zuerst eine Erhebung auf die positive ganze Potenz von dem Exponenten $-HM'$ vorzunehmen, und dann die aus (3) folgende Gleichung

$\Phi\left(\frac{iH}{M}\right)\Phi\left(\frac{-iH}{M}\right)=1$ mit der Gleichung

$$\left(\cos\frac{H}{M}+i\sin\frac{H}{M}\right)\left(\cos\frac{H}{M}-i\sin\frac{H}{M}\right)=1$$

zu verbinden. So erhält man für beide Fälle die Gleichung

(13) $$\Phi\left(\frac{iH}{M}\right)=\cos\frac{\sigma H}{M}+i\sin\frac{\sigma H}{M}.$$

Die Bestimmung der Grösse σ ist aus der Betrachtung der Reihe (4) zu schöpfen. Wird von $\Phi(iy)$ die Einheit subtrahirt, so lässt sich y als Factor herausziehen, und es entsteht die Gleichung

(14) $$\Phi(iy)-1=y\left(-\frac{y}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3.4}\mp\cdots\right)$$
$$+iy\left(1-\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}\mp\cdots\right),$$

wo die in den Klammern befindlichen unendlichen Reihen nach den entwickelten Regeln noch convergent sind. Die erste derselben $-\frac{y}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3.4}\mp\ldots$ nähert sich, sobald der Werth y numerisch gegen die Null abnimmt, der Null, die zweite $1-\frac{y^2}{1.2}\pm\ldots$ unter derselben Voraussetzung der Einheit. Mithin gilt für ein numerisch gegen die Null abnehmendes y das Resultat, dass der Quotient $\frac{\Phi(iy)-1}{y}$ in seinem reellen Theile die Null, in seinem imaginären Theile das Product von i in die positive Einheit zur Grenze hat, oder in Zeichen die Gleichung

(15) $$\lim\frac{\Phi(iy)-1}{y}=i.$$

Es hat sich aber in § 103 ergeben, dass für einen unter $\frac{\pi}{2}$ liegenden positiven Werth y die dort mit (7) bezeichnete Ungleichheit

$$\sin y<y<\frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

besteht, und aus derselben folgt, dass der Quotient $\frac{\sin y}{y}$ stets zwischen der Einheit und dem Werthe $\sqrt{1-\sin^2 y}$ liegt, mithin

für einen gegen die Null abnehmenden positiven Werth y die Einheit zur Grenze hat. Dieses Resultat ist auch für einen numerisch abnehmenden negativen Werth y gültig, da $\sin(-y) = -\sin y$ ist. Die Function $\cos y$ nähert sich bei einem numerisch gegen die Null abnehmenden Werthe y der Einheit, und zwar so, dass der Quotient

$$\frac{\cos y - 1}{y} = -\frac{\sin^2 y}{y(\cos y + 1)} = -\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin y}{\cos y + 1}$$

die Null zur Grenze hat, da der Factor $\frac{\sin y}{y}$ gegen die Einheit, der Factor $\frac{\sin y}{\cos y + 1}$ gegen die Null convergirt. Mithin nähert sich der Quotient $\frac{\cos y + i \sin y - 1}{y}$ bei numerisch abnehmendem y in seinem reellen Theile der Null, in seinem imaginären Theile dem Producte von i in die positive Einheit, und es ist

(16) $$\lim \frac{\cos y + i \sin y - 1}{y} = i.$$

Da nun die Zahl Ω, sobald die Zahl N fortdauernd zunimmt, nach und nach immer grössere Werthe erhält, so bekommt in Folge dessen der Bruch $\frac{1}{\Omega}$ immer kleinere Werthe, und für solche Werthe muss sich, wie der Anblick von (14) gelehrt hat, der reelle Theil der Function $\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right)$ der Einheit, der imaginäre der Null nähern. Die zweite Gleichung (12) $\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right) = \cos\frac{\sigma}{\Omega} + i \sin\frac{\sigma}{\Omega}$ liefert also für das Argument $\frac{\sigma}{\Omega}$ die Forderung, dass der Cosinus desselben sich der Einheit, der Sinus desselben der Null zu nähern habe, und dieser Forderung wird genügt, indem das Argument $\frac{\sigma}{\Omega}$ selbst numerisch kleiner und kleiner wird. Wendet man auf das abnehmende Argument $\frac{\sigma}{\Omega}$ die Gleichung (16) an, so kommt

(17) $$\lim \frac{\cos\frac{\sigma}{\Omega} + i \sin\frac{\sigma}{\Omega} - 1}{\frac{\sigma}{\Omega}} = i.$$

Setzt man dagegen in (15) statt y den Werth $\frac{1}{\Omega}$, und statt $\Phi\left(\frac{i}{\Omega}\right)$ die der Function gleiche Grösse $\cos\frac{\sigma}{\Omega}+i\sin\frac{\sigma}{\Omega}$, so ergiebt sich

$$(18)\qquad \lim\frac{\cos\frac{\sigma}{\Omega}+i\sin\frac{\sigma}{\Omega}-1}{\frac{1}{\Omega}}=i.$$

Der Quotient, der auf der linken Seite von (17) steht, geht aber durch Multiplication mit der Grösse σ in den Quotienten über, welcher sich auf der linken Seite von (18) befindet, die rechte Seite von (17) ist der rechten Seite von (18) gleich, folglich kann der Werth der Grösse σ für ein hinreichend grosses Ω von der positiven Einheit nur um beliebig wenig abweichen, und *daher hat für einen wachsenden Werth von Ω die gesuchte Grösse σ den Werth der positiven Einheit.* Die Gleichung (13) verwandelt sich hierdurch in die Gleichung

$$(19)\qquad \Phi\left(\frac{iH}{M}\right)=\cos\frac{H}{M}+i\sin\frac{H}{M},$$

so dass der Werth der Function $\Phi(iy)$ für jeden Werth $y=\frac{H}{M}$ bestimmt ist, bei dem der Nenner M unter der Zahl N liegt. Man sieht aber, dass, da der Zahl N nach und nach immer grössere Werthe beigelegt worden sind, die der Zahl M auferlegte Beschränkung keinen Einfluss mehr ausübt.

Aus der Gleichung (19) folgt die Bestimmung der Function $\Phi(iy)$ für einen beliebigen bestimmten Werth y durch eben solche Betrachtungen, durch welche aus der Gleichung (12) des vorigen § die dortige Gleichung (13) deducirt ist. Die in § 113 erwiesene Stetigkeit der Function $\Phi(x+iy)$ in Bezug auf das Argument $x+iy$ schliesst in sich, dass *die Function $\Phi(iy)$ in ihrem reellen und imaginären Theile eine stetige Function der Grösse y ist.* Ferner wurde in § 103 gezeigt, dass für die trigonometrischen Functionen Cosinus und Sinus der numerische Werth der Differenz $\cos(y+k)-\cos y$ und der Differenz $\sin(y+k)-\sin y$, sobald die Grösse k gegen die Null abnimmt, beliebig klein wird. Demnach ist *die Function $\cos y$ eine stetige*

Function des Arguments y *und die Function* $\sin y$ *eine stetige Function des Arguments* y. Daher bleibt die Gleichung (19) noch gültig, sobald in beide Seiten derselben statt des rationalen Bruches $\frac{H}{M}$ eine beliebige bestimmte Grösse y gesetzt wird, und dadurch entsteht die Gleichung

$$\Phi(iy) = \cos y + i \sin y. \tag{20}$$

Vermittelst der Trennung des Reellen und Imaginären gewinnen wir also *zwei Reihen, welche beziehungsweise die trigonometrischen Functionen* $\cos y$ *und* $\sin y$ *für jedes beliebige Argument* y *ausdrücken, nämlich*

$$\tag{21} \begin{cases} \cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} \mp \ldots \\ \sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} \mp \ldots \end{cases}$$

§ 116. Fortsetzung. Werthbestimmung der Exponentialreihe mit beliebigem complexem Argument.

Die Werthbestimmung der Function $\Phi(x+iy)$ mit beliebigem complexem Argument ergiebt sich aus der für diesen Zweck gebildeten Gleichung (4) des § 114, der Gleichung

$$\Phi(x)\ \Phi(iy) = \Phi(x+iy). \tag{1}$$

Nach der Gleichung (13) desselben § ist

$$\Phi(x) = e^x,$$

ferner nach der Gleichung (20) des vorigen §

$$\Phi(iy) = \cos y + i \sin y,$$

deshalb kommt für *die Function* $\Phi(x+iy)$ *der in Bezug auf jedes bestimmte complexe Argument* $x+iy$ *geltende Ausdruck*

$$\Phi(x+iy) = e^x\ (\cos y + i \sin y). \tag{2}$$

Hiemit ist die Werthbestimmung der Exponentialreihe, die für jedes bestimmte complexe Argument convergirt,

$$\Phi(x+iy) = 1 + \frac{x+iy}{1} + \frac{(x+iy)^2}{1.2} + \ldots$$

vollendet.

Die angestellte Untersuchung hat uns Reihen kennen gelehrt, welche dazu dienen, die *Exponentialfunction* e^x, *die trigonometrische Function* $\cos y$ und *die trigonometrische Function* $\sin y$

für jedes gegebene Argument convergirend darzustellen. Auch kann man das gefundene allgemeine Ergebniss so ausdrücken, dass die mit einem beliebigen Paar von Werthen x und y gebildete Verbindung $e^x(\cos y + i \sin y)$ durch die Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \dots$$

dargestellt wird, indem statt des Arguments z die complexe Grösse $x + iy$ substituirt wird. Hierauf gründet sich die im Gebrauch stehende Bezeichnung

(3) $$e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy},$$

welche die Bezeichnung

(4) $$\cos y + i \sin y = e^{iy}$$

in sich schliesst.

Die Verbindung $e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}$ ist mit der Verbindung $e^x(\cos y - i \sin y) = e^{x-iy}$ conjugirt, und da die Grösse e^x nur positive Werthe annehmen kann, so stellt sie den absoluten Betrag von jeder der beiden genannten Verbindungen dar. Hieraus folgt, dass für jede gegebene complexe Grösse $t + iu$ die reellen Grössen x und y sich so bestimmen lassen, dass die Gleichung

(5) $$t + iu = e^x(\cos y + i \sin y)$$

erfüllt wird. Der absolute Werth $\sqrt{t^2 + u^2}$ muss dem Factor e^x gleich werden. Nach § 102 ist dies immer und zwar nur auf eine einzige Weise möglich, da bei einer gegebenen Basis zu jeder reellen positiven Grösse ein und nur ein Logarithmus gehört. Die Basis wird gegenwärtig durch die Constante e vertreten, der betreffende Logarithmus heisst, wie schon erwähnt, der natürliche Logarithmus und bestimmt die reelle Grösse x eindeutig, wie folgt,

(6) $$x = \log \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Für die reelle Grösse y hat man die beiden stets möglichen Gleichungen

(7) $$\cos y = \frac{t}{\sqrt{t^2 + u^2}}, \quad \sin y = \frac{u}{\sqrt{t^2 + u^2}},$$

welchen, nachdem ein Werth genügender y gefunden ist, alle Grössen und nur die Grössen genügen, welche in der Formel

(8) $$y + 2k\pi$$
enthalten sind, in der k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

§ 117. Untersuchung der Binomialreihe.

Die in § 112 definirte Binomialreihe

(1) $$1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}z^q + \ldots,$$

bei der n gleich einer beliebigen bestimmten reellen Grösse sein soll, lässt sich, wenn statt z eine complexe Grösse $x+iy$ substituirt, und dieselbe wie in (15) des § 107 in die Gestalt $r(\cos\psi + i\sin\psi)$ gesetzt wird, folgendermassen in einen reellen und einen imaginären Theil zerlegen

(2) $$\begin{aligned} 1 + \frac{n}{1}r\cos\psi + \frac{n(n-1)}{1.2}r^2\cos 2\psi + \ldots \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}r^q\cos q\psi + \ldots \\ + i\Big(\frac{n}{1}r\sin\psi + \frac{n(n-1)}{2}r^2\sin 2\psi + \ldots \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}r^q\sin q\psi + \ldots\Big) \end{aligned}$$

Die Coefficienten $\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots$ haben die Beschaffenheit, dass jeder aus dem Vorhergehenden durch Hinzufügung eines Factors entsteht. Der letzte Factor bei dem mit z^q multiplicirten Gliede ist $\frac{n-q+1}{q} = -\left(1 - \frac{n+1}{q}\right)$ und wird daher, sobald der Fall eines positiven ganzzahligen n ausgeschlossen bleibt, für hinreichend grosse Werthe der Zahl q stets negativ, weshalb die Vorzeichen der Coefficienten $\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots$ von einem gewissen Gliede ab fortwährend abwechselnde Vorzeichen haben müssen.

Die Convergenz des reellen und des imaginären Theiles von (2) kann mittelst der Sätze (I) und (II) des § 106 beurtheilt werden, indem man in beiden Fällen statt der dort mit $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ bezeichneten reellen positiven Grössen die Producte der aufeinander folgenden Potenzen der positiven Grösse r und der ab-

soluten Werthe der zugeordneten Coefficienten $\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots$ substituirt. Die dort mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ bezeichneten Grössen werden dann in dem Falle des reellen Theiles durch die mit der positiven oder negativen Einheit multiplicirten Grössen $1, \cos\psi, \cos 2\psi, \ldots$, in dem Falle des imaginären Theiles durch die mit der positiven oder negativen Einheit multiplicirten Grössen $\sin\psi, \sin 2\psi, \ldots$ vertreten. Sowohl die einen wie die andern haben die in dem Satze (I) des § 106 erwähnte Eigenschaft, dass sie sich für einen wachsenden Zeiger nicht der Null nähern. Der mit der ganzen Zahl t zu bildende Quotient $\frac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t}$ ist hier gleich dem absoluten Werthe des Quotienten bei der Division des Gliedes $\frac{n(n-1)\ldots(n-t)}{1.2.3\ldots(t+1)} r^{t+1}$ durch das Glied $\frac{n(n-1)\ldots(n-t+1)}{1.2.3\ldots t} r^t$, welcher letztere gleich dem für ein hinreichend grosses t negativen Ausdrucke $\frac{n-t}{t+1} r$ wird. Demnach ist der Quotient $\frac{\varrho_{t+1}}{\varrho_t} = \left(1 - \frac{n+1}{t+1}\right) r$ und convergirt bei einer stets wachsenden Zahl t, da $1 - \frac{n+1}{t+1}$ sich der Einheit nähert, gegen die Grenze r. Je nachdem die Grösse r über der Einheit oder unter der Einheit liegt, sind daher die Bedingungen des Satzes (I) oder des Satzes (II) des § 106 erfüllt. *Folglich convergirt sowohl der reelle wie der imaginäre Theil der Binomialreihe* (2), *so lange der absolute Betrag r der complexen Grösse $x + iy$ unter der Einheit liegt, und es convergirt weder der reelle noch der imaginäre Theil derselben Reihe, so lange der absolute Betrag r der complexen Grösse $x+iy$ über der Einheit liegt.* Aus einer gegen das Ende des § 106 gemachten Bemerkung ergiebt sich ferner, *dass, wofern $r<1$ ist, sowohl der reelle wie auch der imaginäre Theil von* (2) *auch dann noch convergente Summen liefern, wenn statt der einzelnen Glieder die absoluten Werthe derselben gesetzt werden.* Der Beweis beruht darauf, *dass die aus den absoluten Werthen der Grössen*

$$1, \frac{n}{1} r, \frac{n(n-1)}{1.2} r^2, \ldots \tag{3}$$

gebildete unendliche Summe, wenn r einen unter der Einheit liegenden positiven Werth erhält, convergent ist. Wie es sich mit der Convergenz des reellen und des imaginären Theiles von (2) unter der Voraussetzung verhalte, dass der absolute Betrag r der Grösse $x+iy$ gleich der Einheit ist, bleibt vorläufig unentschieden, und muss später erörtert werden.

Eine im § 113 angewendete Erörterung des § 108 lehrt, dass vermöge der so eben erwähnten Eigenschaft der Grösse (3) die Binomialreihe für jedes Argument $x+iy$, dessen Betrag r kleiner als die Einheit ist, *eine stetige Function von* $x+iy$ ausdrückt. Die Binomialreihe gehört aber auch zu derjenigen Gattung von Reihen, die in § 108 unter (16) dargestellt ist. Durch die Substitution $z=x+iy$ erhält die Binomialreihe die Gestalt

$$(4) \qquad 1+\frac{n}{1}(x+iy)+\frac{n(n-1)}{1.2}(x+iy)^2+\dots$$

Ihre Coefficienten sind, wie schon in § 112 bemerkt worden, *rationale ganze Functionen der Grösse* n, und weil jede rationale ganze Function einer variabeln Grösse eine stetige Function derselben ist, *stetige Functionen der Grösse* n. Die Reihe (4) ist ferner so beschaffen, dass die absoluten Werthe der vorhin unter (3) angeführten Grössen, sobald $r<1$ ist, für jedes gegebene n eine convergente Summe bilden, und daher auch unter einer festen Grösse bleiben, wofern nur von vorne herein bestimmt wird, bis zu wie grossen numerischen Werthen die Grösse n erstreckt werden soll. Demnach erfüllt die Reihe (4) alle in § 108 der dortigen Reihe (16) auferlegten Bedingungen, und hat vermöge des daselbst bewiesenen Satzes die Eigenschaft, *dass ihr reeller und ihr imaginärer Theil, so lange* $r<1$ *ist, stetige Functionen der reellen Variable* n *sind.*

Wir führen jetzt für die convergente Summe der Binomialreihe das Zeichen $F(x+iy,n)$ ein, und bezeichnen die Coefficienten folgendermassen

$$(5) \qquad 1=1,\ \frac{n}{1}=\binom{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1.2}=\binom{n}{2},\dots$$
$$\frac{n(n-1)\dots(n-q+1)}{1.2.3\dots q}=\binom{n}{q},\dots$$

dann ist

$$(6)\quad F(x+iy,n)=1+\binom{n}{1}(x+iy)+\binom{n}{2}(x+iy)^2+\ldots \\ +\binom{n}{q}(x+iy)^q+\ldots$$

Es möge mit demselben Werthe $x+iy$ und einem andern reellen Werthe n' die Function $F(x+iy,n')$ gebildet werden. Bei beiden Functionen convergiren die aus den absoluten Werthen der Glieder des reellen Theiles wie auch die aus den absoluten Werthen der Glieder des imaginären Theiles bestehenden Summen, mithin ergiebt die nach den Vorschriften des § 109 ausgeführte Multiplication der beiden Reihe eine convergente Reihe, deren Werth gleich dem Product der Werthe der beiden multiplicirten Reihen ist. Die Glieder der durch Multiplication hervorgehenden Reihe werden vermöge der Gleichungen (18) des § 109 diese

$$(7)\quad 1,\ \left(\binom{n'}{1}+\binom{n}{1}\right)(x+iy),\ \left(\binom{n'}{2}+\binom{n'}{2}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)(x+iy)^2,\ldots$$

Nun erwäge man, dass dieselben Glieder auch in dem Falle erscheinen, dass n und n' irgend ein Paar positive ganze Zahlen bedeuten, und dass unter dieser Voraussetzung

$$F(x+iy,n)=(1+x+iy)^n,\ F(x+iy,n')=(1+x+iy)^{n'}$$

ist und die Gleichung

$$(8)\qquad (1+x+iy)^n(1+x+iy)^{n'}=(1+x+iy)^{n+n'}$$

besteht. Die rechte Seite ist aber gleich der Function $F(x+iy, n+n')$ oder der Summe der Glieder

$$(9)\qquad 1,\ \binom{n+n'}{1}(x+iy),\ \binom{n+n'}{2}(x+iy)^2\ldots$$

Die Summe der Glieder (7) und die vorliegende Summe sind jetzt rationale ganze Functionen der variabeln Grösse $x+iy$ von dem Grade $n+n'$ und können einander für unbestimmte Werthe der Variable nach Satz (1) des § 44 nur dann gleich sein, wenn die Coefficienten der gleich hohen Potenzen der Variable einander gleich sind. Mithin bestehen *für jedes Paar von positiven ganzen Zahlen* n und n' die Gleichungen

$$(10)\quad \binom{n}{1}+\binom{n'}{1}=\binom{n+n'}{1},\ \ \binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n'}{1}+\binom{n'}{2}=\binom{n+n'}{2},\ldots \\ \binom{n}{q}+\binom{n}{q-1}\binom{n'}{1}+\binom{n}{q-2}\binom{n'}{2}+\ldots+\binom{n}{1}\binom{n'}{q-1}+\binom{n}{q}=\binom{n+n'}{q}.$$

Nun befinden sich auf den beiden Seiten von jeder dieser Gleichungen *rationale ganze Functionen der beiden Elemente* n

und n'. Es ist aber in § 58 bewiesen worden, dass, wenn eine rationale ganze Function von zwei Elementen für eine hinreichende Anzahl von verschiedenen Werthpaaren der Elemente verschwindet, die sämmtlichen Coefficienten der Potenzen und der Producte von den Potenzen der Elemente verschwinden müssen. Hieraus folgt, dass wenn zwei rationale ganze Functionen von zwei Elementen für eine hinreichende Anzahl von Werthpaaren der Elemente einander gleich sind, die Coefficienten der entsprechenden Potenzen und Producte von Potenzen nothwendig einander gleich sind. Die rationalen ganzen Functionen der Elemente n und n' in jeder der Gleichungen (10) sind einander gleich, sobald für n und n' irgend ein Paar von positiven ganzen Zahlen genommen wird, und man kann die Anzahl der verschiedenen Zahlenpaare so gross machen, als man nur will. Mithin müssen in den entwickelten Ausdrücken die Coefficienten der entsprechenden Potenzen und Producte von Potenzen gleich sein, und deshalb *gelten die Gleichungen* (10) *für beliebige Werthe der Grössen* n *und* n'. Aus dieser Ursache bringt die Summe der Grössen (7) bei unendlicher Ausdehnung die Function $F(x+iy, n+n')$ hervor, folglich besteht *für beliebige reelle Grössen* n *und* n' die Gleichung

(11) $$F(x+iy, n)\, F(x+iy, n') = F(x+iy, n+n').$$

Die Function $F(x+iy, n)$ wird für $n=0$ gleich der positiven Einheit, daher folgt aus (11) die Gleichung

(12) $$F(x+iy, n)\, F(x+iy, -n) = 1.$$

Da der Werth der Function $F(x+iy, n)$ für jede positive ganze Zahl n bekannt ist und durch die Potenz $(1+x+iy)^n$ dargestellt wird, so ergiebt sich in Bezug auf *jede negative ganze Zahl* $-n$ *die Werthbestimmung*

(13) $$F(x+iy, -n) = \frac{1}{(1+x+iy)^n} = (1+x+iy)^{-n}.$$

Diese Gleichung löst ein in § 99 gegebenes Versprechen, die Convergenz der auf der rechten Seite der dortigen Gleichung (2) befindlichen Summe zu beweisen. Aus der angeführten Gleichung ist die Gleichung (6) des § 107 abgeleitet worden, und es genügt, die Convergenz der auf der rechten Seite von dieser befindlichen Summe zu begründen, da die betreffenden Gleichungen in der Beziehung der Gegenseitigkeit zu einander

stehen. Die Coefficienten der Binomialreihe (1) nehmen, sobald statt n die Grösse $-n$ gesetzt wird, die Ausdrücke an

$$(14) \qquad 1, -\frac{n}{1}, +\frac{n(n+1)}{1.2}, -\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}, \ldots$$

mithin hat die Gleichung (13) den Inhalt

$$(15) \quad (1+x+iy)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}(x+iy) + \frac{n(n+1)}{1.2}(x+iy)^2 + \ldots,$$

wo der Betrag r der complexen Grösse $x+iy$ als unter der Einheit befindlich vorausgesetzt wird. Dividirt man beide Seiten der Gleichung (6) des § 107 durch die Grösse $(-1)^{\mathfrak{a}}\, \xi^{\mathfrak{a}}$, so geht der erste Bestandtheil der linken Seite in den Bruch $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{\xi}\right)^{\mathfrak{a}}}$ und die rechte Seite in die Reihe

$$1 + \mathfrak{a}\,\frac{x}{\xi} + \frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)}{1.2}\left(\frac{x}{\xi}\right)^2 + \ldots \text{ über.}$$

Wofern nun statt der hier vorkommenden positiven ganzen Zahl $\mathfrak{a}$ das Zeichen n, und statt des dortigen Quotienten $\frac{x}{\xi}$, der reelle und complexe Werthe annehmen darf, das Zeichen $-(x+iy)$ gesetzt wird, so verwandelt sich die Reihe in die rechte Seite der obigen Gleichung (15). Die letztere convergirt, wie wir sahen, sobald der absolute Betrag r von $x+iy$ kleiner als die Einheit ist, und stellt dann den Ausdruck $(1+x+iy)^{-n}$ dar. Diese Bestimmungen übertragen sich auf die bezeichnete Reihe des § 107 in der Weise, dass der absolute Betrag der Grösse $\frac{x}{\xi}$ kleiner als die Einheit sein muss, und dass alsdann mittelst der Reihe der Bruch $\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^{\mathfrak{a}}$ ausgedrückt wird. Das aber war an jener Stelle behauptet worden.

§ 118. Fortsetzung.

Um den Werth der Binomialreihe für eine reelle Grösse n zu bestimmen, die nicht gleich einer ganzen Zahl ist, halten wir uns an die Gleichung (11) des vorigen §, und wenden sie

auf ein Product von M Factoren an, die gleich der Function $F(x+iy, n)$ sind. So entsteht die Gleichung

$$(1)\qquad (F(x+iy,\, n))^M = F(x+iy,\, Mn),$$

und legt man der Grösse n den Werth des rationalen Bruches $\frac{1}{M}$ bei, so kommt, da die Function $F(x+iy, 1)$ den Werth $1+x+iy$ hat, die Gleichung

$$(2)\qquad \left(F\left(x+iy,\, \frac{1}{M}\right)\right)^M = 1+x+iy.$$

Die rechte Seite derselben kann in die Gestalt gebracht werden

$$(3)\qquad 1+x+iy = \sqrt{(1+x)^2+y^2}\,(\cos\lambda_1 + i\sin\lambda_1).$$

Hier bedeutet, indem die Quadratwurzel, wie üblich, als positiv aufgefasst wird, λ_1 einen Winkel, dessen Cosinus $\frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}$ stets positiv ist, da in Folge der Bedingung $r=\sqrt{x^2+y^2}<1$ der numerische Werth von x unter der Einheit liegen muss; der Sinus $\frac{y}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}$ hat das Vorzeichen der Grösse y und wird gleich Null, sobald y verschwindet. Man kann deshalb den Winkel λ_1 so wählen, dass derselbe für ein positives y zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für ein negatives y zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ liegt, und für $y=0$ verschwindet; er wird dadurch eindeutig bestimmt. Die Tangente des Winkels λ_1 hat den Werth $\frac{y}{1+x}$; mithin ist

$$(4)\qquad \lambda_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x},$$

und zwar fällt die Beschränkung, dass λ_1 zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen soll, mit derjenigen Beschränkung zusammen, durch welche in § 104 die Function Arcus tangentis zu einer eindeutigen Function gemacht worden ist.

In Folge der Gleichung (2) ist *die Function* $F\left(x+iy, \frac{1}{M}\right)$

eine Wurzel der reinen Gleichung des Mten Grades

(5) $$w^M = 1 + x + iy.$$

Die sämmtlichen M Wurzeln dieser Gleichung werden nach § 33 vermöge der Ausziehung der positiven Mten Wurzel aus dem absoluten Betrage $\sqrt{(1+x)^2+y^2}$, der Theilung des Winkels λ_1 in M gleiche Theile und der Theilung der Kreisperipherie in M gleiche Theile dargestellt. Wenn man aber mit Anwendung der natürlichen Logarithmen

(6) $$\sqrt{(1+x)^2+y^2} = e^{\log \sqrt{(1+x)^2+y^2}}$$

setzt, so erhält die Gleichung (3) die Gestalt

(7) $$1+x+iy = e^{\log \sqrt{(1+x)^2+y^2}} (\cos \lambda_1 + i \sin \lambda_1),$$

die Ausziehung der positiven Mten Wurzel aus der Exponentialfunction mit reellem Exponenten wird vermittelst einer Division des Exponenten durch die Zahl M bewirkt, und die M Wurzeln der Gleichung (5) sind die folgenden

(8) $$e^{\frac{1}{M} \log \sqrt{(1+x)^2+y^2}} \left(\cos \frac{\lambda_1 + 2 k_M \pi}{M} + i \sin \frac{\lambda_1 + 2 k_M \pi}{M}\right),$$

wo k_M die Reihe der ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots M-1$ durchläuft. Die Function $F\left(x+iy, \frac{1}{M}\right)$ ist gleich einer *bestimmten* von diesen Wurzeln, und es fragt sich nur, welchen Werth die ganze Zahl k_M erhalten muss, um gerade diese Wurzel darzustellen.

Bei der Beantwortung gehen wir wie in § 115 zu Werke, beschränken die Zahl M auf die Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots N-1$, wo N beliebig gross aber fest gewählt ist. Von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots N-1$ sei wieder Ω das kleinste gemeinsame Vielfache. Bei der Anwendung der Zahl Ω auf die so eben ausgeführte Betrachtung erhält die Function $F\left(x+iy, \frac{1}{\Omega}\right)$ den Ausdruck

(9) $$F\left(x+iy, \frac{1}{\Omega}\right) = e^{\frac{1}{\Omega} \log \sqrt{(1+x)^2+y^2}} \left(\cos \frac{\lambda}{\Omega} + i \sin \frac{\lambda}{\Omega}\right).$$

Die Grösse $\lambda = \lambda_1 + 2k\pi$ ist mit derjenigen ganzen Zahl k gebildet, welche genommen werden muss, damit die auf der rechten Seite befindliche Wurzel der Gleichung $w^\Omega = 1 + x + iy$

der bestimmten Grösse $F\left(x+iy,\ \frac{1}{\Omega}\right)$ gleich sei. Mit Hülfe der Gleichung (9) lässt sich die Function $F(x+iy, n)$ für jeden rationalen ganzzahligen Bruch $\frac{G}{M}$ als Werth von n darstellen, bei dem M aus der Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots N-1$ genommen ist; denn man hat wie in § 115, da M ein Theiler von Ω ist, eine ganze Zahl M', für die $MM' = \Omega$ ist, und erhält deshalb durch Erhebung der Gleichung (9) auf die ganze Potenz von dem Exponenten GM', indem

$$\left(F\left(x+iy, \frac{1}{\Omega}\right)\right)^{GM'} = F\left(x+iy,\ \frac{G}{M}\right)$$

ist, die Gleichung

$$(10)\quad F\left(x+iy,\ \frac{G}{M}\right) = e^{\frac{G}{M}\log\sqrt{(1+x)^2+y^2}}\left(\cos\frac{G\lambda}{M} + i\sin\frac{G\lambda}{M}\right).$$

Für den Werth $G=1$ ist in derselben die Gleichung

$$(10^*)\quad F\left(x+iy,\ \frac{1}{M}\right) = e^{\frac{1}{M}\log\sqrt{(1+x)^2+y^2}}\left(\cos\frac{\lambda}{M} + i\sin\frac{\lambda}{M}\right)$$

enthalten. Ihre rechte Seite stimmt der Form nach mit dem Ausdrucke (8) überein, welcher vorhin für die Function $F\left(x+iy,\ \frac{1}{M}\right)$ aufgestellt worden ist, unterscheidet sich aber insofern von dem Ausdrucke (8), als dort für jeden einzelnen Werth der Zahl M die in dem Winkel $\lambda_1 + 2k_M\pi$ auftretende Zahl k_M unbekannt war, mithin möglicherweise auch differiren konnte, während hier die in dem entsprechenden Winkel $\lambda = \lambda_1 + 2k\pi$ erscheinende Zahl k ein für alle Male durch die Gleichung (9) bestimmt ist. Die Kenntniss dieser Zahl k bildet aber gerade das zu erstrebende Ziel.

Um dasselbe zu erreichen, verfolgen wir den in § 115 eingeschlagenen Weg. In dem Ausdrucke der mit der Binomialreihe gebildeten Differenz $F(x+iy, n) - 1$ werden alle Coefficienten durch die Grösse n theilbar, und es entsteht, indem durch n wirklich dividirt wird, die Gleichung

$$(11)\qquad \frac{F(x+iy,n)-1}{n} = \frac{(x+iy)}{1} + \frac{n-1}{2}(x+iy)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}(x+iy)^3 + \ldots$$

Wenn nun die Grösse n fortwährend numerisch abnimmt, so nähern sich die auf einander folgenden Coefficienten beziehungsweise den Werthen

$$(11^*) \qquad 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

die hervorgehende Reihe bleibt vermöge der aufgestellten Regeln, so lange der Betrag r der Grösse $x+iy$ kleiner als die Einheit ist, noch convergent, und man erhält für den Grenzwerth des Quotienten $\frac{F(x+iy,n)-1}{n}$ die Bestimmung

$$(12) \quad \lim \frac{F(x+iy,n)-1}{n} = x+iy - \frac{(x+iy)^2}{2} + \frac{(x+iy)^3}{3} \mp \ldots$$

Die Zahl Ω wird, wenn die Zahl N fortdauernd wächst, wie schon bemerkt, immer grösser, und der Bruch $\frac{1}{\Omega}$ immer kleiner. Der Werth der Function $F\left(x+iy, \frac{1}{\Omega}\right)$ nähert sich hiebei in seinem reellen Theile der Einheit, in seinem imaginären Theile der Null. Man sieht, wie in dem Ausdrucke, der sich in der Gleichung (9) auf der rechten Seite befindet, der Exponentialausdruck, der den absoluten Betrag darstellt, gegen die Einheit convergirt, und schliesst, dass der Winkel $\frac{\lambda}{\Omega}$, dessen Cosinus sich der Einheit und dessen Sinus sich der Null nähert, numerisch gegen die Null abnimmt. Wenn der Kürze halber

$$(13) \qquad \log \sqrt{(1+x)^2+y^2} = \varkappa$$

gesetzt wird, so nimmt die rechte Seite der Gleichung (9) die Gestalt

$$(14) \qquad e^{\frac{\varkappa}{\Omega}}\left(\cos\frac{\lambda}{\Omega} + i\sin\frac{\lambda}{\Omega}\right)$$

an und darf deshalb nach der Gleichung (2) des vorigen § durch die stets convergirende Exponentialreihe dargestellt werden

$$(15) \quad e^{\frac{\varkappa}{\Omega}}\left(\cos\frac{\lambda}{\Omega} + i\sin\frac{\lambda}{\Omega}\right) = 1 + \left(\frac{\varkappa+i\lambda}{\Omega}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\varkappa+i\lambda}{\Omega}\right)^2 + \ldots$$

Hieraus folgt, dass die Differenz $e^{\frac{\varkappa}{\Omega}}\left(\cos\frac{\lambda}{\Omega} + i\sin\frac{\lambda}{\Omega}\right) - 1$, durch

die Grösse $\frac{\varkappa + i\lambda}{\Omega}$ dividirt, indem $\frac{\varkappa}{\Omega}$ und $\frac{\lambda}{\Omega}$ numerisch abnehmen, sich der Einheit als Grenze nähert, oder in Zeichen

$$(16) \qquad \lim \frac{e^{\frac{\varkappa}{\Omega}}\left(\cos\frac{\lambda}{\Omega} + i\sin\frac{\lambda}{\Omega}\right) - 1}{\frac{\varkappa + i\lambda}{\Omega}} = 1.$$

Die Gleichung (12) liefert, wenn $n = \frac{1}{\Omega}$ gesetzt und $F\left(x + iy, \frac{1}{\Omega}\right)$ nach (9) durch den Ausdruck

$$e^{\frac{\varkappa}{\Omega}}\left(\cos\frac{\lambda}{\Omega} + i\sin\frac{\lambda}{\Omega}\right)$$

vertreten wird, die Gleichung

$$(17) \quad \lim \frac{e^{\frac{\varkappa}{\Omega}}\left(\cos\frac{\lambda}{\Omega} + i\sin\frac{\lambda}{\Omega}\right) - 1}{\frac{1}{\Omega}} = x + iy - \frac{(x+iy)^2}{2} + \frac{(x+iy)^3}{3} \mp \ldots$$

Der Quotient auf der linken Seite von (16), der sich der Einheit nähert, wird durch Multiplication mit der Grösse $\varkappa + i\lambda$ gleich dem Quotienten auf der linken Seite von (17), dessen Grenzwerth die Summe der unendlichen Reihe $x + iy - \frac{(x+iy)^2}{2} \pm \ldots$ ist. Folglich convergirt die Grösse $\varkappa + i\lambda$ bei wachsendem Ω gegen die Summe dieser Reihe, und in Bezug auf einen wachsenden Werth von Ω wird $\varkappa + i\lambda$, wie folgt, ausgedrückt

$$(18) \qquad \varkappa + i\lambda = x + iy - \frac{(x+iy)^2}{2} + \frac{(x+iy)^3}{3} \mp \ldots$$

Nun weiss man, dass $\varkappa = \log\sqrt{(1+x)^2 + y^2}$, $\lambda = \lambda_1 + 2k\pi$ ist, wo die Grösse λ_1 nach (4) den zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegenden arcus tang $\frac{y}{1+x}$ bedeutet; mithin kommt

$$(19) \qquad \varkappa + i\lambda = \log\sqrt{(1+x)^2 + y^2} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x} + 2k\pi\right).$$

Die auf der rechten Seite von (18) befindliche Summe stellt nach den entwickelten Grundsätzen, so lange der Betrag r der Grösse $x + iy$ kleiner als die Einheit ist, eine stetige Function der Grösse $x + iy$ dar, und der rein imaginäre Theil derselben

nähert sich der Null, wenn die Grösse y sich der Null nähert. Der in (19) angegebene Ausdruck der Grösse $\varkappa + i\lambda$ ist ebenfalls in seinem reellen und seinem imaginären Theil eine stetige Function von den Variabeln x und y. Wofern y sich der Null nähert, so nähert sich der reelle Theil dem Grenzwerthe $\sqrt{(1+x)^2} = 1+x$ und der imaginäre Theil, da die Function $\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}$ vermöge der getroffenen Voraussetzung gegen die Null convergirt, dem Grenzwerthe $i\,2\,k\,\pi$. Aus der Gleichung (19) ist zu schliessen, dass die Grenzwerthe sowohl für den reellen wie für den imaginären Theil einander gleich sind. *Folglich muss die Grösse $2k\pi$ und daher die Zahl k gleich der Null sein. Die Bestimmung der Grösse $\varkappa + i\lambda$ wird mithin durch die Gleichung*

$$(20) \qquad \varkappa + i\lambda = \log\sqrt{(1+x)^2+y^2} + i \operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}$$

gegeben, bei der $\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}$ *zwischen den Grenzen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{\pi}{2}$ *eingeschlossen ist.*

Die Gleichung (10) liefert nunmehr die Bestimmung der Function $F\left(x+iy, \frac{G}{M}\right)$ für irgend einen rationalen Bruch $\frac{G}{M}$ als Werth von n, wie folgt,

$$(21) \qquad F\left(x+iy, \frac{G}{M}\right) = e^{\frac{G\varkappa}{M}}\left(\cos\frac{G\lambda}{M} + i\sin\frac{G\lambda}{M}\right).$$

Hiemit wird zugleich diejenige Wurzel der reinen Gleichung $w^M = 1+x+iy$ characterisirt, welche nach (10*) durch die Function $F\left(x+iy, \frac{1}{M}\right)$ dargestellt ist. In dem vorigen § ist nachgewiesen, dass der reelle und der imaginäre Theil der Function $F(x+iy, n)$, so lange der Betrag r unter der Einheit liegt, stetige Functionen der Grösse n sind; desgleichen sind unter derselben Voraussetzung die Ausdrücke $e^{n\varkappa}\cos n\lambda$ und $e^{n\varkappa}\sin n\lambda$ stetige Functionen der Grösse n. Daher ergiebt sich aus (21) die für einen beliebigen reellen Werth der Grösse n gültige Gleichung, in welcher $\varkappa$ und λ durch ihre vollständigen Ausdrücke ersetzt sind,

$$(22)\qquad F(x+iy,n)$$
$$=e^{n\log\sqrt{(1+x)^2+y^2}}\left(\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}\right)+i\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}\right)\right).$$

Sie enthält die Werthbestimmung der Binomialreihe für alle complexen Argumente $x+iy$, deren Betrag r kleiner als die Einheit ist.

§ 119. Fortsetzung. Vollständige Werthbestimmung der Binomialreihe.

Es bleibt jetzt noch übrig zu ermitteln, unter welchen Bedingungen die Binomialreihe für ein Argument $x+iy$ convergirt, dessen Betrag r gleich der Einheit ist, und das die Gestalt $\cos\psi+i\sin\psi$ annimmt. Aus der Darstellung der Binomialreihe in (2) des § 117 wird dann die folgende

$$(1)\qquad 1+\frac{n}{1}\cos\psi+\ldots+\frac{n(n-1)..(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}\cos q\psi+..$$
$$+i\left(\frac{n}{1}\sin\psi+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}\sin q\psi+\ldots\right).$$

Da die Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels ψ stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$ bleiben, aber für ein wachsendes Vielfache sich nicht einer festen Grenze und auch nicht der Null nähern, da ferner die Glieder einer Reihe, falls sie convergiren soll, mit wachsendem Zeiger numerisch abnehmen müssen, so ist für die Convergenz des reellen und des imaginären Theiles von (1) nothwendig, dass der Coefficient $\frac{n(n-1)..(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}$ mit wachsendem Zeiger q sich der Null nähere. Man kann dem Coefficienten vermöge einer für den einzelnen Factor schon angewendeten Bemerkung die Gestalt geben

$$(2)\qquad \binom{n}{q}=\frac{n(n-1)..(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}$$
$$=(-1)^q\left(1-\frac{n+1}{1}\right)\left(1-\frac{n+1}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{n+1}{q}\right).$$

Sie fällt, abgesehen von der Potenz $(-1)^q$, mit der Gestalt der Producte zusammen, deren Verhalten bei einer wachsenden Zahl von Factoren am Schlusse des § 111 nachgewiesen ist. An die

Stelle der dort mit $-\alpha$ und hierauf mit $+\alpha$ bezeichneten reellen Grösse, wobei α immer einen positiven Werth bedeutet, tritt gegenwärtig die reelle Grösse $-(n+1)$. Weil nun das mit $-\alpha$ gebildete Product bei unendlicher Ausdehnung gegen die Null convergirt, das mit $+\alpha$ gebildete Product bei gleicher Ausdehnung über jedes Mass hinaus wächst, so hat der Coefficient (2) die Eigenschaft, für eine wachsende Zahl q sich der Null zu nähern, sobald die Grösse $n+1$ positiv ist, dagegen numerisch über jedes Mass zu wachsen, sobald die Grösse $n+1$ negativ ist. Aus diesem Grunde *kann weder der reelle noch der imaginäre Theil der Reihe* (2) *convergiren, wenn die Grösse n negativ und numerisch grösser als die Einheit ist.* Für den Fall, dass die Grösse n positiv ist, oder zwischen den Grenzen 0 und -1 liegt, nehmen die Glieder des reellen und des imaginären Theiles bei wachsendem Zeiger numerisch ab; ob aber die betreffenden Reihen bei dieser Voraussetzung convergent seien, muss noch festgestellt werden.

Es ist schon in § 117 auf die Thatsache aufmerksam gemacht worden, dass, weil die auf der rechten Seite der obigen Gleichung (2) vorkommenden Factoren von einer bestimmten Stelle ab sämmtlich positiv werden, und weil der Factor $(-1)^q$ fortwährend sein Vorzeichen wechselt, die Coefficienten selbst von einem entsprechenden Zeiger ab ebenfalls immer ihr Vorzeichen wechseln müssen. Es sei ν die grösseste positive ganze Zahl, die unter der positiven Grösse $n+1$ liegt, mithin $\nu+1$ die kleinste positive ganze Zahl, die über der positiven Grösse $n+1$ liegt, so haben die Factoren $\left(1-\frac{n+1}{1}\right), \left(1-\frac{n+1}{2}\right), \ldots \left(1-\frac{n+1}{\nu}\right)$ das negative, dagegen die Factoren $\left(1-\frac{n+1}{\nu+1}\right), \left(1-\frac{n+1}{\nu+2}\right), \ldots$ das positive Vorzeichen. Wenn man deshalb die aufeinander folgenden Coefficienten $\binom{n}{q}$ mit dem zugeordneten Factor $(-1)^q$ multiplicirt, so erhalten die entstehenden Producte $(-1)^q\binom{n}{q}$ von dem Zeiger $q=\nu+1$ ab sämmtlich dasselbe Vorzeichen, welches der Ausdruck $(-1)^\nu\binom{n}{\nu}$ besitzt und das durch die Potenz $(-1)^\nu$ bezeichnet wird. In dem Falle, dass die Grösse $n+1$ zwischen 0 und 1 liegt, bleibt die Bestimmung auch noch

gültig, wofern unter $\binom{n}{0}$ die positive Einheit verstanden wird. Nun gehören zu den Werthen $x + iy = \cos\psi + i \sin\psi$, für welche der Betrag $r = 1$ ist, auch die beiden reellen Werthe $x + iy = 1$ und $x + iy = -1$, in denen der Winkel ψ respective $= 0$ oder $= \pm\pi$ ist, und bei deren Substitution die Binomialreihe selbstverständlich nur aus reellen Gliedern besteht. Die Anwendung des letztern Werthes $x + iy = -1$ bringt die Reihe hervor

$$(3)\quad 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \mp \ldots + (-1)^q \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q} + \ldots$$

Wie man sieht, erscheinen hier von dem Zeiger $q = \nu + 1$ ab die absoluten Werthe der sämmtlichen Coefficienten mit einem und demselben Vorzeichen genommen und addirt; das gemeinsame Vorzeichen wird durch die Potenz $(-1)^\nu$ ausgedrückt, das heisst, es ist positiv oder negativ, je nachdem ν eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet. Der reelle und der imaginäre Theil von (1) sind nun nothwendig convergent, wenn die von einem bestimmten Zeiger $q > \nu$ ab unendlich ausgedehnte Summe der absoluten Werthe der Coefficienten $\binom{n}{q}$ convergirt, da bei den von einem bestimmten Zeiger ab beliebig weit ausgedehnten Summen

$$\binom{n}{q+1} \cos(q+1)\psi + \ldots + \binom{n}{q+t} \cos(q+t)\psi,$$

$$\binom{n}{q+1} \sin(q+1)\psi + \ldots + \binom{n}{q+t} \sin(q+t)\psi$$

die Multiplication der einzelnen Glieder mit den Cosinus und den Sinus der Vielfachen des Winkels ψ nichts anderes als eine Verkleinerung des absoluten Betrages herbeiführen kann. Auch ergiebt sich hieraus, dass, wenn die Zahl q so gewählt wird, dass die Summe $(-1)^{q+1}\binom{n}{q+1} + \ldots + (-1)^{q+t}\binom{n}{q+t}$ für $q > \nu$ und für einen beliebig grossen Werth von t numerisch kleiner als eine beliebig kleine gegebene Grösse θ ist, *jede der so eben angeführten beiden Summen für dieselbe Zahl q und bei jedem Werthe des Winkels ψ numerisch kleiner als θ bleibt.* Folglich braucht man nur die Convergenz der Summe

$$(-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu+1} + (-1)^{\nu+2}\binom{n}{\nu+2} + \ldots$$

zu beweisen, um sicher zu sein, dass der reelle und der imaginäre Theil von (1) convergent sind.

Die Reihe (3) hat aber die merkwürdige Eigenschaft, dass jede endliche Zahl von auf einander folgenden Gliedern derselben sich durch einen einfachen Ausdruck darstellen lässt. Die Addition von zwei Gliedern ergiebt den Werth $1-n$, die Hinzufügung des dritten Gliedes $-\frac{n}{2}(1-n)$ den Werth $(1-n)\left(1-\frac{n}{2}\right)$, und die Addition von $(q+1)$ Gliedern, wie leicht successive zu erkennen ist, das Resultat

$$(4)\quad 1-n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+(-1)^q\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1.2.3\ldots q}$$
$$=(1-n)\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(1-\frac{n}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{q}\right).$$

Das auf der rechten Seite erscheinende Product besitzt nach den schon benutzten Sätzen des § 112 die Eigenschaft, bei wachsender Zahl q sich der Null zu nähern, wenn n eine positive Grösse, und über jedes Mass zu wachsen, wenn n eine negative Grösse ist. Die linke Seite kann als das Aggregat der endlichen Summe $1-\binom{n}{1}\pm\ldots+(-1)^\nu\binom{n}{\nu}$ und der unendlichen Summe $(-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}\binom{n}{\nu+2}+\ldots$ aufgefasst werden. Wofern das Aggregat sich dem Werthe Null nähert, so muss die zweite Summe gegen einen Grenzwerth convergiren, der durch den negativ genommenen Werth der ersten endlichen Summe dargestellt wird. Aus diesem Grunde convergirt die Summe

$$(-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu+1}+(-1)^{\nu+2}\binom{n}{\nu+2}+\ldots$$

sobald die Grösse n positiv ist, und sie wächst über jedes Mass, sobald die Grösse n negativ ist, wobei für die letztere gegenwärtig die Grenzen -1 und 0 bestehen. *Mithin ist jetzt erwiesen, dass der reelle und der imaginäre Theil der Reihe* (1) *convergiren, wofern die Grösse n einen positiven Werth hat.*

Um die Convergenz der Reihe (1) für Werthe von n zu beurtheilen, die zwischen den Grenzen -1 und 0 liegen, möge das Argument $x+iy=\cos\psi+i\sin\psi$ wieder durch den einen Buchstaben z bezeichnet, und die Summe der $q+1$ ersten Glieder betrachtet werden

$$(5)\qquad s_q=1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\ldots+\binom{n}{q}z^q.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit dem Factor $1+z$, so kommt

$$(6)\quad (1+z)\,s_q = 1 + \left(\binom{n}{1}+1\right)z + \left(\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right)z^2 + \dots$$
$$+ \left(\binom{n}{q}+\binom{n}{q-1}\right)z^q + \binom{n}{q}z^{q+1}.$$

In Folge der Gleichungen (10) des § 117 ist aber

$$\binom{n}{1}+1=\binom{n+1}{1},\ \binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2},\dots$$

und deshalb

$$(7)\quad (1+z)\,s_q = 1+\binom{n+1}{1}z+\binom{n+1}{2}z^2+\dots+\binom{n+1}{q}z^q+\binom{n}{q}z^{q+1}.$$

Die Summe der auf der rechten Seite befindlichen $q+1$ ersten Glieder kann aus s_q erhalten werden, indem die Grösse $n+1$ an die Stelle der Grösse n tritt. Da die Grösse n zwischen 0 und -1 liegt, so ist die Grösse $n+1$ positiv, und daher convergirt die Summe der $q+1$ ersten Glieder auf der rechten Seite von (7) bei wachsendem q, indem für diese Voraussetzung die Convergenz der Binomialreihe feststeht. Das auf der rechten Seite von (7) hinzuzuaddirende Glied $\binom{n}{q}z^{q+1}=\binom{n}{q}(\cos(q+1)\psi+i\sin(q+1)\psi)$ nähert sich aber in seinem reellen und seinem imaginären Theile der Null, weil der Coefficient $\binom{n}{q}$ in Folge des positiven Werthes der Grösse $n+1$ diese Eigenschaft hat. Mithin convergirt die rechte Seite von (7) bei wachsendem q gegen eine feste Grenze. Die linke Seite $(1+z)\,s_q$ hat deshalb dieselbe Eigenschaft, und daraus folgt das gleiche für den Factor s_q bei jedem Werthe des Factors $1+z$, den einzigen Werth Null ausgenommen. Der Factor $1+z$ wird dann und nur dann gleich Null, sobald $z=-1$ ist, und die Erörterung der Gleichung (4) hat ergeben, dass die Binomialreihe für diesen Werth, wofern n sich zwischen den Grenzen 0 und -1 befindet, nicht convergirt. Demnach ist zu erkennen, *dass der reelle und der imaginäre Theil der Reihe* (1), *sobald die Grösse n zwischen den Grenzen* -1 *und* 0 *eingeschlossen ist, für jedes Argument $x+yi=\cos\psi+i\sin\psi$ convergirt, mit Ausnahme des Arguments $x+iy=-1$.* Die Reihe (1) geht bei der Voraussetzung $n=-1$ in die geometrische Reihe über, und hat dann nicht mehr die Eigenschaft zu convergiren, wie in § 98 erwähnt ist.

Für die in (2) des § 117 enthaltene allgemeine Darstellung der Binomialreihe

$$1+\frac{n}{1}r\cos\psi+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}r^2\cos 2\psi+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots q}r^q\cos q\psi+\ldots$$
$$+i\left(\frac{n}{1}r\sin\psi+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}r^2\sin 2\psi+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots q}r^q\sin q\psi+\ldots\right)$$

darf jetzt das Resultat ausgesprochen werden, dass der reelle und der imaginäre Theil jedenfalls convergiren, so lange der Betrag r kleiner als die Einheit ist, dass sie für den Betrag $r=1$ und für jeden Werth des Winkels ψ convergiren, wenn die Grösse n einen positiven Werth hat, dass sie für den Betrag $r=1$ und für jeden Werth des Winkels ψ mit Ausnahme des Werthes $\pm\pi$ convergiren, wenn die Grösse n negativ aber numerisch kleiner als die Einheit ist, und dass sie für den Betrag $r=1$ nicht convergiren, wenn die Grösse n negativ und numerisch grösser als die Einheit oder gleich der negativen Einheit ist. Indem man nun den reellen und den imaginären Theil der Binomialreihe als nach den positiven Potenzen der Grösse r fortschreitende Reihen auffasst, wird der in § 108 in Betreff der dortigen Reihe (4) bewiesene Satz anwendbar und führt zu der Consequenz, *dass der reelle und der imaginäre Theil der Binomialreihe in den Fällen, in welchen sie für den Werth $r=1$ convergiren, stetige Functionen der Grösse r sind für alle unter der Einheit liegenden Werthe der Grösse r, die Einheit selbst mit eingeschlossen.* Die für den reellen und den imaginären Theil der Binomialreihe unter der Voraussetzung $r<1$ abgeleiteten Ausdrücke, die in (22) des vorigen § enthalten sind, bleiben aber, wie eine noch nachzuholende Discussion zeigt, unter den erwähnten Bedingungen ebenfalls stetige Functionen der Variable r, wofern der Werth r der Einheit genähert wird und diesen Werth erreicht. *Folglich wird der Werth der Binomialreihe in allen aufgeführten Fällen, in welchen sie convergirt, durch die obige Gleichung*

$$(8)\qquad F(x+iy,n)$$
$$=e^{n\log\sqrt{(1+x)^2+y^2}}\left(\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}\right)+i\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}\right)\right)$$

dargestellt.

Sobald der imaginäre Theil des Arguments $x + iy$ verschwindet, wird auch der $\operatorname{arctg} \frac{y}{1+x}$ gleich Null, die Grösse $\sqrt{(1+x)^2 + y^2}$ verwandelt sich in die Grösse $\sqrt{(1+x)^2}$, die gleich dem positiven Werthe $1 + x$ ist, da die Grösse x numerisch nicht über die Einheit hinausgehen darf, und der Ausdruck $e^{n \log(1+x)}$ kann durch die Potenz $(1+x)^n$ ersetzt werden. Auf diese Weise entsteht für das die Einheit nicht übertreffende Argument x die folgende Gleichung, in welcher statt des Zeichens $F(x, n)$ die Reihe selbst eingeführt ist,

$$(9) \qquad 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots = (1+x)^n.$$

Die Reihe drückt demnach hier die mit dem beliebigen reellen Exponenten n gebildete Potenz des Binoms $1 + x$ aus und liefert eine Ausdehnung des für positive ganze Exponenten geltenden binomischen Lehrsatzes, woher sie den Namen der Binomialreihe erhalten hat.

Wir wollen nicht unterlassen, an dieser Stelle darauf aufmerksam zu machen, dass die Binomialreihe eine directe Lösung für *die Fundamentalaufgabe der Algebra* darbietet, *eine beliebig hohe Wurzel aus einer gegebenen Grösse zu bestimmen.* Wenn es sich darum handelt, *aus einer reellen positiven Grösse A die positive Mte Wurzel* zu ziehen, so sei E die kleinste positive ganze Zahl, für welche E^M grösser als die gegebene Grösse A ist. Dann ergiebt die Gleichung $\frac{A}{E^M} = 1 + x$ für x einen negativen unter der Einheit liegenden Werth, und bei der Substitution $n = \frac{1}{M}$ wird durch die Binomialreihe die Grösse $\frac{A^{\frac{1}{M}}}{E} = (1+x)^{\frac{1}{M}}$ dargestellt, mithin ist die gesuchte Grösse $A^{\frac{1}{M}}$ gleich dem Product der Grösse E in die Entwickelung der Potenz $(1+x)^{\frac{1}{M}}$. Wenn ferner *eine Mte Wurzel aus einer complexen Grösse $(A + iB)$ gefunden werden* soll, so lässt sich die letztere in die Gestalt bringen $\frac{A^2 + B^2}{A}\left(1 + \frac{iB}{A - iB}\right)$, wofern die

Grösse A nicht gleich Null ist. Wir machen nun die Voraussetzung, dass A nicht gleich Null und ausserdem noch positiv sei. Die Bestimmung einer Mten Wurzel aus der vorgelegten complexen Grösse zerfällt dann in die beiden Aufgaben, die positive Mte Wurzel aus der positiven Grösse $\frac{A^2+B^2}{A}$ zu bestimmen, und eine Mte Wurzel aus der complexen Grösse $1+\frac{iB}{A-iB}$ aufzusuchen. Die erste Aufgabe ist so eben behandelt worden. Giebt man der Grösse $1+\frac{iB}{A-iB}$ die Gestalt $1+x+iy$, so wird $x^2+y^2=\frac{B^2}{A^2+B^2}$, mithin, da A nicht gleich Null ist, gleich einer unter der Einheit liegenden Grösse. Wofern jetzt in der Binomialreihe $F(x+iy, n)$ das complexe Argument $x+iy=\frac{iB}{A-iB}$ substituirt und die Grösse $n=\frac{1}{M}$ genommen wird, so stellt dieselbe vermöge der obigen Gleichung (8) eine bestimmte Mte Wurzel der Grösse $1+\frac{iB}{A-iB}$ dar. Um für die Voraussetzung, dass in der gegebenen complexen Grösse $A+iB$ der Werth A negativ oder gleich Null sei, das entsprechende zu leisten und auch um in jedem Falle die sämmtlichen Mten Wurzeln der gegebenen Grösse darzustellen, genügt vermöge einer in § 40 angestellten Erörterung die Benutzung der Binomialreihe für die Werthe $x+iy=1+i$, $n=\frac{1}{M}$, da $\operatorname{arctg} 1$ gleich $\frac{\pi}{4}$, und deshalb nach der gegebenen Bestimmung die Function $F\left(1+i, \frac{1}{M}\right)=(\sqrt{2})^{\frac{1}{M}}\left(\cos\frac{\pi}{4M}+i\sin\frac{\pi}{4M}\right)$ ist.

§ 120. Reihe zur Darstellung der Functionen Logarithmus und Arcus tangentis.

Bei der Untersuchung der Binomialreihe ist in § 118 auf der rechten Seite der Gleichung (12) eine Reihe hervorgetreten, die ebenfalls zu den Grundreihen der Analysis gehört. Sie hat, wenn z statt $x+iy$ gesetzt wird, die Gestalt

$$(1)\qquad z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\mp\ldots+(-1)^{q-1}\frac{z^q}{q}\pm\ldots$$

und es ist an jener Stelle ausgesprochen, dass sie convergirt, so lange der absolute Betrag r des Arguments $z=x+iy$ kleiner als die Einheit ist, und alsdann eine stetige Function des Arguments z ausdrückt. Durch Betrachtungen, wie sie in § 117 über die Binomialreihe angestellt sind, erhellt aus dem Umstande, dass der Quotient jedes Coefficienten durch den vorhergehenden in der Reihe (1) abgesehen von dem Vorzeichen sich der Einheit nähert, die Richtigkeit des Behaupteten und zugleich die Thatsache, dass weder der reelle noch der imaginäre Theil der Reihe (1) convergirt, sobald der Betrag r des Arguments z grösser als die Einheit ist. Die Verbindung der Gleichungen (18) und (20) des § 118 liefert zugleich für ein Argument $x+iy$, dessen Betrag r unter der Einheit liegt, *die Werthbestimmung der Reihe*

$$(2)\quad x+iy-\frac{(x+iy)^2}{2}+\frac{(x+iy)^3}{3}\mp\ldots=\log\sqrt{(1+x)^2+y^2}+i\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x},$$

wo die Function Arcus tangentis zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen werden muss. Wir heben jetzt die beiden Reihen heraus, welche einem reellen und einem rein imaginären Argument entsprechen. Es sei zuerst $y=0$, mithin vermöge der Bedingung $r<1$ die reelle Grösse x zwischen -1 und $+1$ enthalten, so wird, wie früher bemerkt, $\sqrt{(1+x)^2}$ gleich der positiven Grösse $1+x$, der imaginäre Theil der Reihe und die Function $\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}$ verschwinden, und man erhält *die Darstellung der Function* $\log 1+x$ durch die Reihe

$$(3)\qquad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots$$

Wenn dagegen $x=0$ gesetzt wird, so muss wegen der Bedingung $r<1$ die reelle Grösse y zwischen den Grenzen -1 und $+1$ enthalten sein, der reelle Theil der Reihe wird gleich der Function $\log\sqrt{1+y^2}$, und der imaginäre Theil der Reihe, von dem Factor i befreit, gleich der zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$

und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmenden Function arctg y. Die Gleichsetzung der reellen Bestandtheile bringt ein Resultat, das schon in der Gleichung (3) enthalten ist, die Gleichsetzung der rein imaginären Bestandtheile liefert dagegen *die Darstellung der Function* arctg y vermöge der Reihe

$$\text{arctg}\, y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \mp \ldots \tag{4}$$

Die Reihe, durch welche in (3) für ein reelles Argument x die Function $\log(1+x)$ ausgedrückt ist, wird *die logarithmische Reihe* genannt, und derselbe Name auch auf die ebenso gebildete Reihe (1) übertragen, bei der das Argument z gleich einer complexen Grösse $x+iy$ ist.

Noch fehlt die Erörterung der Convergenz der Reihe (1) für diejenigen Werthe des Arguments, bei denen der Betrag r gleich der Einheit, also $x+iy = \cos\psi + i\sin\psi$ ist. Wenn die Summe der q ersten Glieder von (1) mit s_q bezeichnet wird

$$s_q = z - \frac{z^2}{2} + \frac{2^3}{3} \mp \ldots + (-1)^{q-1}\frac{z^q}{q}, \tag{5}$$

so ergiebt die Multiplication mit dem Factor $1+z$ die Gleichung

$$(1+z)\,s^q = z + \left(1 - \frac{1}{2}\right)z^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{3}\right)z^3 + \ldots \tag{6}$$
$$+ \left(\frac{(-1)^{q-2}}{q-1} + \frac{(-1)^{q-1}}{q}\right)z^q + \frac{(-1)^{q-1}}{q}\,z^{q+1}.$$

Die Coefficienten der Potenzen der Grösse z von der ersten bis zur $q$ten einschliesslich haben die Werthe

$$1,\ 1 - \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\ldots \frac{(-1)^{q-2}}{q-1} + \frac{(-1)^{q-1}}{q},$$

bei denen von dem zweiten an die Vorzeichen regelmässig abwechseln. Die absoluten Werthe der auf einander folgenden Coefficienten sind mithin

$$1,\ 1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\ldots \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}.$$

Die Summe der letztern ist gleich $2 - \frac{1}{q}$ und convergirt deshalb bei wachsendem q gegen eine feste Grenze. Folglich convergiren aus früher entwickelten Gründen auch der reelle und der imaginäre Theil der Summe

$$z + \left(1 - \frac{1}{2}\right) z^2 + \ldots + \left(\frac{(-1)^{q-2}}{q-1} + \frac{(-1)^{q-1}}{q}\right) z^q$$

bei der Substitution $z = \cos\psi + i \sin\psi$. Der auf der rechten Seite von (6) noch hinzuzufügende Ausdruck

$$\frac{(-1)^{q-1}}{q} z^{q+1} = \frac{(-1)^{q-1}}{q} (\cos(q+1)\psi + i \sin(q+1)\psi)$$

nähert sich aber bei wachsendem q der Null, so dass die rechte Seite von (6) bei wachsendem q gegen einen festen Grenzwerth convergiren muss. Hieraus ist dann wie im vorigen § zu schliessen, dass die Summe s_q sich einem festen Grenzwerthe nähert, sobald der Factor $1+z$ einen von der Null verschiedenen Werth hat. Für den Werth $z = -1$, welcher diese Ausnahme constituirt, wird $s_q = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ldots - \frac{1}{q}$, also gleich dem negativ genommenen Werthe der Summe der reciproken Werthe der natürlichen Zahlen, deren Betrag nach § 105 für ein wachsendes q jede Grösse überschreitet. Es ergiebt sich also, *dass die Reihe* (1) *in ihrem reellen nnd ihrem imaginären Theile für jedes Argument* $z = x + iy = \cos\psi + i \sin\psi$ *convergirt, den Werth* $z = \cos\psi + i\sin\psi = -1$, *bei dem der innerhalb einer Kreisperipherie angenommene Winkel* ψ *gleich* $\pm\pi$ *ist, ausgenommen.*

Sobald in der logarithmischen Reihe das Argument $x + iy = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ substituirt wird, so erscheinen der reelle und der imaginäre Theil, wie folgt,

$$(7) \qquad r\cos\psi - \frac{r^2}{2}\cos 2\psi + \frac{r^3}{3}\sin 3\psi \mp \ldots$$
$$+ i\left(r\sin\psi - \frac{r^2}{2}\sin 2\psi + \frac{r^3}{3}\sin 3\psi \mp \ldots\right).$$

Jeder von beiden bildet eine nach den positiven Potenzen der Grösse r geordnete Reihe, die convergirt, wofern die positive Grösse r unter der Einheit liegt, und die für jeden innerhalb einer Kreisperipherie liegenden Werth des Winkels ψ, mit Ausnahme des Werthes $\pm\pi$, auch bei der Voraussetzung $r = 1$ convergirt. Nach einem im vorigen § benutzten Satze des § 108 *sind daher der reelle und der imaginäre Theil der logarithmischen Reihe stetige Functionen der Grösse* r *für* $r < 1$, *die mit der bezeichneten Ausnahme noch stetig bleiben, wenn die Grösse* r *bei stetiger Annäherung den Grenzwerth der positiven Einheit er-*

reicht. Es kommt jetzt darauf an, zu erkennen, ob der auf der rechten Seite der Gleichung (2) für den reellen und den imaginären Theil der logarithmischen Reihe bei der Annahme $r<1$ abgeleitete Ausdruck sich ebenfalls bei dem Uebergange zu dem Werthe $r=1$ stetig verhalten. Wenn dies nämlich der Fall ist, so besteht die Gleichung (2) auch für die Voraussetzung $r=1$. Die Function $\log u$ ist eine stetige Function des positiven Arguments u. Denn wofern $u+h>u>0$ ist, so gilt nach § 102 die Gleichung $\log(u+h)-\log u=\log\left(1+\frac{h}{u}\right)$; der Logarithmus der die Einheit übertreffenden Grösse $\frac{h}{u}$ ist positiv, muss aber für einen abnehmenden Werth der Grösse h beliebig klein werden. Denn sei $\log\left(1+\frac{h}{u}\right)=x$, so ist $e^x=1+\frac{h}{u}$, andrerseits aber folgt aus (14) des § 114, dass $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots$ mithin für jedes positive x grösser als der Werth $1+x$ ist, weshalb $x<\frac{h}{u}$ sein muss. Die Function $\operatorname{arctg} v$ ist vermöge einer am Schlusse des § 104 gemachten Bemerkung, sobald sie auf den Bereich zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ eingeschränkt wird, eine stetige Function ihres von einem beliebig grossen negativen Werthe bis zu einem beliebig grossen positiven Werthe auszudehnenden Arguments v. Nun geht die rechte Seite der Gleichung (2), sobald $x+iy=r(\cos\psi+i\sin\psi)$ gesetzt wird, in den Ausdruck

$$(8)\qquad \log\sqrt{(1+r\cos\psi)^2+r^2\sin^2\psi}+i\operatorname{arctg}\frac{r\sin\psi}{1+r\cos\psi}$$

über. Der Winkel ψ, der innerhalb einer Kreisperipherie eindeutig bestimmt ist, möge so gewählt sein, dass er zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegt; diese Grenzen selbst sind gegenwärtig aus dem erwähnten Grunde von der Betrachtung auszuschliessen. Alsdann kann der Ausdruck $1+r\cos\psi$ nicht gleich Null werden; bei der Annäherung der Grösse r an die Einheit verwandelt sich die unter dem Zeichen des Logarithmus befindliche Grösse stetig in den von der Null verschiedenen

Werth $\sqrt{2+2\cos\psi}$, und die unter dem Zeichen des Arcus tangentis stehende Grösse stetig in den Werth $\dfrac{\sin\psi}{1+\cos\psi} = \dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$.

Weil aber die Function Arcus tangentis in dem Intervall zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen werden soll, und gleichzeitig der Bogen $\frac{\psi}{2}$ nach der Voraussetzung zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fällt, so ist der Werth $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}\right)$ gleich dem Bogen $\frac{\psi}{2}$ selbst.

Die rechte Seite der Gleichung (2) convergirt daher, indem die Grösse r in die Einheit übergeht, ebenfalls stetig gegen den Werth $\log\sqrt{2+2\cos\psi} + i\,\frac{\psi}{2}$, und wir haben jetzt den vollständigen Beweis geliefert, dass der letztere für jeden Werth des Winkels ψ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ mit Ausschluss der Grenzen die Summe der Reihe (7) bei der Annahme $r=1$ ausdrückt. So entsteht die Gleichung

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\cos\psi - \frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{1}{3}\cos 3\psi \mp \dots \\ &+ i\left(\sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi \mp \dots\right) \\ &= \log\sqrt{2+2\cos\psi} + i\,\frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Die Berechtigung, in der Gleichung (2) die complexe Grösse $x+iy$ so zu wählen, dass $\sqrt{x^2+y^2}=1$ ist, wofern nur nicht $x+iy=-1$ ist, hat zur Folge, dass ein reeller Werth des Arguments zwar gleich $+1$, aber nicht $=-1$ genommen werden darf, während für einen rein imaginären Werth des Arguments $+i$ und $-i$ gestattet sind. Durch die Substitution $x=+1$ entsteht aus der Gleichung (3), die sich auf die Function $\log(1+x)$ bezieht, das Resultat

$$(10)\qquad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Ferner ergiebt die Gleichung (4), welche sich auf die Function Arcus tangentis y bezieht, indem $y=1$ gesetzt wird, da zu der Tangente vom Betrage der Einheit zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ der Bogen $\frac{\pi}{4}$ gehört, die folgende *Darstellung des Werthes* $\frac{\pi}{4}$,

$$(11) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Die vorliegende Reihe rührt von *Leibnitz* her und wird nach ihm die *Leibnitz'sche Reihe* genannt.

Die Gleichung (9) zerfällt durch die Trennung des Reellen und des Imaginären in die beiden Gleichungen

$$(12) \qquad \log \sqrt{2+2\cos\psi} = \cos\psi - \frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{1}{3}\cos 3\psi \mp \dots,$$

$$(13) \qquad \frac{\psi}{2} = \sin\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi + \frac{1}{3}\sin 3\psi \mp \dots,$$

die nach ihrer Ableitung für alle Werthe des Winkels ψ zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ gelten, diese Grenzen selbst ausgeschlossen.

Es ist nun von Bedeutung, zu ermitteln, was aus der Summe der q ersten Glieder der einen und der andern Reihe wird, sobald der Winkel ψ den Werth $+\pi$ oder $-\pi$ annimmt. Die Grössen $\cos\psi$, $\cos 2\psi$, $\cos 3\psi$, .. $\cos q\psi$ erhalten dann abwechselnd die Werthe 1, -1, und die Summe der q ersten Glieder der ersten Reihe wird, wie schon oben bemerkt, gleich der Summe $-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{q}\right)$, deren absoluter Werth mit wachsendem q über jedes Mass hinauswächst. Dagegen werden die Grössen $\sin\psi$, $\sin 2\psi$, $\sin 3\psi$, .. $\sin q\psi$ für den Werth $\psi=\pi$ oder $-\pi$ sämmtlich gleich der Null, weshalb die Summe der q ersten Glieder der zweiten Reihe verschwindet, welchen bestimmten Werth man der Zahl q auch beilegen möge. Die zweite Reihe zeigt also die auffallende Erscheinung, dass ihre unendlich ausgedehnte Summe, wenn ε eine bestimmte aber beliebig kleine positive Grösse bedeutet, für das Argument $\pi-\varepsilon$

den Werth $\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$, für das Argument $-\pi + \varepsilon$ den Werth $\frac{1}{2}(-\pi + \varepsilon)$ darstellt, dagegen für das Argument π oder $-\pi$ der Null gleich wird. Die Differenz der Werthe der Summe für die Argumente $\pi - \varepsilon$ und π beträgt $\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$, für die Argumente $-\pi + \varepsilon$ und π den Werth $\frac{1}{2}(-\pi + \varepsilon)$. Somit wird die Differenz der Werthe der Summe in keinem der beiden Fälle für eine beliebige kleine Differenz der Argumente selbst beliebig klein, und erfährt daher in beiden Fällen *eine Unterbrechung der Stetigkeit.*

Der gelieferte Nachweis, dass sowohl die Function $\log \sqrt{(1+r\cos\psi)^2 + r^2 \sin^2\psi}$ wie die Function $\operatorname{arctg} \frac{r \sin\psi}{1 + r\cos\psi}$ für alle zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommenen Werthe des Winkels ψ mit Ausnahme von π oder $-\pi$ sich stetig ändern, wenn die positive Grösse r wachsend sich der Einheit nähert und ihr gleich wird, schliesst vermöge der Stetigkeit der Exponentialfunction mit reellem Argument und der Stetigkeit der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus auch den Nachweis in sich, dass die rechte Seite der Gleichung (8) des vorigen § unter derselben Voraussetzung sich ebenfalls stetig ändert, sobald die Grösse r in die Einheit übergeht. Bei der für die Binomialreihe auszuführenden Werthbestimmung, auf welche sich die erwähnte Gleichung (8) des vorigen § bezieht, ist für die Werthe der Grösse n, die zwischen -1 und 0 liegen, der Werth $x+iy=-1$, mithin bei $r=1$ der Werth $\psi = \pm\pi$ ebenfalls ausgeschlossen worden. Für positive Werthe der Grösse n darf dagegen $x+iy=-1$, und demgemäss für den Winkel $\psi = \pm\pi$ die Grösse r gleich der Einheit werden, und es bleibt nothwendig, für diesen Fall die Stetigkeit des betreffenden Ausdruckes besonders zu begründen. Zu diesem Zwecke ersetzen wir die Exponentialfunction $e^{n \log \sqrt{(1+x)^2+y^2}}$ durch den ihr gleichen Ausdruck $\left(\sqrt{(1+x)^2+y^2}\right)^n$, und erhalten statt der mehrfach angeführten Gleichung die Gleichung

(14) $F(x+iy, n)$

$$=\left(\sqrt{(1+x)^2+y^2}\right)^n\left(\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}\right)+i\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x}\right)\right).$$

Zunächst ist für $r<1$ die complexe Grösse $x+iy$ gleich $r(\cos\psi+i\sin\psi)$ zu setzen; bei dem Werthe $\psi=\pi$ oder $-\pi$ wird $\cos\psi=-1$, $\sin\psi=0$, das Argument $\frac{y}{1+x}=\frac{r\sin\psi}{1+r\cos\psi}$ erhält einen von Null verschiedenen Nenner und einen verschwindenden Zähler, weshalb dasselbe verschwindet und mit ihm der Arcus tangentis $\frac{y}{1+x}$. Die rechte Seite der Gleichung (14) geht daher in den Werth $\left(\sqrt{(1-r)^2}\right)^n=(1-r)^n$ über, und convergirt, weil n eine positive Grösse bedeutet, indem r sich der Einheit nähert, stetig gegen den Werth Null. Die rechte Seite der Gleichung (8) im vorigen § ändert sich also unter den dort bezeichneten Voraussetzungen bei dem Uebergange der Grösse r in die Einheit stetig, wie an jener Stelle behauptet worden war.

Die Untersuchung der Exponentialreihe, der Binomialreihe und der logarithmischen Reihe ist jetzt zu Ende geführt. In diesen drei Reihen werden durch die Anwendung eines Arguments, das gleich einer complexen Grösse ist, die Reihen zusammengefasst, welche nach einander für die Darstellung einer beliebigen Potenz eines reellen Binoms, für die Darstellung der Exponentialfunction, der trigonometrischen Function Sinus und Cosinus, der Functionen Logarithmus und Arcus tangentis gefunden worden sind. Während die Bestimmung einer Grösse als Grenzwerth einer unendlichen Summe das Gebiet der Algebra überschreitet, gehört das zu der Zusammenfassung der erwähnten einzelnen Reihen dienende Mittel, der Gebrauch einer complexen Grösse, unzweifelhaft der Algebra an. Auch die Grundaufgabe der Algebra, die Wurzeln einer reinen Gleichung von einem beliebig hohen Grade aufzusuchen, ist auf directem Wege durch die Binomialreihe gelöst worden, und findet daher durch ein Verfahren seine Erledigung, das über das Gebiet der Algebra hinaus reicht.

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi in Bonn.

T. II. 13 + 18 · 00
2 Bänd. à 1.20 fl.
Mai 1898 bez.

7/2 8 8t2 f